



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas – Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil  
Mestrado em Estruturas

---

# **Aplicação da estratégia de subestruturação genérica EC/EC na análise de problemas 3D de interação dinâmica solo-fundações no domínio da frequência**

**AUTOR: BRUNO PALHARES**

ORIENTADOR: Prof. Dr-Ing. Francisco Célio de Araújo

Ouro Preto, Maio de 2006.

P161a      Palhares, Bruno.  
Aplicação da estratégia de subestruturação genérica EC/EC na análise de problemas 3D da interação dinâmica solo-fundações no domínio da frequência [manuscrito]. / Bruno Palhares. - 2006.  
115 f. : il.; graf.; tabs.; mapas.

Orientador: Prof. Francisco Célio de Araújo.

Área de concentração: Estruturas Metálicas.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.

1. Estruturas metálicas - Teses. 2. Fourier, Transformações de - Teses. 3. Engenharia Civil - Teses. I.Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil. II.Título.

CDU: 624.014

Catlogação: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas – Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil  
Mestrado em Estruturas

---

# **Aplicação da estratégia de subestruturação genérica EC/EC na análise de problemas 3D de interação dinâmica solo-fundações no domínio da frequência**

**AUTOR: BRUNO PALHARES**

**ORIENTADOR: Prof. Dr-Ing. Francisco Célio de Araújo**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

**Aplicação da estratégia de subestruturação genérica EC/EC na análise de problemas 3D de interação dinâmica solo-fundações no domínio da frequência**

**Autor: Bruno Palhares**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 26 de junho de 2006, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

---

Prof. Dr-Ing. Francisico Célio de Araújo (UFOP/Orientador)

---

Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves (UFOP)

---

Prof. Dr-Ing. Euclides de Mesquita Neto ( FEM/UNICAMP)

## Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus e a sua grande legião, por estarem sempre estado ao meu lado, em todos os momentos, amparando-me e guiando-me.

À meus Pais e irmãs, aos quais não tenho palavras para expressar minha gratidão pelos esforços de toda uma vida.

Aos meus amigos e irmãos, que sempre acreditaram em mim, mesmo a distância nestes últimos momentos.

# Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Euler de Oliveira Guerra e ao Grupo PET da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, pelo entusiasmo, auxílio, companheirismo e ensinamentos desde a época da graduação.

Ao Prof. Francisco Célio de Araújo, agradeço as lições que me tornaram melhor homem e profissional do que eu era até então. Obrigado por tudo.

Agradeço aos meus contemporâneos e amigos que me ajudaram a passar por todos os momentos difíceis deste mestrado, em especial àqueles da República Oxiurus.

Agradeço a meus Pais, irmãs e a Ju pelo carinho, ajuda e compreensão, sem vocês eu jamais conseguiria.

*“Amor Filial, Reverência pelas coisas sagradas, Cortesia,  
Companheirismo, Fidelidade, Pureza e Patriotismo  
são as 7 virtudes cardeais de um DeMolay.....”*

# Resumo

Neste trabalho, apresenta-se um algoritmo geral de acoplamento EC-EC para a descrição de problemas tridimensionais de propagação de ondas em meios sólidos com características complexas, como por exemplo, solos com várias camadas, sistemas envolvendo acoplamento o solo e várias fundações, inclusões de formas geométricas diversas, etc. A estratégia adotada é baseada em um algoritmo de decomposição genérico, que por sua vez baseia-se no *solver* de gradiente biconjugado com pré-condicionamento de Jacobi (J-BiCG). Há, assim, a possibilidade de que cada subestrutura do modelo seja tratada independentemente do ponto de visto numérico, não havendo portanto, montagem explícita do sistema de equações. Desse modo, tanto o tempo de resolução do sistema quanto a memória são otimizados, uma vez que se elimina, completamente, o armazenamento e a manipulação de blocos de coeficientes nulos presentes no sistema esparso de equações algébricas. Vale ressaltar que elementos de contorno descontínuos são aplicados de modo a simplificar a introdução das condições de acoplamento entre as subregiões, as quais, usualmente, apresentam arestas e cantos. Uma discussão sobre a forma correta de se estabelecerem parâmetros do algoritmo FFT, de modo que não ocorram condições iniciais espúrias e aliasing, é também apresentada.

Por fim, nas aplicações, uma série de problemas é analisada no domínio da frequência de modo a verificar o desempenho do programa computacional, medido em termos de precisão das respostas e eficiência do *solver*. Respostas no domínio do tempo, na maioria dos casos, são também reconstituídas, via algoritmo de transformada inversa de Fourier.



# Abstract

In this work, a general BE-BE coupling algorithm for investigating three-dimensional wave propagation phenomena in solids with complex characteristics such as layered soils, coupled soil-foundation systems, inclusions with general geometric shapes, etc. is presented. The strategy adopted is based on a generic domain decomposition algorithm, on its turn, based on the Jacobi-preconditioned biconjugate gradient solver (J-BiCG). Thus, the global coupled matrix has not to be explicitly assembled. In fact, the algorithm operates the subsystems as they were independent of each other. Thereby, both the solution CPU time and storage memory are optimized, since one completely avoids storing and manipulating all blocks of zeroes present at the sparse coupled system of equations. Furthermore, discontinuous boundary elements are used to simplify the imposition of the coupling conditions between the subregions, usually containing corners and edges. The correct consideration of parameters involved in the Fast-Fourier-Transform (FFT) algorithm so as to avoid spurious initial conditions and the aliasing phenomenon is also discussed.

At the end, a series of analyses through the frequency domain is carried out to test the performance of the computer code, measured in terms of response precision and solver efficiency. Time-domain responses are also reconstituted via inverse FFT algorithm.

# Sumário

Dedicatória.....	III
Agradecimentos .....	IV
Resumo.....	VI
Abstract.....	VII
Sumário.....	VIII

<b>Capítulo 01 – Introdução.....</b>	<b>1</b>
--------------------------------------	----------

<b>Capítulo 02 – Fundamentos da Elastodinâmica.....</b>	<b>6</b>
---	----------

2.1 – Equações Básicas da Elastodinâmica .....	6
2.2 – Estratégias de Resolução.....	9
2.2.1 – Estratégia de Resolução no Domínio da Frequência.....	11
2.3 – Tratamento Numérico.....	13
2.3.1 – Transformada de Fourier.....	13
2.3.2 – Transformada Rápida de Fourier.....	16
2.4 – Considerações sobre análises no Domínio da Frequência .....	17
2.4.1 – Tempo estendido e Amortecimento .....	17
2.4.2 – O efeito Aliasing .....	20

## **Capítulo 03 – Análise no Domínio da Frequência via Formulação Direta do**

<b>M.E.C. ....</b>	<b>21</b>
3.1 – O problema no domínio da Frequencia .....	22
3.2 – formulação Integral do MEC .....	23
3.2.1 – Cálculo da resposta em Pontos Internos .....	28
3.2.2 – Cálculo das Tensões no Contorno.....	28
3.2.2.1 – Aplicações.....	32
3.3 – Discretização espacial da equação integral de contorno .....	36
3.4 – Processos de Integração .....	46
3.4.1. – Integrais não-singulares e quasi-singulares.....	46
3.4.2. – Integrais Singulares.....	47
3.4.3. – Procedimentos especiais de integração .....	49
3.4.3.1. – Transformação de coordenadas polares triangulares .....	49
3.4.3.2. – Transformação não-linear.....	53
3.4.3.3. – Processo combinado – transformação de coordenadas polares triangulares + transformação não-linear.....	56

## **Capítulo 04 – O algoritmo de subestruturação ..... 59**

4.1 – Solvers .....	60
4.1.1 – Os Solvers Iterativos .....	60
4.2 – Acoplamento genérico.....	64
4.3 – Interfaces Inclínadas.....	68
4.4 – Resolução do Sistema acoplado .....	69

<b>Capítulo 05 – Aplicações .....</b>	<b>71</b>
Aplicação 5.01: Vigas com Subregiões .....	71
Aplicação 5.02: Interação Solo-Fundação .....	78
Aplicação 5.03: Interação Fundação-Solo-Fundação .....	85
Aplicação 5.04: Solo com Trincheira .....	90
Aplicação 5.05: Solo sem trincheira .....	99
 <b>Capítulo 06 – Conclusões.....</b>	 <b>107</b>
 <b>Bibliografia .....</b>	 <b>110</b>

# Capítulo 01 - Introdução

---

Na análise de problemas de engenharia, estabelecem-se modelos matemáticos, usualmente sistemas de equações diferenciais, que representem adequadamente o seu comportamento físico. Dessa forma, introduzem-se as variáveis úteis na descrição de sua resposta, as quais serão determinadas quando da resolução dos correspondentes modelos matemáticos.

Por muito tempo, a solução dessas equações foi estudo de diversos pesquisadores. Porém, com o passar do tempo a busca por respostas de problemas cada vez mais complexos começassem a surgir. Desse modo, soluções analíticas tornaram-se impraticáveis ou mesmo impossíveis. Os métodos numéricos, ou aproximados, apareceram então como uma interessante alternativa, pois, através da aproximação dessas equações diferenciais por sistemas de equações algébricas, obtidas via processos de discretização do modelo físico-matemático em questão, aliada ao desenvolvimento de computadores, tornou-se possível a obtenção de respostas aproximadas extremamente precisas.

Uma das primeiras estratégias adotadas na obtenção de respostas aproximadas de problemas de engenharia baseava-se no Método das Diferenças Finitas (Southwell, 1946), que pode ser aplicado, a princípio, a qualquer tipo de problema. Porém, a introdução de condições iniciais e de contorno é bastante inconveniente. Além disso, há a necessidade de malhas consideravelmente refinadas para a obtenção de bons resultados. Posteriormente surgiu o Método dos Elementos Finitos, M.E.F., que resolve, em princípio, de maneira rápida e eficiente, qualquer tipo de problema (Zienkiewicz, 1989). Porém, a necessidade da discretização de todo o domínio de análise do problema faz com que suas malhas tenham elevado número de elementos, sobretudo em análises tridimensionais.

Uma outra alternativa de aproximação de respostas, que tem se mostrado muito interessante também, fundamenta-se na utilização de integrais de contorno, através das quais os problemas são descritos apenas em termos de suas grandezas de contorno (Banerjee, 1994). Chega-se então ao Método dos Elementos de Contorno, M.E.C., bastante eficiente na resolução de muitos problemas de engenharia, sobretudo aqueles que se relacionam com o modelamento de regiões abertas (estendendo-se ao infinito) e que envolvem concentração de tensão. A qualidade de respostas obtidas via M.E.C., sua precisão, é uma característica muito importante, porém, como outros métodos numéricos, o M.E.C. tem pontos negativos e positivos. Podem-se destacar os seguintes pontos negativos:

- Necessidade do conhecimento de soluções fundamentais para cada classe de problema;
- Existência de integrais singulares, que exigem a aplicação de estratégias sofisticadas de integração;
- As matrizes resultantes dos sistemas são cheias e não-simétricas, exigindo a utilização de *solvers* eficientes.

São pontos positivos do método:

- Discretização somente do contorno do problema por elementos finitos de contorno, tornando o modelo consideravelmente mais simplificado (com muito menos elementos e nós);
- Em função do menor número de nós e elementos, o sistema resultante fica, evidentemente, menor;
- Alto nível de precisão da resposta;
- A formulação do método faz com que o mesmo seja muito interessante para soluções de problemas de domínios infinitos (problemas de interação solo-estrutura), uma vez que as condições de radiação são perfeitamente satisfeitas.

Apesar das integrais fortemente singulares demandarem cuidado especial, a eficiência do método está intimamente relacionada à eficiência dos algoritmos de integração, utilizados para avaliar as integrais fracamente singulares e *quasi-singulares*, que apesar de existirem no sentido ordinário, podem consumir um elevado tempo de processamento, uma vez que requerem um número elevado de pontos de integração para que resultados precisos sejam obtidos. Muitas pesquisas recentes têm se concentrado no estudo e desenvolvimento de algoritmos de integração eficientes, ou seja, que forneçam precisão aceitável sem que o tempo de processamento torne-se proibitivo. Uma das primeiras estratégias desenvolvidas baseia-se na subdivisão dos elementos de integração em vários subelementos e na aplicação da quadratura de Gauss sobre cada subelemento separadamente (Lachat e Watson, 1976; Jun *et al*, 1985; Voutsinas e Bergeles, 1990). Todavia, tem-se que o grau do polinômio de maior ordem que pode ser exatamente integrado utilizando-se essa técnica é determinado pelo número de pontos de integração considerado em cada subelemento de integração e não pelo número total de pontos de integração por subelemento.

Em Telles (1987), encontra-se um processo para a avaliação das integrais fracamente singulares e *quasi-singulares* baseado em uma transformação não linear de coordenadas polinomiais do 3° grau. Tem-se, nesse processo, que os pontos de integração são deslocados para a direção do ponto fonte ( $\xi$ ) em função da distância do elemento de contorno ao ponto de campo ( $r$ ). Para valores de  $r$  muito grandes este processo é automaticamente desativado (Telles, 1987, Telles e Oliveira, 1994). Outra estratégia que pode ser adotada para aumentar a eficiência dos algoritmos de integração é a transformação de coordenadas polares triangulares, a qual, caracteriza-se pela subdivisão do elemento em subdomínio triangulares e por uma seqüência de mapeamentos de modo a reduzir a ordem da singularidade (Li *et al*, 1985; Alberto 2002).

Em Silva (2005) e Silva e Araújo (2004), desenvolveu-se, com o objetivo de aumentar a eficiência dos algoritmos de integração, um processo baseado na combinação da transformação de coordenadas polares e da transformação Não-Linear de Telles, que será utilizado neste trabalho.

Do ponto de vista de aplicação, o objetivo deste trabalho é aplicação do M.E.C. a problemas elastodinâmicos no domínio da frequência, em que haja ou não descontinuidade em seu domínio de definição, envolvendo materiais não-homogêneos, e, sobretudo, descritos via modelos de grande ordem. Para tal, aplicam-se técnicas de subestruturação, que consistem basicamente na subdivisão do domínio do problema em sub-regiões e na consideração de modelos de contorno para cada uma delas. A técnica usada neste trabalho fundamenta-se na aplicação de *solvers* iterativos, dentre os quais destacam-se os *solvers* de Krylov (Silva e Araújo, 2004; Araújo, 1989; Sonneveld, 1989; van der Vorst, 2003). Estes *solvers* têm se mostrado bastante eficientes, principalmente na análise de problemas de grande porte, pois devido ao fato de não realizarem transformações na matriz durante o processo de resolução do sistema de equações, possibilitam eliminar completamente o armazenamento e a manipulação de blocos de coeficientes nulos. Esses *solvers* também são de grande importância no desenvolvimento de programas computacionais com opção de processamento paralelo, uma vez que possibilitam a subdivisão do problema por meio da decomposição genérica de domínio (subestruturação) (Araújo *et al*, 2001; Araújo *et al* 2002; Araújo *et al* 2003; Araújo *et al* 2004).

Em Araújo, Belmonte e Freitas (2000) e Martins (2000), iniciou-se o desenvolvimento da estratégia de acoplamento genérico EC-EC, utilizada neste trabalho. Nesses trabalhos as sub-regiões ainda não eram tratadas completamente independentes. O sistema de equações ainda era explicitamente montado, porém os blocos de zeros eram completamente excluídos durante a sua resolução. Em Dors (2002), realizou-se então a implementação da estratégia de acoplamento genérica já sem a montagem explícita do sistema global acoplado, na verdade, como se as demais subestruturas ou subregiões fossem numericamente desacopladas. Nesse trabalho usaram-se apenas elementos de contorno contínuos. Em Alberto (2002) e Araújo, Alberto e Dors (2003), estendeu-se a estratégia de acoplamento para problemas 3D transientes. Em Silva e Araújo (2004) e Silva (2005), o procedimento de acoplamento foi bastante simplificado mediante a introdução de elementos de contorno descontínuos, os quais simulam as descontinuidades de fluxo ou de forças em cantos e arestas nas interfaces entre as subregiões. Nesse trabalho, as condições de acoplamento compunham-se apenas das condições de equilíbrio e de compatibilidade.



Em resumo, deseja-se adequar toda a estrutura do programa desenvolvido para problemas estáticos e estacionários a problemas elastodinâmicos, no domínio da frequência. Diversos problemas como aqueles envolvendo interação o solo e várias fundações, problemas de propagação de ondas em solos, vigas com trincas, etc... podem então agora ser eficientemente analisados.

No decorrer desta dissertação serão apresentados os conceitos básicos de problemas dinâmicos (Capítulo 02), dando uma ênfase especial a análises no domínio da frequência. A seguir será apresentada a formulação do M.E.C. para problemas elastodinâmicos no domínio da frequência (Capítulo 03), definindo-se as soluções fundamentais, os elementos de contorno contínuos e descontínuos, até a montagem final do sistema discretizado. No capítulo 04 serão apresentados o *solver* utilizado no presente trabalho, além do esquema de acoplamento genérico EC-EC. As aplicações são demonstradas, analisadas e comparadas com diversos autores no capítulo 05, com o objetivo de validar as implementações realizadas. Por fim, no Capítulo 06, as conclusões e últimos comentários são apresentados.

# Capítulo 02 – Fundamentos da Elastodinâmica

---

Neste capítulo são apresentadas as equações diferenciais que governam o problema elastodinâmico e as estratégias de resolução destes problemas no domínio da frequência.

Algumas das idéias básicas do fenômeno de propagação de ondas que são utilizadas neste trabalho não serão detalhadas, uma vez que o tema tem sido satisfatoriamente abordado por diversos autores (Achenbach, 1973, Miklowitz, 1972, Beskos & Manolis, 1988, Dominguez, 1993), alguns deles tratando problemas elastodinâmicos já diretamente via MEC.

O algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT) e seus erros clássicos, como a correta consideração do tempo estendido e do amortecimento, são também, abordados.

## **2.1 Equações Básicas da Elastodinâmica**

Para o estabelecimento das equações diferenciais que descrevem problemas de propagação de ondas elásticas em um sólido, considera-se um infinitesimal de domínio (Fig. 2.01). Tem-se então, para problemas lineares, isotrópicos e homogêneos, as relações:

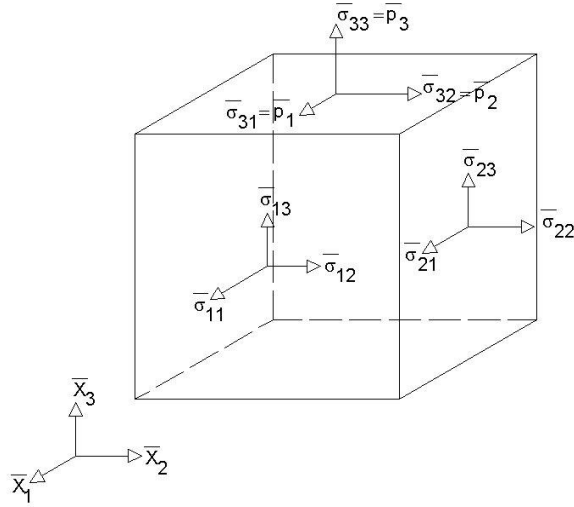


Figura 2.01 – Elemento Infinitesimal

*Equação Diferencial de Equilíbrio:*

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.01)$$

*Relações cinemáticas:*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.02)$$

*Lei constitutiva:*

$$\sigma_{ij,i} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.03)$$

Nas expressões acima,  $u_i$  denota o vetor de deslocamento no ponto  $\mathbf{x}$  no tempo genérico  $t$ , segundo a direção  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são, respectivamente, o tensor de tensão e o tensor de deformação,  $b_j$  são as forças de volume,  $\rho$  é a densidade. Note que a vírgula indica derivada espacial e o ponto, derivada temporal. As constantes de Lamé,  $\lambda$  e  $\mu$ , são dadas por:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.04)$$

E

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (2.05)$$

onde  $E$  representa o módulo de elasticidade do material,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson;

Combinando-se as três relações matemáticas dados por (2.01) a (2.03), obtém-se a equação diferencial que descreve fenômenos de propagação de ondas em sólidos em termos de deslocamentos, válida para pequenos deslocamentos. Esta equação, denominada de equação de Navier, é dada por:

$$(c_1^2 - c_2^2)u_{i,ij} + c_2^2 u_{j,ii} + \frac{b_j}{\rho} = \ddot{u}_j, \quad (2.06)$$

que deverá ser resolvida sob as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u_i(x,0) &= U_i, & x \in S_1 \\ u_i^0(x,0) &= \sigma_{ij} n_j = P_i, & x \in S_2 \end{aligned} \quad (2.07)$$

e condições iniciais,

$$\begin{aligned} u_i(x,0) &= u_i^0 \\ \dot{u}_i(x,0) &= v_i^0 \end{aligned} \quad (2.08)$$

Tais equações são apresentadas sabendo que  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , que representa o contorno do corpo,  $n_j$  é a componente do vetor unitário normal ao contorno do corpo,  $P$  é o vetor força de superfície. Os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ , dados por

$$c_1 = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \quad (2.09)$$

e

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (2.10)$$

que são, respectivamente, as velocidades das ondas de pressão e de cisalhamento do meio. Seus efeitos, para uma onda se propagando na direção de  $x_1$ , são mostrados na figura 2.02. Na figura. 2.02a, mostra-se a propagação da onda primária (de pressão), de velocidade  $c_1$ . Na figura 2.02b, mostra-se a propagação da onda secundária (de cisalhamento), de velocidade  $c_2$ .

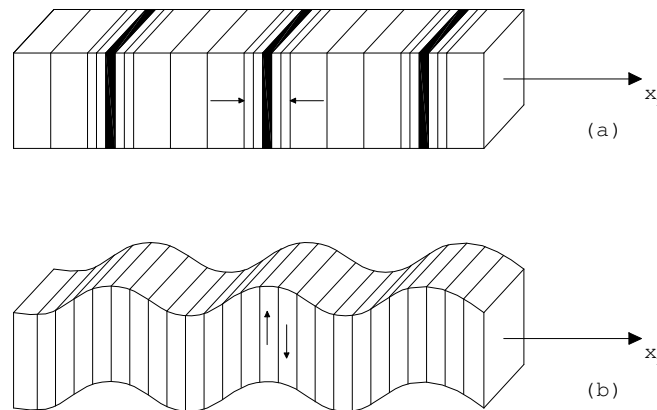


Figura 2.02. Efeito das ondas de pressão(a) e cisalhante (b).

## 2.2. Estratégias de Resolução

Um problema dinâmico se difere, em princípio, do problema estático pela sua natureza tempo-dependente. Assim, forças inerciais e eventuais variações temporais de carga precisam ser consideradas (Clough e Penzien, 1993; Tedesco, 1998; Choppra, 2001).

Para estabelecer corretamente os parâmetros de uma análise dinâmica, estudar-se-ão inicialmente sistemas simples, conhecidos como sistemas de 01 grau de liberdade (S1GL) como o descrito na figura 2.03, úteis na simplificação de sistemas maiores.

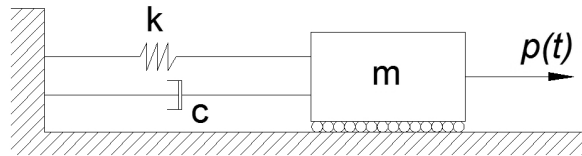


Figura 2.03- Sistema de 01 grau de liberdade (Massa, mola e amortecedor).

Dado um sistema linear, com massa concentrada  $m$ , rigidez  $k$  e amortecimento  $c$ , sob a ação de uma excitação genérica ( $p(t)$ ), pode-se montar, a partir da terceira Lei de Newton, a equação que o governa (Choppra, 2001), dada por:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t). \quad (2.11)$$

Para solucionar tal equação há diversos métodos. O primeiro seria a estratégia clássica, que consiste na soma de uma solução particular com uma solução complementar (Wylie e Barret, 1985).

Outra maneira de se determinar a solução da equação 2.11 é baseada na aplicação da força,  $p(t)$ , como se fosse uma seqüência de infinitos curtos pulsos. A resposta de um S1GL, sob a ação de uma força  $p(t)$ , no tempo  $t$ , é então obtida adicionando-se as respostas de pequenos impulsos em um determinado tempo, que constitui a conhecida Integral de Duhamel (Clough e Penzien, 1993).

A integral de Duhamel fornece uma alternativa ao método clássico de solução, mesmo para excitações complexas, onde a mesma deve ser analisada numericamente.

Outra alternativa para a solução da equação 2.11 é a utilização das transformadas de Laplace e de Fourier, essas duas transformações são conceitualmente similares, sendo que a transformada de Fourier leva a análises do domínio da frequência.

### 2.2.1. Estratégia de Resolução no Domínio da Frequência

Em geral, análises no domínio da frequência seguem o esquema apresentado na figura 2.04.

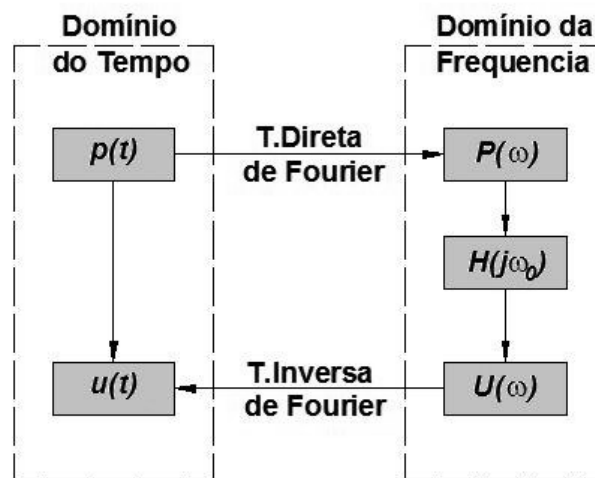


Figura 2.04 – Esquema da análise no domínio da Frequência

Dada uma excitação periódica  $p(t)$ , de período  $T_0$ , essa pode ser escrita através da série de Fourier,

$$p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j e^{i(j\omega_0 t)}, \quad (2.12)$$

onde  $\omega_0$  é o harmônico fundamental ou primeiro harmônico da excitação, dado por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (2.13)$$

e  $\omega_j$  é a frequência circular do j-ésimo harmônico

$$\omega_j = j\omega_0. \quad (2.14)$$

Desta forma, transforma-se a excitação arbitrária em um carregamento harmônico complexo, via transformada direta de Fourier. O coeficiente de Fourier  $P_j$ , que pode ser entendido como sendo a amplitude do j-ésimo harmônico da excitação, é expresso em termos de  $p(t)$  na forma (Choppra, 2001):

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.15)$$

Para cálculo da resposta no Domínio da Frequência, faz-se necessário à definição prévia da função da resposta em frequência para cada valor de frequência, definida por:

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k}. \quad (2.16)$$

A resposta, para cada frequência, fica então definida sendo:

$$U(\omega) = H(\omega)P(\omega). \quad (2.17)$$

Note que para problemas maiores, onde a discretização espacial faz-se necessária, o procedimento de definição da resposta no domínio da frequência é adaptada para cada método numérico (M.E.F., M.E.C., M.D.F., entre outros).

A resposta de sistema linear sujeito a uma excitação periódica, dado pela equação 2.11, pode então ser determinada pela combinação de respostas dos termos individuais da



serie de Fourier. Desta forma, tem-se a reposta no domínio do tempo, via Método do Domínio da Freqüência, dada pela transformada inversa de Fourier:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.18)$$

### **2.3. Tratamento Numérico**

Tratar essas transformações de Fourier analiticamente pode ser um processo tedioso. Desta forma, para tornar o método do domínio da freqüência eficientemente prático e preciso, faz-se necessária uma abordagem numérica.

As análises numéricas podem ser divididas em duas etapas, a primeira seria a transformação do par de equações de Fourier de forma discreta (Transformada Discreta de Fourier). A segunda etapa seria a adoção de uma estratégia numérica eficiente para avaliação dessas transformadas discretas de Fourier.

#### **2.3.1. Transformada Discreta de Fourier**

A avaliação numérica requer o truncamento das transformações de Fourier, pois estas são integrais impróprias.

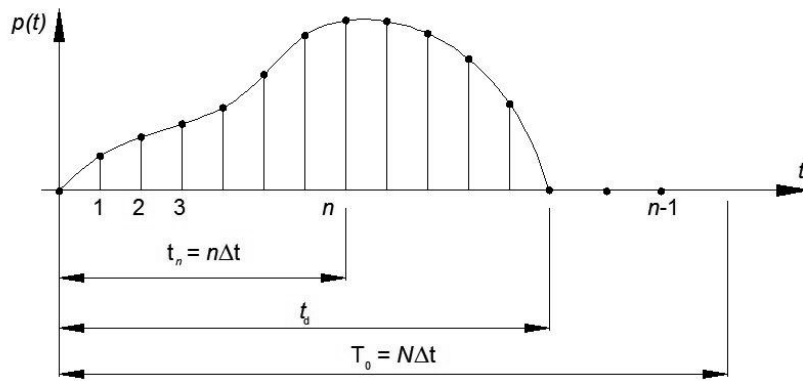


Figura 2.05 – Carregamento discretizado

Deve-se discretizar o carregamento, em  $N$  parcelas iguais de tempo ( $\Delta t$ ). A consideração de um tempo adicional ao final do período de aplicação da carga, conforme a figura 2.05, torna-se necessária, de modo que, após sua aplicação, o sistema leva algum tempo, em virtude de seu amortecimento, para retornar a posição de repouso. Esse comportamento é primordial para as análises no domínio da frequência e será discutido em um tópico adiante.

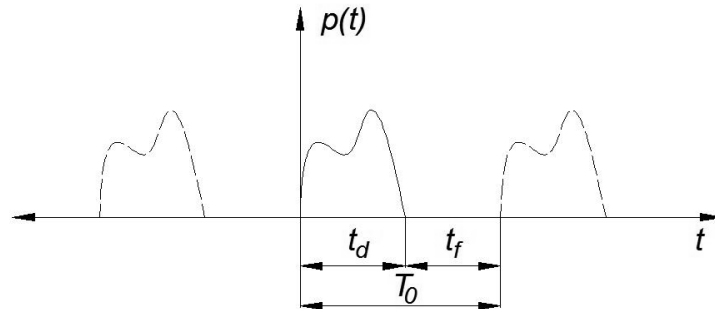


Figura 2.06 – Extensão periódica do carregamento  $p(t)$

Considerando a extensão periódica de um determinado carregamento, conforme a figura 2.06, ao se realizar o truncamento, obtém-se :

$$p_n = \sum_{j=0}^{N-1} P_j e^{i(2\pi j / N)} \quad (2.19)$$

e

$$P_j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i(2\pi j n / N)} . \quad (2.20)$$

As equações 2.19 e 2.20 são as equações que definem a Transformação Discreta de Fourier.

Desta forma, inicialmente calcula-se a resposta para o harmônico correspondente a um carregamento no domínio do tempo transformado, ou seja,

$$U_j = H_i P_j \quad 0 \leq j \leq N-1 . \quad (2.21)$$

A função de resposta da frequência,  $H_i$ , é calculada a partir da equação 2.16 para cada  $\omega = \omega_j$ . Conforme as equações 2.19 e 2.20, sabe-se que as frequências superiores à frequência de Nyquist, que é definida como a frequência do maior harmônico da transformação, ou seja,

$$\omega_{máx} = \frac{N}{2} \omega_0 = \frac{\pi}{\Delta t} , \quad (2.22)$$

são o conjugado complexo dos seus pares positivos. Desta forma deve-se variar as frequências da seguinte maneira:

$$\omega_j = \begin{cases} j\omega_0 & 0 \leq j \leq N/2 \\ -(N-j)\omega_0 & N/2 < j \leq N-1 \end{cases} . \quad (2.23)$$

Logo, a resposta  $u_n = u(t_n)$ , no tempo discreto  $t_n = n\Delta t$ , é calculada de acordo com a versão truncada da equação 2.23, definindo-se assim, a transformada discreta inversa de Fourier:

$$u_n = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{i(j\omega_0 t)} = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{i(2\pi j / N)} . \quad (2.24)$$

### 2.3.2. Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform)

O método da Transformada Discreta de Fourier determina a resposta de um sistema qualquer, mas tornou-se realmente eficiente computacionalmente com o algoritmo desenvolvido por Cooley e Tukey (1965), a transformada rápida de fourier (*Fast Fourier Transform, FFT*). Este algoritmo não traz mudanças quanto ao anterior, mas sim uma grande eficiência e precisão.

Para considerações sobre a importância deste algoritmo, deve-se considerar qualquer uma das equações da Transformada Rápida de Fourier como sendo (Clough e Penzien, 1993):

$$B_m = \sum_{n=0}^{N-1} A_n W_N^{nm} , \quad (2.25)$$

onde

$$W_N = e^{\frac{2\pi i}{N}} . \quad (2.26)$$

A avaliação da soma será mais eficiente se o número de incrementos de tempo  $N$ , o qual o carregamento é dividido em partes iguais, deve ser igual a:

$$N = M^2 . \quad (2.27)$$

Devido a consideração da equação 2.27,  $N$  e  $M$  podem ser tratados de forma binária (Zero ou 1), simplificando extremamente o tratamento numérico. A equação 2.25 pode ser então escrita, para o caso de  $M=3$  e  $N=8$ , como:

$$B(m_0, m_1, m_2) = \sum_{n_0=0}^1 A_2(m_0, m_1, n_0) W_8^{n_0(4m_2+2m_1+m_0)} . \quad (2.28)$$

Este procedimento é particularmente eficiente porque minimiza a memória necessária para armazenamento das variáveis. Nota-se que quanto o número de subdivisões do carregamento, mais eficiente é este procedimento, por exemplo, para  $N=1024$  o algoritmo FFT necessita somente 0,5% do esforço computacional do que o procedimento DFT ( Clough e Penzien, 1993; Choppra, 2001).

## 2.4. Considerações sobre análises no Domínio da Frequência

Nota-se que para um tratamento numérico das Transformadas de Fourier, possíveis erros provenientes de uma incorreta introdução das condições de contorno do problema poderão surgir. Destacam-se a correta consideração do amortecimento, do tempo estendido e do efeito *aliasing*

### 2.4.1. Tempo estendido e Amortecimento

A resposta dinâmica de um sistema simples de 01 grau de liberdade, com amortecimento do tipo viscoso, sob a ação do carregamento da figura 2.07,

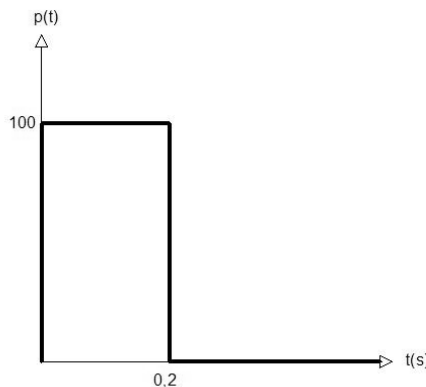


Figura 2.07 – Carregamento no tempo a ser analisado

que deve ser obtida considerando-se um tempo de aplicação, de pelo menos, 1,5 vezes o tempo de aplicação de interesse (Choppra ,2001). Entretanto, este tipo de análise apresenta grande sensibilidade quanto à consideração do tempo estendido. De modo a realizar algumas observações, adotou-se a viga engastada livre, com as propriedades físicas indicadas, da figura 2.08.

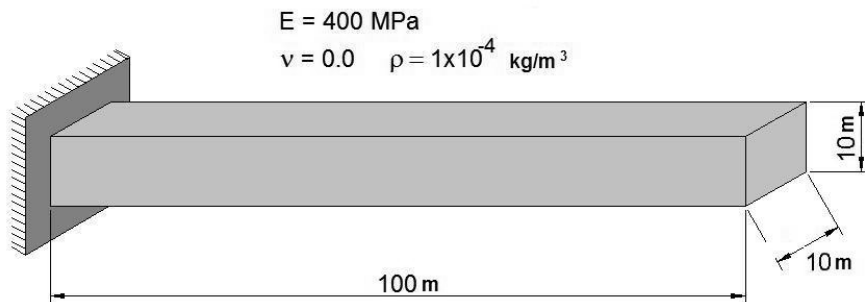


Figura 2.08 – Viga engastada livre simulada como S1GL

Para a consideração de três valores diferentes de amortecimento ( $\xi = 0.001$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $\xi = 0.1$ ) montaram-se os gráficos 2.01 a 2.03,

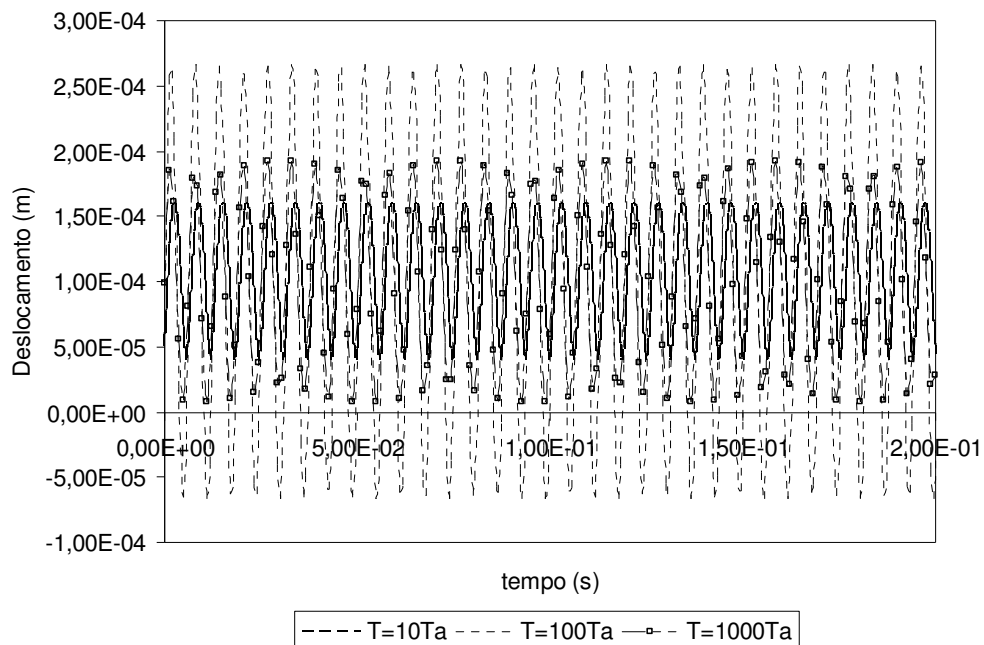


Gráfico 2.01 – Consideração do tempo estendido a um S1GL da figura 2.06 ( $\xi = 0.001$ )

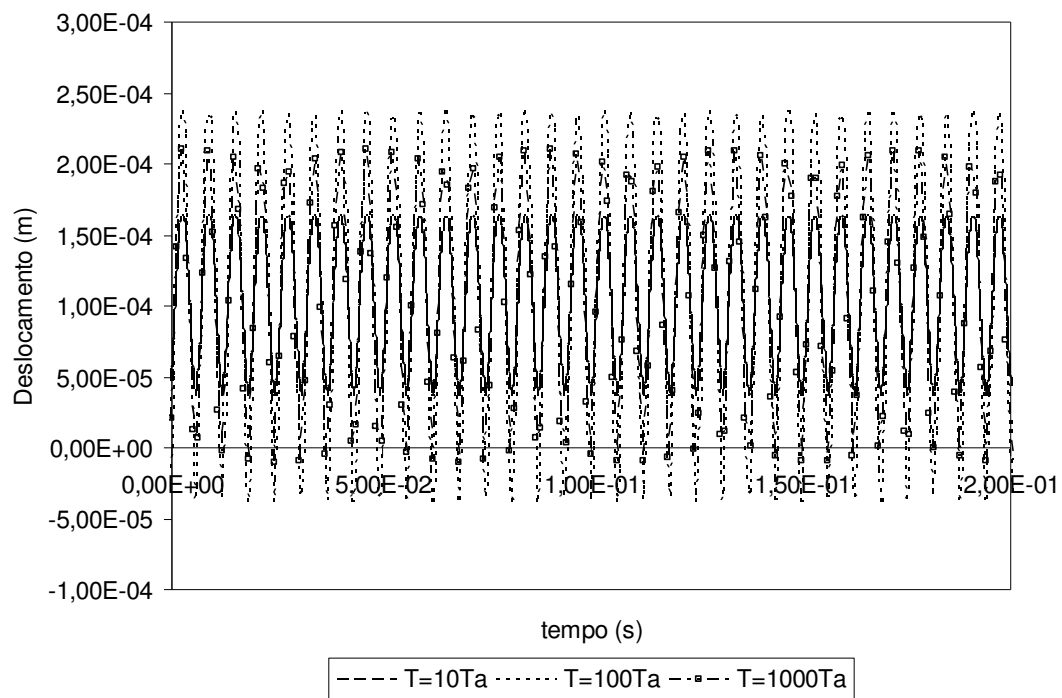


Gráfico 2.02 – Consideração do tempo estendido a um S1GL da figura 2.06 ( $\xi = 0.01$ )

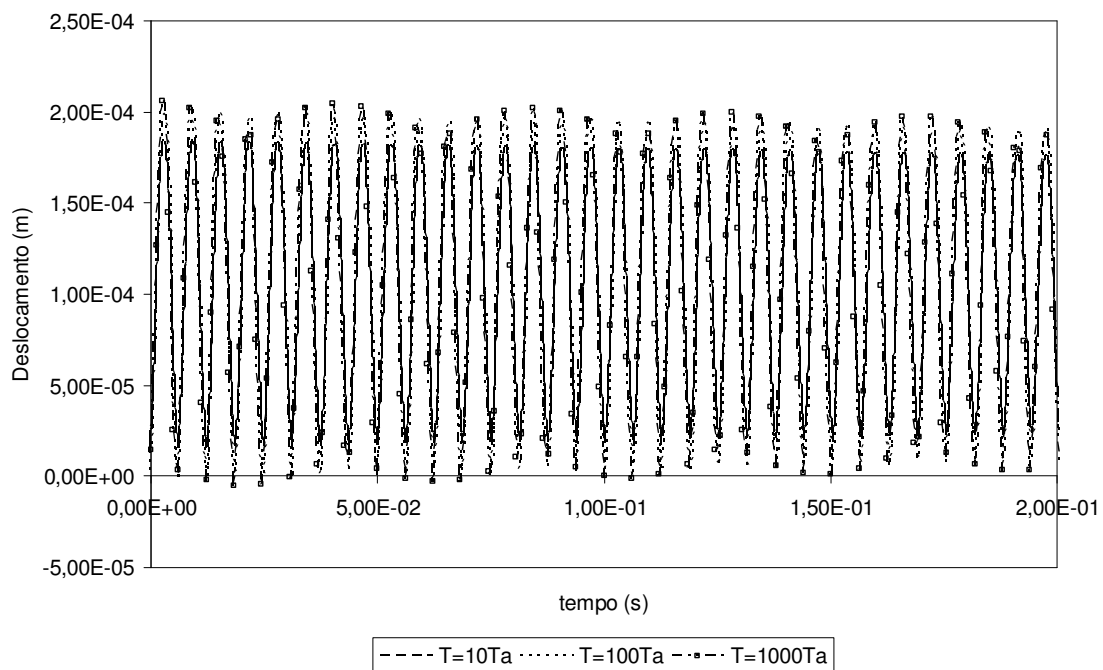


Gráfico 2.03 – Consideração do tempo estendido a um S1GL da figura 2.06 ( $\xi = 0.1$ )

que apresentam o deslocamento da extremidade livre da viga no tempo, sendo essas respostas comparadas com aquelas fornecidas por Clough e Penzien (1993).

Nota-se que quanto maior o amortecimento, menor o tempo estendido necessário para que não ocorram interferências iniciais na resposta (gráfico 2.03), em função da transformação do carregamento. Essa análise é extremamente importante, visto que, dado um problema com baixo índice de amortecimento, maior será o tempo que deve ser acrescentado ao carregamento real.

#### **2.4.2. O efeito aliasing**

A primeira etapa do processo de obtenção da resposta de um determinado sistema, via domínio da frequência, é a transformação do carregamento em harmônicos, que somados representem perfeitamente o carregamento original no tempo.

Pela consideração da transformada discreta de Fourier, o número de pontos de uma transformação qualquer tem aspecto vital na sua reconstituição. Um dos erros gerados pela incorreta adoção de tais passos de carregamento é o efeito aliasing. Define-se efeito *aliasing*, ou *foldover*, como o surgimento de frequências espúrias, (diferentes da original) quando o sinal não está corretamente representado. Para funções harmônicas, com poucos pontos tal efeito é praticamente eliminado. Para funções arbitrárias ou periódicas faz-se necessário um número maior de pontos.



## Capítulo 03 – Análise no Domínio da Frequência via Formulação Direta do M.E.C.

---

Nas ultimas décadas o Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.), definitivamente, se estabeleceu como uma importante alternativa de análise dentre os vários métodos numéricos existentes, tendo sido aplicado aos mais diversos tipos de problemas de engenharia, lineares ou não lineares, no domínio da frequência ou tempo dependentes, envolvendo fluidos e sólidos.

Resumidamente, pode-se dizer que uma vez estabelecida a equação ou o sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento das variáveis de um dado problema físico, o método consiste na transformação deste sistema em um sistema de equações integrais envolvendo apenas os valores de contorno. Sendo assim, diferentemente dos métodos de domínio, faz-se, naturalmente necessária a discretização apenas do contorno do domínio envolvido para a aproximação da resposta. De outro modo, uma formulação baseada em equações integrais de contorno satisfaz identicamente a resposta do problema no interior de seu domínio de definição, e, aproximadamente, no contorno. A avaliação da resposta no interior é realizada a partir dos valores de contorno.

Este capítulo trata, de forma sucinta, a formulação direta do MEC, para análises dinâmicas no domínio da frequência, aspectos gerais relacionados com as estratégias de algebrização da equação integral e uma descrição da biblioteca de elementos.

### 3.1. O problema no domínio da frequência

Considerando um instante de observação consideravelmente grande, após os distúrbios iniciais, para se analisar o comportamento da Equação de Navier, descrita no capítulo 2, sob excitações harmônicas, pode-se assumir que o comportamento desta solução e das variáveis de campo do problema seja harmônico no tempo (Manolis e Beskos, 1988), com uma determinada frequência angular  $\omega_n$ . Neste caso o problema é do tipo estacionário.

Assim, a análise se torna bastante simplificada, uma vez que o tempo pode ser eliminado, ou seja, o problema de valor inicial de contorno é reduzido a um problema de valor de contorno apenas, cuja equação de movimento se apresenta no domínio da frequência do carregamento harmônico aplicado ao problema.

A análise de um determinado problema físico através do domínio da frequência leva a resultados mais satisfatórios, se comparada à análise no domínio do tempo, nos casos em que os parâmetros contidos na equação de movimento, como por exemplo, o amortecimento e a rigidez, sejam dependentes da frequência. Além disto, determinando-se a frequência natural da estrutura, a análise no domínio da frequência possibilita um acompanhamento do comportamento da solução do problema físico, de modo a evitar que a frequência do carregamento periódico se aproxime perigosamente da frequência natural da estrutura (Beskos e Manolis, 1988; Clough, 1993 e Banerjee, 1994).

Sejam então as grandezas físicas envolvidas no problema elastodinâmico representadas de forma harmônica no tempo:

$$u(x, t) = U(x, \omega)e^{-i\omega t}, \quad (3.1)$$

$$b(x, t) = B(x, \omega)e^{-i\omega t}, \quad (3.2)$$

$$p(x, t) = \sigma_{ij}(x)n_j(x) = T_{ij}(x, \omega)e^{-i\omega t}n_j(x) = P(x, \omega)e^{-i\omega t}, \quad (3.3)$$

sendo  $B(x, \omega)$ ,  $U(x, \omega)$ ,  $P(x, \omega)$  grandezas complexas em função de uma determinada frequência angular  $\omega$  (rad./s).

Substituindo as equações 3.1, 3.2 e 3.3 na equação de Navier, pode-se reescrevê-la, da seguinte forma:

$$(c_1^2 - c_2^2)U_{i,ij} + c_2^2 U_{j,ii} + \frac{B_j}{\rho} = \ddot{U}_j, \quad (3.4)$$

Como as condições iniciais não interferem na resposta estacionária do problema, obtêm-se as seguintes condições de contorno freqüente dependentes:

$$\begin{aligned} U(x, \omega) &= \bar{U}(x, \omega) & , x \in \Gamma_1 \\ P(x, \omega) &= \bar{P}(x, \omega) & , x \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.2. Formulação Integral do M.E.C.

Partindo-se da equação ou do sistema de equações diferenciais parciais que governam um determinado problema físico e mediante a aplicação de algumas relações matemáticas, é possível obter a representação integral de contorno deste problema (Brebbia *et al*, 1984). Uma alternativa para isso é via a expressão geral dos resíduos ponderados. Outra alternativa é via a aplicação direta de relações de reciprocidade que envolve dois estados-solução do problema em questão, na região de análise (Banerjee, 1994). Note que, partindo-se da expressão geral de resíduos ponderados, faz-se necessário usar o teorema da divergência para a obtenção da formulação integral de contorno. Procedimento análogo também se adota para a derivação de relações de reciprocidade. Em problemas elastodinâmicos, descritos pela equação de Navier, usa-se o teorema de Graffi (equivalente ao teorema de Betti-Rayleigh para o caso elastostático).

Tem-se, desta forma, para problemas elastodinâmicos, analisados no domínio do tempo, a seguinte representação integral de contorno (Eringen, 1975; Araújo, 1994), obtida considerando-se soluções fundamentais tempo-dependentes como um dos estados elastodinâmicos no Teorema de Graffi:

$$c_{ik}(\xi)u_i(\xi,t) + \int_{\Gamma_0}^t p_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,t,\tau)u_i(\mathbf{x},\tau)d\tau d\Gamma = \int_{\Gamma_0}^t u_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,t,\tau)p_i(\mathbf{x},\tau)d\tau d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \int_0^t u_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,t,\tau)b_i(\mathbf{x},\tau)d\tau d\Omega + \rho \int_{\Omega} \left[ v_{0i}(\mathbf{x})u_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,t,0) + u_{0i}(\mathbf{x})\dot{u}_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,t,0) \right] d\Omega \quad (3.6)$$

com,  $i$  e  $k$  variando de 1 a 3.

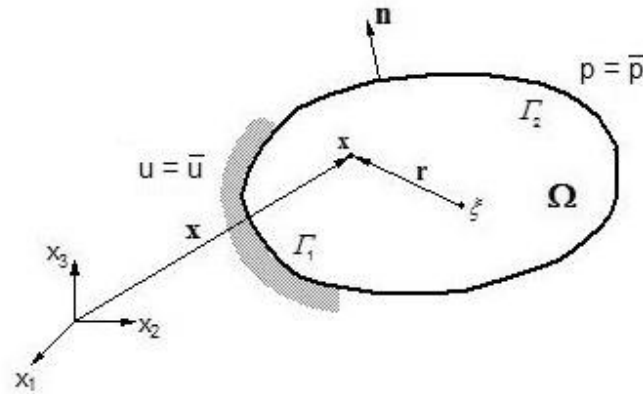


Figura 3.1 – Representação do problema de valor de contorno.

Na expressão 3.6,  $\mathbf{x}$  e  $\xi$  são, respectivamente, o ponto de campo e o ponto fonte,  $c_{ik}(\xi)$  é o termo livre da integral, definido por:

$$c_{ik}(\xi) = \delta_{ik} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} {}^{st}p_{ik}^*(\mathbf{x},\xi)d\Gamma_\varepsilon \quad , \quad (3.7)$$

onde  ${}^{st}p_{ik}^*$  são as forças fundamentais de contorno para o caso elastostático e  $\varepsilon$  é o raio de uma superfície esférica que circunda o ponto singular (veja figura 3.02).

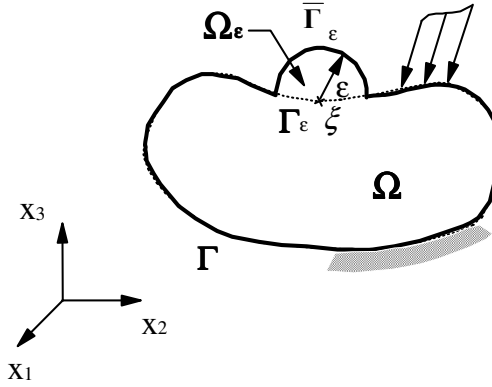


Figura 3.02 – Ponto singular no contorno cercado por parte de uma superfície esférica

O termo, da equação 3.6,  $b_i(\mathbf{x}, \tau)$  é o vetor das forças de volume,  $u_i(\mathbf{x}, \tau)$  e  $p_i(\mathbf{x}, \tau)$  são vetores contendo as variáveis de contorno, e,  $u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)$  e  $p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)$  são as soluções fundamentais do problema elastodinâmico tempo-dependente.

A representação integral de contorno para o caso elastodinâmico, no domínio da frequência, pode ser obtida pela consideração de condições iniciais nulas e das expressões harmônicas dadas pelas equações 3.1, 3.2 e 3.3. Desta forma, a equação 3.6 é reescrita, sendo

$$c_{ik}(\xi)U_i(\xi, \omega)e^{-i\omega\alpha} + \int_0^t \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)U_i(\mathbf{x}, \tau)e^{-i\omega\alpha} d\tau d\Gamma(\mathbf{x}) =$$

$$\int_0^t \int_{\Gamma} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)P_i(\mathbf{x}, \tau)e^{-i\omega\alpha} d\tau d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_0^t \int_{\Omega} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)B_i(\mathbf{x}, \tau)e^{-i\omega\alpha} d\tau d\Omega(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

Definindo-se

$$\bar{U}_{ik}^* = \int_0^t u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)e^{-i\omega\alpha} d\tau$$

$$\bar{P}_{ik}^* = \int_0^t p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)e^{-i\omega\alpha} d\tau \quad (3.9)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned}
c_{ik}(\xi)U_i(\xi,\omega)e^{-i\omega\xi} + \int_{\Gamma} \overline{P}_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,\omega)U_i(\mathbf{x},\omega)d\Gamma(\mathbf{x}) = \\
\int_{\Gamma} \overline{U}_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,\omega)P_i(\mathbf{x},\omega)d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \overline{U}_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,\omega)B_i(\mathbf{x},\omega)d\Omega(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde se sabe que:

$$\begin{aligned}
\overline{U}_{ik}^* &= e^{-i\omega\xi}U_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,\omega) \\
\overline{P}_{ik}^* &= e^{-i\omega\xi}P_{ik}^*(\mathbf{x},\xi,\omega) \quad ,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

sendo  $P_{ik}^*$  e  $U_{ik}^*$  as soluções fundamentais para o caso elastodinâmico tridimensional (Eringen, 1975), definidas como

$$\begin{aligned}
U_{ik}^* = \frac{1}{4\pi\rho r} \left\{ (3r_{,i}r_{,k} - \delta_{ik}) \times \left[ \frac{1}{r^2\omega^2} \left( e^{\frac{i\omega r}{c_2}} - e^{\frac{i\omega r}{c_1}} \right) - \frac{i}{r\omega} \left( \frac{1}{c_2} e^{\frac{i\omega r}{c_2}} - \frac{1}{c_1} e^{\frac{i\omega r}{c_1}} \right) \right] + \right. \\
\left. r_{,i}r_{,k} \left( \frac{1}{c_1^2} e^{\frac{i\omega r}{c_1}} - \frac{1}{c_2^2} e^{\frac{i\omega r}{c_2}} \right) + \delta_{ik} \left( \frac{1}{c_2^2} e^{\frac{i\omega r}{c_2}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

e

$$\begin{aligned}
P_{ik}^* = & \frac{n_m}{4\pi r^2} \left\{ -6c_2^2 (5r_{,i}r_{,k}r_{,m} - \delta_{ik}r_{,m} - \delta_{km}r_{,j} - \delta_{mi}r_{,k}) \cdot \right. \\
& \left[ \frac{1}{r^2\omega^2} \left( e^{\frac{i\omega r}{c_2}} - e^{\frac{i\omega r}{c_1}} \right) - \frac{i}{r\omega} \left( \frac{1}{c_2} e^{\frac{i\omega r}{c_2}} - \frac{1}{c_1} e^{\frac{i\omega r}{c_1}} \right) \right] + \\
& 2(6r_{,i}r_{,k}r_{,m} - \delta_{ik}r_{,m} - \delta_{km}r_{,j} - \delta_{mi}r_{,k}) \left( e^{\frac{i\omega r}{c_2}} - \frac{c_2^3}{c_1^3} e^{\frac{i\omega r}{c_1}} \right) - \\
& \frac{2i\omega}{c_2} r_{,i}r_{,k}r_{,m} \left( e^{\frac{i\omega r}{c_2}} - \frac{c_2^3}{c_1^3} e^{\frac{i\omega r}{c_1}} \right) - r_{,m}\delta_{im} \left( 1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \left( 1 - i\omega \frac{r}{c_1} \right) e^{\frac{i\omega r}{c_1}} - \\
& \left. (\delta_{ik}r_{,m} + \delta_{km}r_{,j}) \left( 1 - i\omega \frac{r}{c_2} \right) e^{\frac{i\omega r}{c_2}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nas equações 3.12 e 3.13,  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.  $r$  é o módulo do vetor raio,  $r_i$  e  $n_i$  são, respectivamente, as componentes na direção  $i$  do vetor raio e do vetor normal unitário ao contorno que aponta para fora do domínio.  $c_1$  e  $c_2$  são, respectivamente, conforme o capítulo 02, as velocidades das ondas de pressão e de cisalhamento no domínio analisado e  $\delta_{ik}$  é o delta de Kronecker.

Considerando agora as relações da equação 3.11, a equação integral de contorno para problemas no domínio da frequência pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
c_{ik}(\xi)U_i(\xi, \omega) + \int_{\Gamma} P_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega)U_i(\mathbf{x}, \omega)d\Gamma(\mathbf{x}) = \\
\int_{\Gamma} U_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega)P_i(\mathbf{x}, \omega)d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega)B_i(\mathbf{x}, \omega)d\Omega(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Os termos  $c_{ik}(\xi)$  são calculados conforme a equação 3.07. A avaliação da resposta no contorno, desta maneira, é realizada mediante a resolução das equações integrais, equação 3.14, sob a consideração das condições de contorno gerais (equação 3.5).

### 3.2.1. Cálculo da resposta em Pontos Internos

Conhecida a resposta no contorno do domínio de definição do problema, pode-se, com esses valores, obter a resposta em qualquer ponto  $\xi$ , pertencente ao domínio de definição do mesmo. Neste caso,  $c_{ik}(\xi) = \delta_{ik}$ . Portanto, a expressão integral de contorno para cálculo dos deslocamentos destes pontos internos será dada por

$$U_i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} U_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) P_i(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} P_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) U_i(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) B_i(\mathbf{x}, \omega) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

O estado de tensão no ponto  $\xi$  pode ser obtido derivando-se esta equação em relação às suas coordenadas cartesianas, de modo a se obter o tensor de deformações. Assim, via aplicação da lei de Hooke, obtém-se:

$$\sigma_{ij}(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} U_{lij}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) P_l(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{lij}^*(\mathbf{x}, \xi) U_l(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{lij}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) B_l(\mathbf{x}, \omega) d\Omega \quad (3.16)$$

### 3.2.2. Cálculo das Tensões no contorno

Existem várias maneiras de se determinar as tensões no contorno, uma delas é utilizando a formulação para determinação das tensões nos pontos internos, via integração numérica da equação 3.14. Porém, para a definição da tensão em pontos fontes próximos do contorno, a forte *quasi-singularidade* dos núcleos fundamentais demandam cuidados especiais. Em virtude dessa barreira, outra estratégia pode ser adotada, a qual, de posse da solução de contorno, aplica-se tanto a problemas elastostáticos como elastodinâmicos.



Inicialmente, define-se o sistema de coordenadas locais do elemento. Adotando-se a componente  $\bar{x}_3$  do elemento como sendo o vetor normal ao próprio elemento (figura 3.03), tem-se:

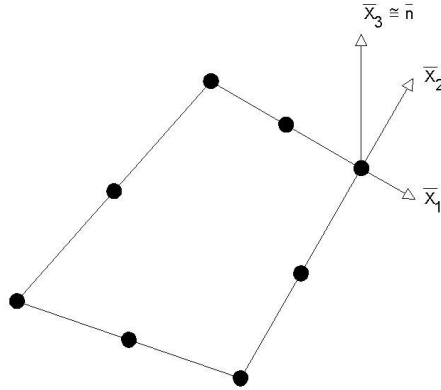


Figura 3.03 – Sistema de coordenada local de um elemento genérico no nó a ser determinado as tensões no contorno

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3\end{aligned}\tag{3.17}$$

Desta maneira, a equação 2.01 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22} + \bar{\epsilon}_{33}) + 2G\bar{\epsilon}_{11}\tag{3.18}$$

Fazendo uso da equação 2.05 e simplificando o denominador na equação 3.18, chega-se ao seguinte resultado:

$$\bar{\sigma}_{11} = 2G \left( 1 + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \right) \bar{\epsilon}_{11} + \frac{2GE}{(1-2\nu)} \bar{\epsilon}_{22} + \frac{2GE}{(1-2\nu)} \bar{\epsilon}_{33}\tag{3.19}$$

$$\bar{\sigma}_{33} = 2G \left( 1 + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \right) \bar{\epsilon}_{33} + \frac{2GE}{(1-2\nu)} \bar{\epsilon}_{22} + \frac{2GE}{(1-2\nu)} \bar{\epsilon}_{11} \quad (3.20)$$

Com a equação 3.20 há a possibilidade de se isolar o termo  $\bar{\epsilon}_{33}$ , determinando assim seu valor:

$$\bar{\epsilon}_{33} = \left[ \bar{\sigma}_{33} - \frac{2GE}{(1-2\nu)} \bar{\epsilon}_{11} - \frac{2GE}{(1-2\nu)} \bar{\epsilon}_{11} \right] - \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} . \quad (3.21)$$

Substituindo a equação 3.21 na equação 3.19, colocando em seguida o termo  $\frac{1}{(1-\nu)}$  em evidência e realizando simplificações algébricas, os valores de  $\bar{\sigma}_{11}$  e  $\bar{\sigma}_{22}$  ficam definidos por:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{(1-\nu)} \left[ \nu \bar{\sigma}_{33} + 2G(\bar{\epsilon}_{22} + \nu \bar{\epsilon}_{11}) \right] \quad (3.22)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{(1-\nu)} \left[ \nu \bar{\sigma}_{33} + 2G(\bar{\epsilon}_{11} + \nu \bar{\epsilon}_{22}) \right] \quad (3.23)$$

Em virtude do Delta de Kronecker, o valor de  $\bar{\sigma}_{12}$  é:

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = 2G\bar{\epsilon}_{12} \quad (3.24)$$

Assim, através das equações (3.17), (3.22), (3.23) e (3.24) determina-se o estado de tensões no nó de contorno em coordenadas locais. Por ser usual a representação do estado de tensão em coordenadas globais, o mesmo é transformado, via rotação do tensor de tensões.

Para a determinação das tensões nos nós do contorno é necessária a definição das componentes da deformação naquele nó em função de um elemento associado. Para isso considera-se a relação deformação-deslocamento:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \right) \quad (3.25)$$

Sabendo-se que a aproximação dos deslocamentos sobre um certo elemento de contorno é dada por

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_{q=1}^{nnoel} h_q(r, s) \cdot \bar{u}_{qi} \quad , \quad (3.26)$$

pode-se então, agora, obter as derivadas cartesianas das funções de deslocamentos, as quais substituídas na relação 3.25, fornecerão as deformações necessárias para determinação das expressões de tensões. Nas relações acima  $\bar{u}_{qi}$  é a componente do vetor deslocamento do q-ésimo nó de algum elemento segundo o eixo  $\bar{x}_i$ ,  $nnoel$  é o número de nós do elemento de contorno em análise, e  $h_q(r, s)$  é o valor das funções de forma do elemento nos nós de contorno. Obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{ndime} \lambda_{ik} \left[ \sum_{q=1}^{nnoel} \frac{\partial h_q(r, s)}{\partial r} \cdot u_{kq} \right] \cdot \left[ \sum_{m=1}^{ndime} \left[ \sum_{q=1}^{nnoel} \frac{\partial h_q(r, s)}{\partial r} \cdot x_{mq} \right] \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

De forma análoga define-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} = \sum_{k=1}^{ndime} \lambda_{ik} \left[ \sum_{q=1}^{nnoel} \frac{\partial h_q(r, s)}{\partial s} \cdot u_{kq} \right] \cdot \left[ \sum_{m=1}^{ndime} \left[ \sum_{q=1}^{nnoel} \frac{\partial h_q(r, s)}{\partial s} \cdot x_{mq} \right] \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

Com as equações 3.27 e 3.2, determinam-se as deformações e conseqüentemente as tensões nos nós do contorno.

### 3.2.2.1. Aplicações

Diversos problemas foram tridimensionalmente analisados para validar a implementação da estratégia de cálculo de tensões no contorno. Apenas problemas estáticos são apresentados nesta seção, o que, na verdade, não invalida a verificação da estratégia para problemas elastodinâmicos, dado que essa é exatamente a mesma para análises estáticas e dinâmicas.

#### Problema 1

O primeiro problema analisado foi o de uma barra quadrada, engastada livre, com a ação de compressão unitária uniforme aplicada na extremidade livre (figura 3.04), por este ser um exemplo clássico no que diz respeito à determinação de tensões.

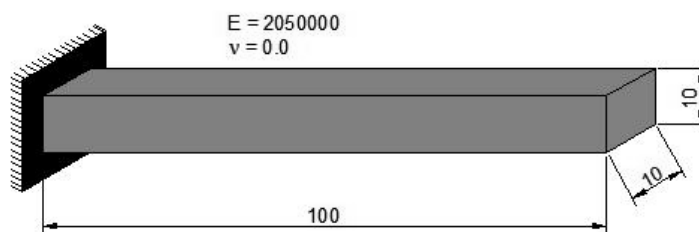


Figura 3.04 – Viga engastada livre com pressão uniforme aplicada na extremidade livre

O modelo utilizado poderia ser bem simples, conforme indicado na figura 3.04 (unidades em kgf e em metros), porém, no intuito de verificar as implementações da estratégia de acoplamento EC-EC, fez-se uma malha com 4 subregiões homogêneas. Variando-se as malhas contidas nessas regiões. A figura 3.05 ilustra uma dessas malhas.

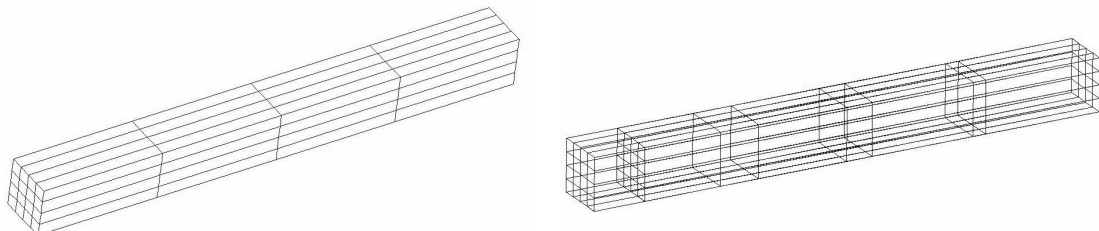


Figura 3.05 – Malha gerada pelo gerador de malhas do NAESY e sua forma deformada

De maneira a validar os resultados, o mesmo problema foi analisado com o ANSYS 9.0. Para fins de comparação, realizou-se um refinamento progressivo da malha de elementos de contorno, sendo os resultados apresentados na tabela 3.01.

Nó 01 - elemento 01 - (0,0,0)			
Número de Elementos	Elemento Q4	Elemento Q8	Analítica
6	-0,99551823	-0,99209904	-1,00000
10	-1,000229	-0,99627963	-1,00000
18	-0,99999769	-1,0000874	-1,00000
22	-1,0000001	-1,0000127	-1,00000
24	-0,99944265	-1,0062397	-1,00000
42	-1	-0,99999997	-1,00000
54	-0,99969498	-1,0057527	-1,00000
96	-0,99979421	-1,0046997	-1,00000
216	-0,99988514	-1,0026448	-1,00000
297	-0,9999061	-1,0023433	-1,00000

Tabela 3.01 – Comparação do resultado em função do refinamento da malha

## Problema 2

O segundo estudo é de uma viga bi-apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída (figura 3.06).

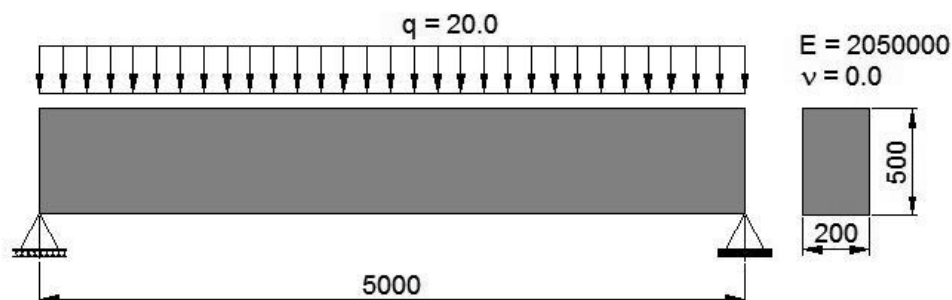


Figura 3.06 –Modelo utilizado no calculo da viga bi apoiada ( unidades em kgf e em metros)

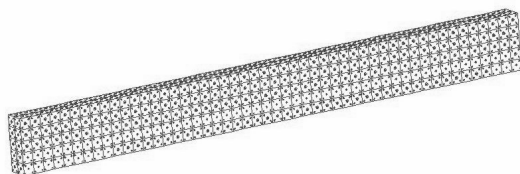


Figura 3.07 –Malha gerada pelo gerador de malhas do NAESY

Neste caso, não houve um refinamento contínuo da malha de elementos de contorno. Para comparação, analisou-se o mesmo problema com o ANSYS 9.0, devido à sua disponibilidade no LAMEC/UFOP. Os resultados, já esperados, de deslocamento e de tensão no meio do vão estão na tabela 3.02.

<b>Nó no meio do vão</b>		
<b>Fonte</b>	<b>Deslocamento (mm)</b>	<b>Tensão (kgf/mm<sup>2</sup>)</b>
NAESY (presente Trabalho)	4,98	947,90102
ANSYS	4,99	1068,2

Tabela 3.02 – Comparação resultados viga bi-apoiada

### Problema 3

O ultimo problema considerado, encontrado com muita freqüência em torres de extração off-shore de petróleo, trata da análise de tensão em *risers*, tubos condutores de petróleo da fonte de extração às torres, submetidos à pressão interna (figura 3.08).

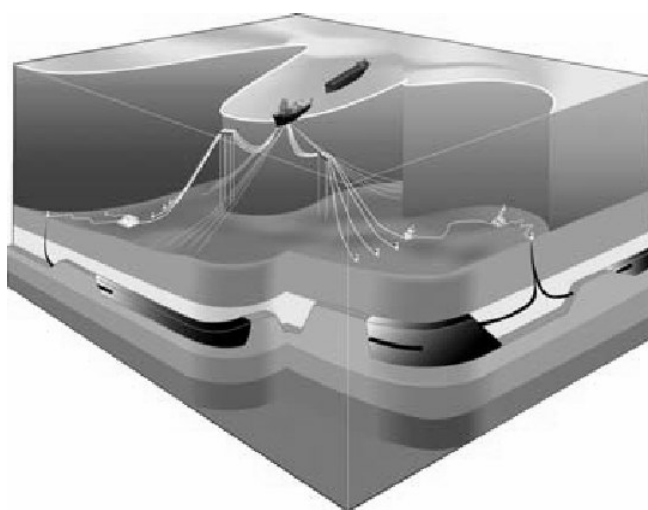


Figura 3.08 – Tubos de Extração de Petróleo.

Para esse tipo de problema a determinação das componentes da pressão em um ponto qualquer do cilindro, pode ser obtida tratando o problema por simetria, ou seja, tomando como base o esquema da figura 3.09.

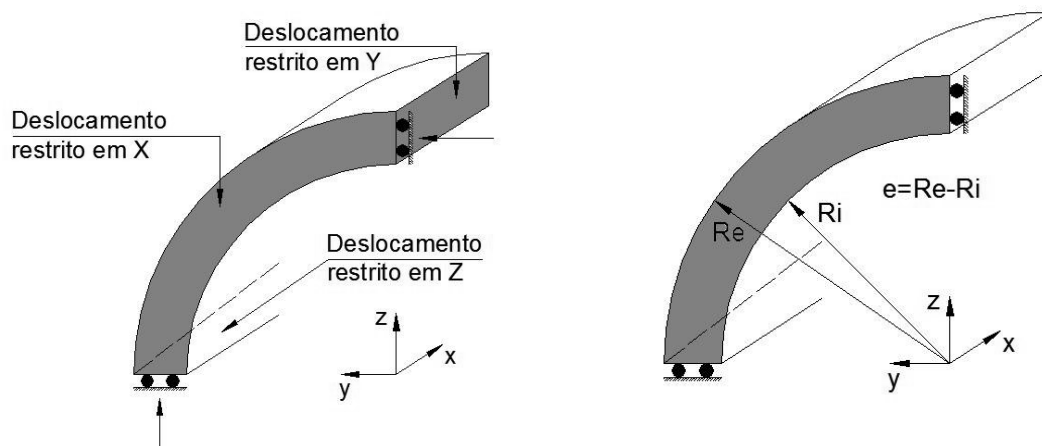


Figura 3.09 – Cilindro submetido à pressão interna

Desta forma foram elaborados 03 tipos de problemas, sendo o raio externo mantido como 1m e a espessura da parede do duto variando de 100mm 50mm e 25mm. Foram utilizadas malhas com elementos de contorno quadrangulares de 8 nós. As tabelas 3.03, 3.04 e 3.05 comparam os resultados com respostas analíticas deste tipo de problema. Para o nó de coordenada (0,100,0) dado pelo sistema global definido em 3.09, tem-se:

<b>No 01 - elemento 01 - (0,100,0)</b>			
<b>El. Q8</b>	<b>Naesy</b>	<b>Analítica</b>	<b>Erro (%)</b>
38	8,50E-03	0,00853	0,29949
74	8,57E-03	0,00853	0,45606
362	8,53E-03	0,00853	0,06610

Tabela 3.03 – Cilindro  $e=100\text{mm}$

<b>No 01 - elemento 01 - (0,100,0)</b>			
<b>El. Q8</b>	<b>Naesy</b>	<b>Analítica</b>	<b>Erro(%)</b>
38	1,83E+04	18513,00000	1,16720
74	1,81E+04	18513,00000	2,16053
362	1,85E+04	18513,00000	0,08220

Tabela 3.04 – Cilindro  $e=50\text{mm}$

<b>No 01 - elemento 01 - (0,100,0)</b>			
<b>El. Q8</b>	<b>Naesy</b>	<b>Analítica</b>	<b>Erro(%)</b>
38	4,15E+04	38506,33000	7,22312
152	3,79E+04	38506,33000	1,51703
232	3,72E+04	38506,33000	3,52838
372	3,69E+04	38507,33000	4,28005
544	3,66E+04	38508,33000	5,25030

*Tabela 3.05 – Cilindro  $e=25mm$*

Todos os exemplos foram tratados com um processo de integração especial que se baseia numa transformação de coordenadas triangulares polares, que será comentado mais adiante nesse capítulo. O *solver* utilizado foi o J-BICG, que trata de problemas de acoplamentos sem a montagem do sistema acoplado resultante, comentado no Capítulo 04.

Os resultados encontrados foram satisfatórios. No terceiro problema, porém, pelo elevado valor de esbeltez da parede do duto, geram-se integrais *quasi-singulares* e fracamente singulares, que apesar de serem tratadas via especiais de integração, apresentam um esperado aumento do erro da resposta.

### **3.3. Discretização Espacial da Equação Integral de Contorno**

Para a obtenção do sistema de equações algébricas faz-se necessária a discretização do contorno em uma série de elementos finitos de contorno, nos quais as variáveis de campo e a geometria são interpoladas a partir de seus valores nodais. Aqui, a discretização é realizada utilizando-se elementos isoparamétricos, onde as funções de forma, necessárias à interpolação das variáveis de campo e da geometria no interior do elemento, são as mesmas. As Figuras 3.10 a 3.13 apresentam os elementos de contorno contínuos disponíveis na biblioteca de elementos do algoritmo de acoplamento EC-EC (Dors, 2002).



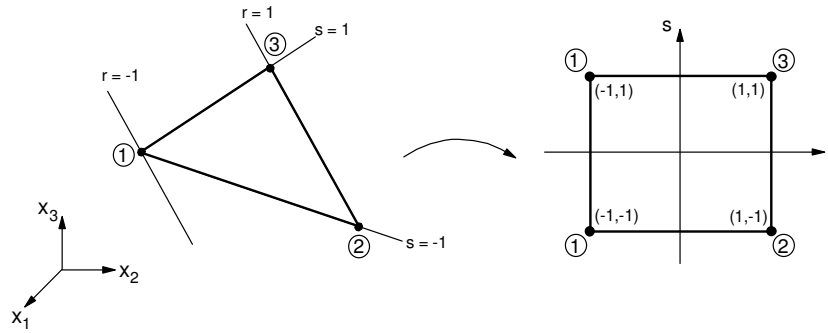


Figura 3.10 - elemento contínuo triangular de 3 nós – q3\_3dbe

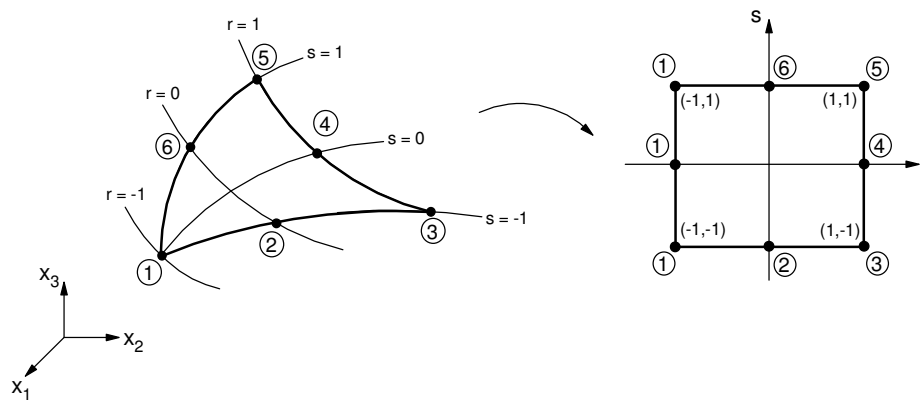


Figura 3.11 - elemento contínuo triangular de 6 nós – q6\_3dbe

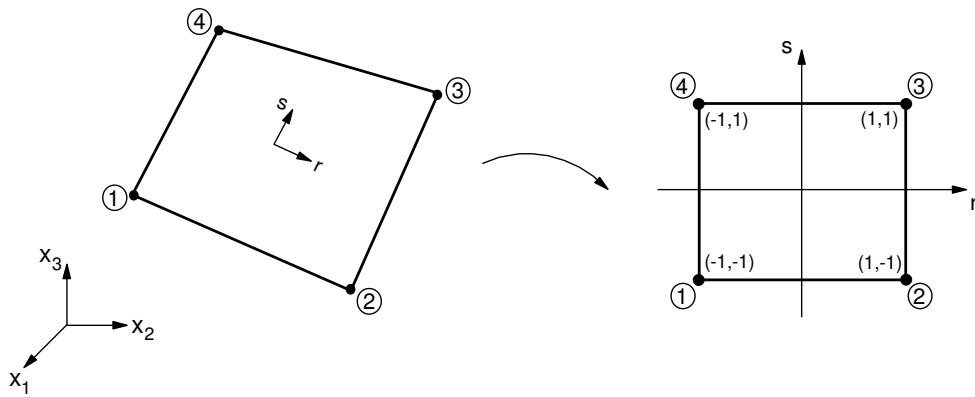


Figura 3.12 - elemento quadrangular de 4 nós – q4\_3dbe

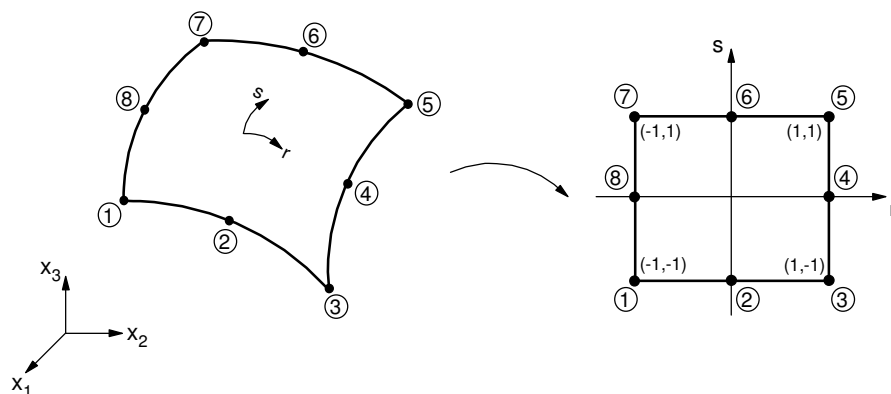


Figura 3.13 - elemento quadrangular de 8 nós – q8\_3dbe

Em Silva, 2005, acrescentou-se a esta biblioteca os elementos descontínuos mostrados nas figuras 3.14 a 3.17.

Estes elementos são gerados a partir dos elementos de contorno contínuos através do deslocamento de seus nós, no espaço de coordenadas naturais  $(r, s)$ , de um valor  $d$ , (Dawson, 1982). Nestes elementos as variáveis de campo ( $\mathbf{U}$  ou  $\mathbf{P}$ ) são interpoladas utilizando-se as funções de forma obtidas para os nós deslocados (nós funcionais), enquanto a geometria do contorno é avaliada a partir das funções de forma do elemento contínuo (associadas aos nós não deslocados).

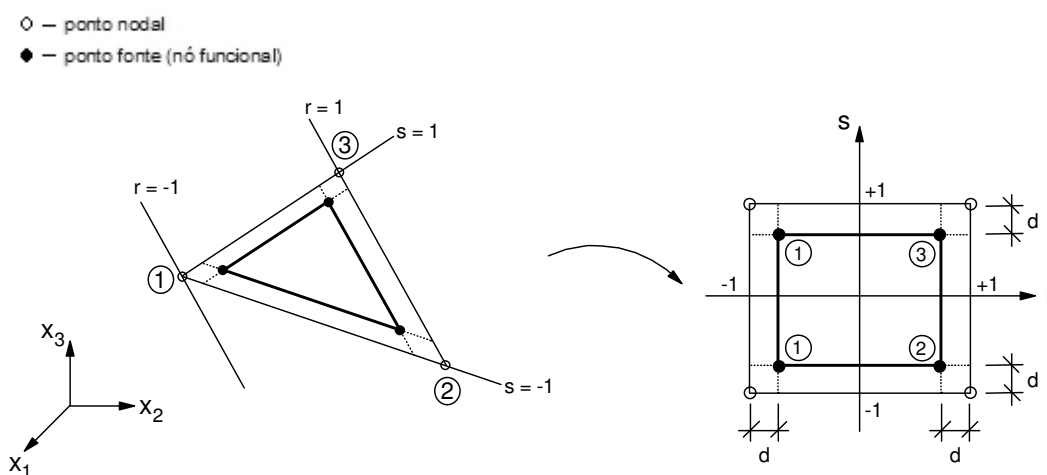


Figura 3.14 - Elemento descontínuo triangular de 3 nós

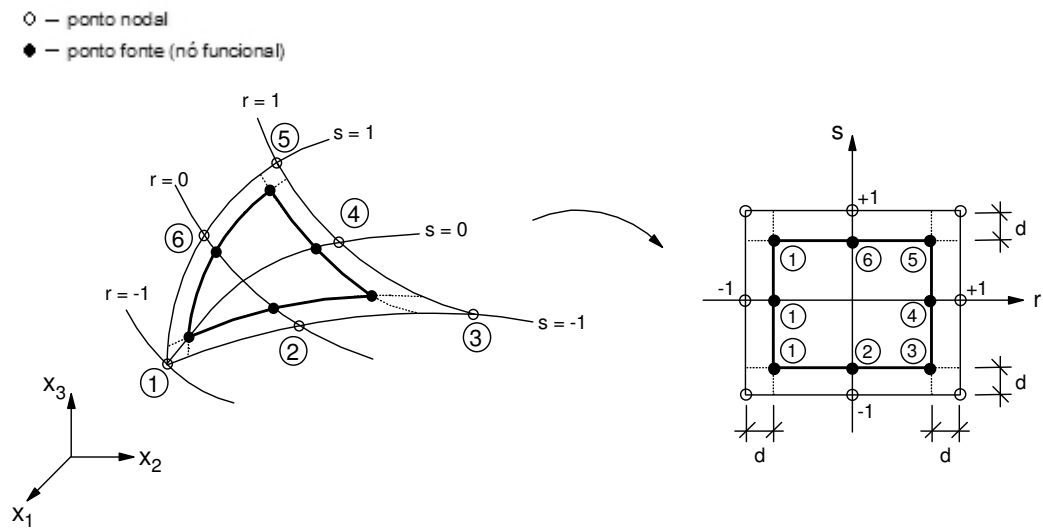


Figura 3.15 - Elemento descontínuo triangular de 6 nós

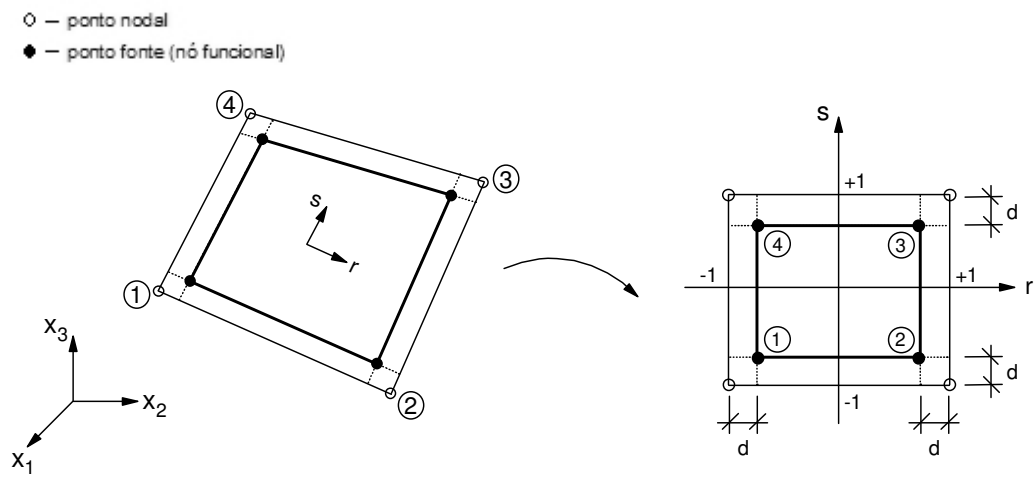


Figura 3.16 - Elemento descontínuo quadrangular de 4 nós

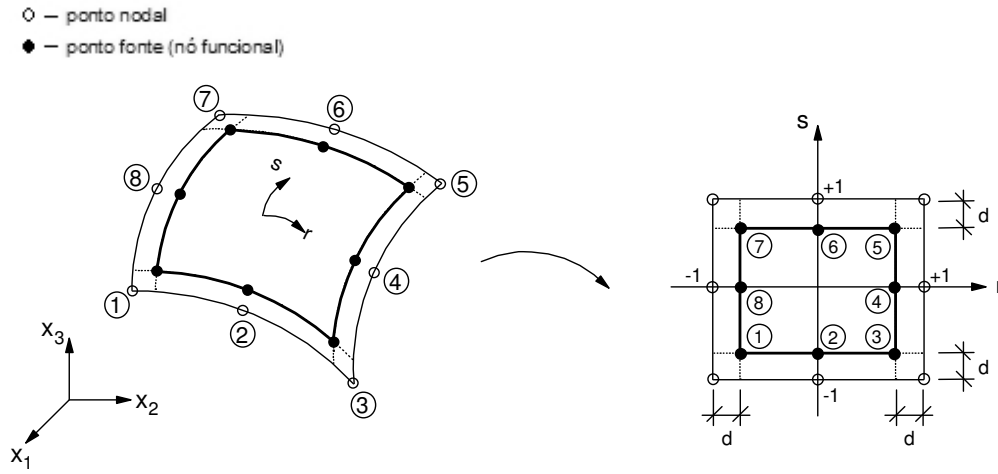


Figura 3.17 - Elemento descontínuo quadrangular de 8 nós

Assim sendo, as variáveis de campo e a geometria do problema podem ser genericamente representadas em função de seus valores nodais por,

$$x_i(r, s) = \sum_{q=1}^{nnoel} h_q(r, s) x_{iq} \quad , \quad (3.29)$$

$$U_i[\mathbf{x}(r, s), \omega] = \begin{cases} \sum_{q=1}^{nnoel} h_q(r, s) U_{iq} & \text{para elemento de contorno contínuo} \\ \sum_{q=1}^{nnoel} h_q^d(r, s) U_{iq} & \text{para elemento de contorno descontínuo} \end{cases} \quad (3.30)$$

e

$$P_i[\mathbf{x}(r, s), \omega] = \begin{cases} \sum_{q=1}^{nnoel} h_q(r, s) P_{iq} & \text{para elemento de contorno contínuo} \\ \sum_{q=1}^{nnoel} h_q^d(r, s) P_{iq} & \text{para elemento de contorno descontínuo} \end{cases} \quad , \quad (3.31)$$

com,  $i = 1, 2, 3$  e  $nnoel$  igual ao número de nós do elemento de contorno.

Nas expressões 3.29 a 3.31,  $x_i(r, s)$ ,  $U_i[(r, s), \omega]$  e  $P_i[(r, s), \omega]$  são, respectivamente, as coordenadas cartesianas, componentes de deslocamento e força no interior do elemento, e  $x_{iq}$ ,  $U_{iq}$  e  $P_{iq}$  são seus valores nodais;  $h_q(r, s)$  e  $h_q^d(r, s)$  são,

respectivamente, a  $q$ -ésima função de forma e a  $q$ -ésima função de forma modificada do elemento, definidas em função das coordenadas naturais  $(r, s)$ .

As funções de forma,  $h_q(r, s)$ , para os diversos tipos de elemento contínuos são apresentadas nas tabelas 3.06 a 3.07

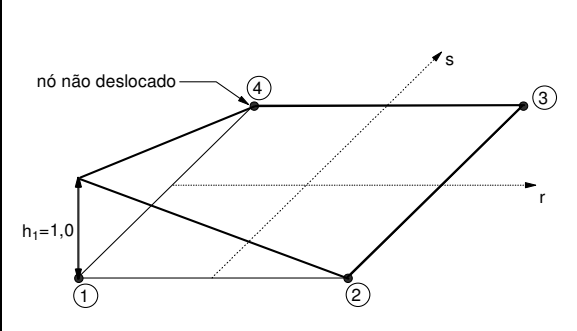
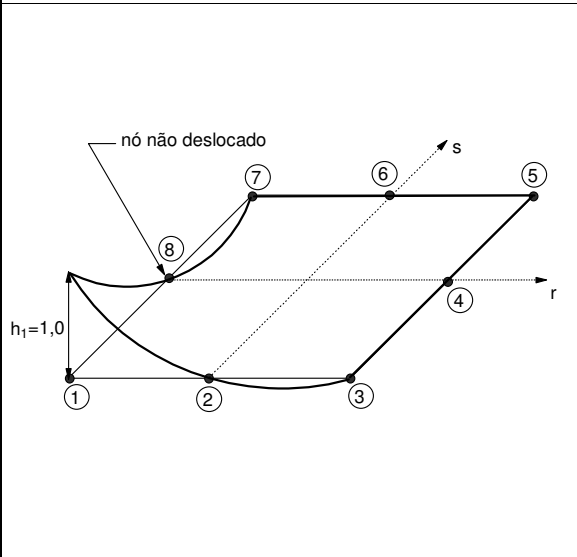
	<p><b>Funções de Forma Elemento de 04 nós</b></p> $h_1(r, s) = 0,25(1 - r)(1 - s)$ $h_2(r, s) = 0,25(1 + r)(1 - s)$ $h_3(r, s) = 0,25(1 + r)(1 + s)$ $h_4(r, s) = 0,25(1 - r)(1 + s)$
	<p><b>Funções de Forma Elemento de 08 nós</b></p> $h_1(r, s) = 0,25(1 - r)(s - 1)(r + s + 1)$ $h_2(r, s) = 0,50(1 - s)(1 - r^2)$ $h_3(r, s) = 0,25(1 + r)(s - 1)(s - r + 1)$ $h_4(r, s) = 0,50(1 + r)(1 - s^2)$ $h_5(r, s) = 0,25(1 + r)(1 + s)(r + s - 1)$ $h_6(r, s) = 0,50(1 + s)(1 - r^2)$ $h_7(r, s) = 0,25(r - 1)(s + 1)(r - s + 1)$ $h_8(r, s) = 0,50(1 - r)(1 - s^2)$

Tabela 3.06 – Funções de Forma dos elementos contínuos quadrangulares

Os elementos triangulares são gerados a partir dos elementos quadrangulares, colapsando alguns nós dos mesmos. No caso do elemento de 3 nós, por exemplo, colapsaram-se os nós 1 e 4 do elemento quadrangular de 4 nós, e no caso do elemento triangular de 6 nós, colapsaram-se os nós 1, 7 e 8 do elemento quadrangular de 8 nós. Portanto, as funções de forma para os elementos triangulares podem ser escritas em termos das funções de forma dos elementos quadrangulares,  $h'_q(r, s)$ . Tem-se então para o elemento triangular de 3 nós,

$$\begin{aligned}
h_1(r, s) &= h'_1(r, s) + h'_4(r, s) \\
h_2(r, s) &= h'_2(r, s) \\
h_3(r, s) &= h'_3(r, s)
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

e para o elemento triangular de 6 nós,

$$\begin{aligned}
h_1(r, s) &= h'_1(r, s) + h'_7(r, s) + h'_8(r, s) \\
h_2(r, s) &= h'_2(r, s) \\
h_3(r, s) &= h'_3(r, s) \\
h_4(r, s) &= h'_4(r, s) \\
h_5(r, s) &= h'_5(r, s) \\
h_6(r, s) &= h'_6(r, s)
\end{aligned}
\tag{3.41}$$

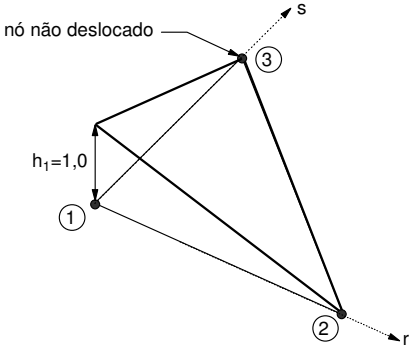
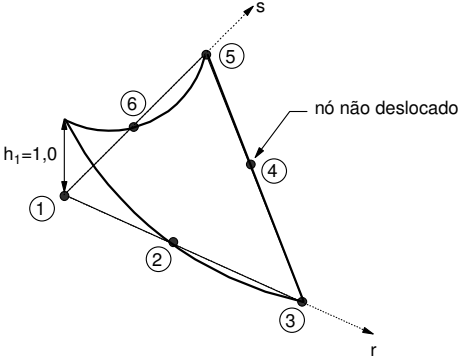
	<p>Funções de Forma Elemento de 03 nós</p> $ \begin{aligned} h_1(r, s) &= 0,50(1 - r) \\ h_2(r, s) &= 0,25(1 + r)(1 - s) \\ h_3(r, s) &= 0,25(1 + r)(1 + s) \end{aligned} $
	<p>Funções de Forma Elemento de 06 nós</p> $ \begin{aligned} h_1(r, s) &= 0,50r(r - 1) \\ h_2(r, s) &= 0,50(1 - s)(1 - r^2) \\ h_3(r, s) &= 0,25(1 + r)(s - 1)(s - r + 1) \\ h_4(r, s) &= 0,50(1 + r)(1 - s^2) \\ h_5(r, s) &= 0,25(1 + r)(1 + s)(r + s - 1) \\ h_6(r, s) &= 0,50(1 + s)(1 - r^2) \end{aligned} $

Tabela 3.07 – Funções de Forma dos elementos contínuos triangulares

As funções de forma modificadas,  $h_q^d(r, s)$ , para os diversos tipos de elementos descontínuos são dadas de acordo com as tabelas 3.09 e 3.10.

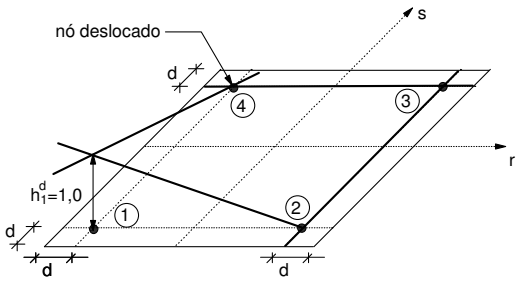
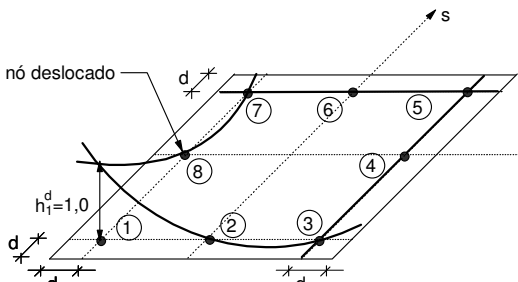
	<p style="text-align: center;"><b>Funções de Forma Elemento de 04 nós</b></p> $h_1^d(r, s) = \frac{(r - r_2)(s - r_3)}{(r_1 - r_2)(s_1 - s_3)}$ $h_2^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_3)}{(r_2 - r_1)(s_2 - s_3)}$ $h_3^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_1)}{(r_3 - r_1)(s_3 - s_1)}$ $h_4^d(r, s) = \frac{(r - r_2)(s - s_1)}{(r_4 - r_2)(s_4 - s_1)}$
	<p style="text-align: center;"><b>Funções de Forma Elemento de 08 nós</b></p> $h_2^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(r - r_3)(s - s_5)}{r_1 r_3 (s_2 - s_5)}$ $h_4^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_3)(s - s_5)}{s_3 s_5 (r_4 - r_1)}$ $h_6^d(r, s) = \frac{(s - s_1)(r - r_5)(r - r_7)}{r_5 r_7 (s_6 - s_1)}$ $h_8^d(r, s) = \frac{(r - r_3)(s - s_1)(s - s_7)}{s_1 s_7 (r_8 - r_3)}$ $h_1^d(r, s) = \frac{(r - r_3)(s - s_5)}{(r_1 - r_3)(s_1 - s_5)} - \frac{1}{2} [h_2^d(r, s) + h_8^d(r, s)]$ $h_3^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_7)}{(r_3 - r_1)(s_3 - s_7)} - \frac{1}{2} [h_2^d(r, s) + h_4^d(r, s)]$ $h_5^d(r, s) = \frac{(r - r_7)(s - s_1)}{(r_5 - r_7)(s_5 - s_1)} - \frac{1}{2} [h_4^d(r, s) + h_6^d(r, s)]$ $h_7^d(r, s) = \frac{(r - r_5)(s - s_3)}{(r_7 - r_5)(s_7 - s_3)} - \frac{1}{2} [h_6^d(r, s) + h_8^d(r, s)]$

Tabela 3.08 – Funções de Forma dos elementos descontínuos quadrangulares

E, adotando-se o mesmo procedimento descrito para os elementos triangulares contínuos, chega-se às seguintes funções de forma modificadas para os elementos triangulares descontínuos (tabela 3.09):

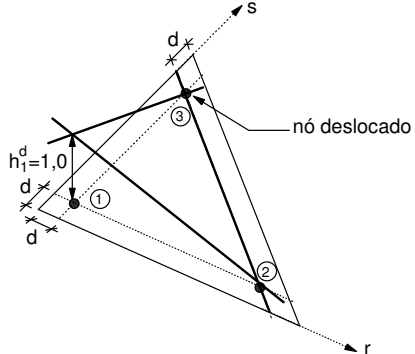
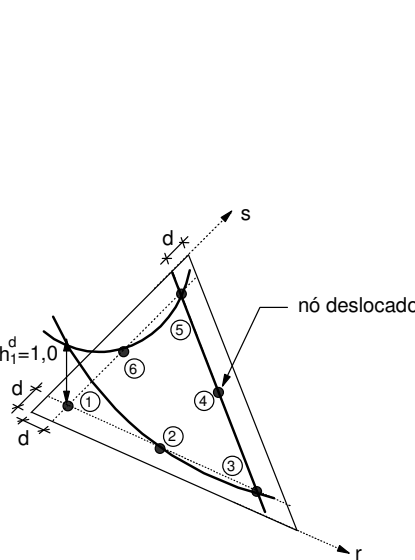
	Funções de Forma Elemento de 03 nós
	$h_1^d(r, s) = \frac{(r - r_2)(s - s_3)}{(r_1 - r_2)(s_1 - s_3)} + \frac{(r - r_2)(s - s_1)}{(r_4 - r_2)(s_4 - s_1)}$ $h_2^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_3)}{(r_2 - r_1)(s_2 - s_3)}$ $h_3^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_1)}{(r_3 - r_1)(s_3 - s_1)}$
	Funções de Forma Elemento de 06 nós
	$h_2^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(r - r_3)(s - s_5)}{r_1 r_3 (s_2 - s_5)}$ $h_4^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_3)(s - s_5)}{s_3 s_5 (r_4 - r_1)}$ $h_6^d(r, s) = \frac{(s - s_1)(r - r_5)(r - r_1)}{r_5 r_1 (s_6 - s_1)}$ $h_1^d(r, s) = \frac{(r - r_3)(s - s_5)}{(r_1 - r_3)(s_1 - s_5)} + \frac{(r - r_5)(s - s_3)}{(r_1 - r_5)(s_1 - s_3)} - \frac{1}{2} [h_2^d(r, s) + h_6^d(r, s)]$ $h_3^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_1)}{(r_3 - r_1)(s_3 - s_1)} - \frac{1}{2} [h_2^d(r, s) + h_4^d(r, s)]$ $h_5^d(r, s) = \frac{(r - r_1)(s - s_1)}{(r_5 - r_1)(s_5 - s_1)} - \frac{1}{2} [h_4^d(r, s) + h_6^d(r, s)]$

Tabela 3.09 – Funções de Forma dos elementos descontínuos triangulares



A equação integral de contorno discretizada é obtida substituindo-se as expressões 3.37, 3.38 e 3.39 na expressão 3.14. Desta forma obtém-se:

$$c(\xi)_{ik} U_i(\xi, \omega) + \sum_{j=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma_j} P_{ik}^*[\mathbf{x}(r, s), \xi, \omega] \sum_{q=1}^{nnoel} h_q(r, s) d\Gamma[\mathbf{x}(r, s)] \right) U_{iq}^{(j)} = \sum_{j=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma_j} U_{ik}^*[\mathbf{x}(r, s), \xi, \omega] \sum_{q=1}^{nnoel} h_q(r, s) P_{iq}^{(j)} d\Gamma[\mathbf{x}(r, s)] \right) P_{iq}^{(j)}, \quad (3.34)$$

onde  $ne$  é igual ao número total de elementos, os subscritos  $i$  e  $k$  variam de 1 ao número de graus de liberdade da dimensão do problema, no caso três. Note que, para elementos descontínuos, a função  $h_q(r, s)$  é alterada para  $h_q^d(r, s)$ .

O sistema de equações algébricas resultante é obtido escrevendo-se a equação 3.34 para cada um dos nós dos elementos de contorno. O qual pode ser escrito da seguinte forma matricial:

$$\mathbf{H}(\omega)\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{P}(\omega). \quad (3.35)$$

Neste sistema,  $\mathbf{H}(\omega)$  e  $\mathbf{G}(\omega)$  são, respectivamente, as matrizes complexas dos coeficientes associadas aos núcleos fundamentais  $P^*$  e  $U^*$ ,  $\mathbf{U}(\omega)$  é o vetor contendo os valores de contorno de deslocamento e  $\mathbf{P}(\omega)$ , o de forças de contorno.

Para solucionar tal sistema, deve-se aplicar as condições de contorno dadas nas expressões da equação 3.5 e realizar trocas de colunas entre as matrizes  $\mathbf{H}(\omega)$  e  $\mathbf{G}(\omega)$  de modo que, ao final, todas as incógnitas estejam do lado esquerdo do sistema de equações. Obtém-se, deste modo, um sistema da forma:

$$\mathbf{A}(\omega)\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{b}(\omega), \quad (3.36)$$

no qual,  $\mathbf{A}(\omega)$  é a matriz cheia, complexa e não-simétrica dos coeficientes de influência, obtida a partir de  $\mathbf{H}(\omega)$  e  $\mathbf{G}(\omega)$ .  $\mathbf{x}$  é o vetor complexo das variáveis desconhecidas e  $\mathbf{B}(\omega)$  é o vetor complexo do lado direito obtido multiplicando-se os valores de contorno prescritos pelas respectivas colunas das matrizes de influência (de  $\mathbf{H}(\omega)$  e  $\mathbf{G}(\omega)$ ).

A partir da resolução do sistema de equações 3.36, determinam-se todos os valores de contorno desconhecidos do problema, com os quais é então possível avaliar a resposta em pontos internos do domínio.

### **3.4. Processos de Integração**

Sabe-se que para determinar os coeficientes do sistema de equações, deve-se calcular as integrais de contorno contidas na expressão 3.14. Porém, a realização de tais integrais analiticamente é praticamente impossível. Sendo assim, faz-se necessário a utilização de processos numéricos de integração. Neste trabalho, adota-se o processo quadratura de Gauss-Legendre (Bathe, 1996), para a realização de integrais não-singulares, e procedimentos especiais, baseados em transformação de coordenadas, para as integrais *quasi-singulares* e fracamente singulares. Os valores principais são calculados indiretamente via critério de deslocamento de corpo rígido.

#### **3.4.1. Integrais não-singulares e quasi-singulares**

As integrais não-singulares surgem quando o ponto fonte,  $\xi$ , não pertence ao elemento sobre o qual se integra. Nestes casos, a avaliação das integrais é feita aplicando-se diretamente o processo de quadratura de Gauss sem nenhuma consideração especial.

Porém, na tentativa de se aumentar a eficiência da integração numérica, pode-se, após mapear os elementos no sistema de coordenadas naturais  $(r, s)$ , subdividi-los em vários sub-elementos de integração. A figura 3.18 mostra esta subdivisão para o

elemento de contorno quadrangular de 8 nós, mas vale ressaltar que o mesmo procedimento pode ser aplicado aos demais elementos.

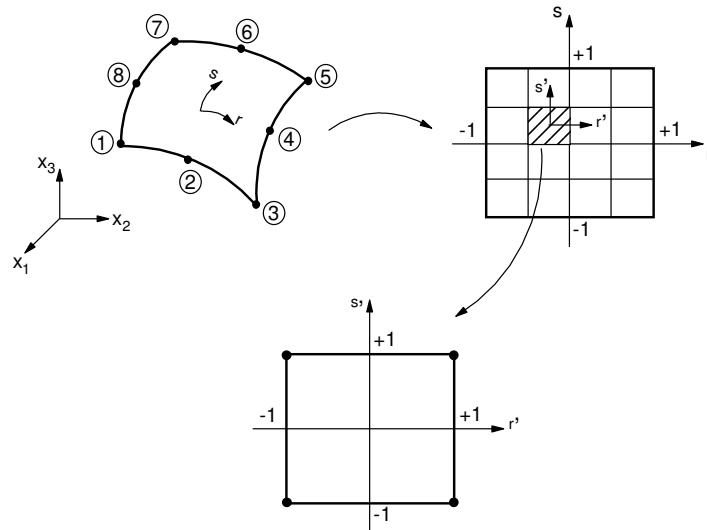


Figura 3.18 – Sub-elementos de integração

As integrais *quasi*-singulares são um caso particular das integrais não-singulares e ocorrem quando  $r \rightarrow 0$ , mas não se torna nulo, como acontece tipicamente na avaliação de grandezas em pontos internos via expressões integrais de contorno, no modelamento de domínio esbeltos e também em modelos de contorno com a presença de elementos descontínuos. Nesses casos, cuidados especiais no cálculo dos coeficientes do sistema de equações algébricas (expressão 3.35) precisam ser tomados. Uma possível solução para este problema seria o aumento do número de pontos de integração da quadratura de Gauss, eventualmente com a utilização de sub-elementos de integração e com o aumento do tempo de processamento. Uma alternativa mais eficiente é a utilização de processos especiais de integração baseado em transformação de coordenadas (Silva, 2005; Silva e Araújo, 2004; Alberto, 2002; Araújo, 1994; Telles e Oliveira, 1994).

### 3.4.2. Integrais singulares

Quando o ponto fonte,  $\xi$ , pertence ao elemento sobre o qual se integra, ou seja,  $r$  pode se tornar igual zero, surgem as integrais singulares ou impróprias, que por sua vez

podem ser fraca ou fortemente singulares. Tais integrais resultam do comportamento singular das soluções fundamentais quando  $r \rightarrow 0$ .

As integrais fracamente singulares estão presentes na integração dos deslocamentos fundamentais ( $U^*$ ). Nestes casos as integrais são convergentes no sentido ordinário, portanto pode-se aplicar a quadratura de Gauss padrão. Entretanto, a precisão da resposta, bem como, a eficiência do processo pode ser aumentada se processos especiais de integração forem adotados para tratar os núcleos singulares. Neste trabalho utilizam-se processos especiais de integração baseados na transformação de coordenadas polares triangulares e em transformações não-lineares (Mang et al., 1985; Telles, 1987; Telles e Oliveira, 1994; Araújo, 1994, Alberto, 2002).

Todavia esses processos não se aplicam ao cálculo direto de integrais fortemente singulares, como aquelas associadas as forças fundamentais ( $P^*$ ). Um modo de se evitar a avaliação direta dessas integrais de contorno é aplicando-se o critério de deslocamento de corpo rígido. Tal critério, para problemas estáticos, baseia-se no fato de que, aplicando-se deslocamento de corpo rígido a um corpo qualquer, não aparecem tensões no mesmo. Para problemas elastodinâmicos, considera-se

$$c_{ij}(\xi) + {}^{\text{dyn}}H_{ii} = c_{ij}(\xi) + {}^{\text{st}}H_{ii} + \sum_{e=1}^{nse} \int_{\Gamma_e} ({}^{\text{dyn}}P_{ik}^* - {}^{\text{st}}P_{ik}^*) \cdot h_q(r, s) d\Gamma \quad (3.37)$$

onde  $nse$  é o número de elementos adjacentes ao ponto singular  $\xi$ . Maiores detalhes da obtenção de (3.37) podem ser encontrados em Manolis e Beskos (1988). Assim, do caso elastostático obtém-se:

$$c_{ij} + H_{ii} = \begin{cases} -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N {}^{\text{st}}H_{ik}, & \text{regiões finitas} \\ 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N {}^{\text{st}}H_{ik}, & \text{regiões infinitas} \end{cases}, \quad (3.38)$$

onde  ${}^{st}\mathbf{H}_{ik}$  é força de superfície fundamental dada.

Somando-se então o resultado acima,  $c_{ij} + {}^{st}H_{ii}$ , aos valores que resultam da integral em 3.37, chega-se então aos termos  $c_{ij} + {}^{dyn}H_{ii}$ . Note que essa integral é fracamente singular e pode ser obtida, eficientemente, via processos especiais descritos a seguir.

### 3.4.3. Procedimentos especiais de integração

Com a finalidade de se aumentar a precisão do Método, bem como aumentar a eficiência do algoritmo de integração, procedimentos especiais de integração são utilizados neste trabalho. Esses são de grande importância, principalmente na avaliação das integrais *quasi*-singulares e fracamente singulares. A escolha do processo de integração, no programa desenvolvido, é feita a partir da variável *icpt*, a qual poderá assumir os seguintes valores:

$$icpt = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{quadratura de Gauss padrão} \\ 1 \rightarrow \text{transformação de coordenadas polares triangulares} \\ 2 \rightarrow \text{transformação não - linear (transformação de Telles)} \\ 3 \rightarrow \text{processo combinado} \end{cases}.$$

Durante a integração sobre um determinado elemento os processos especiais (*icpt* = 1, 2 ou 3) poderão ser ativados ou desativados dependendo do valor da variável *r\_icpt*. Esta variável fornece um intervalo, dentro do qual, os processos especiais serão ativados.

#### 3.4.3.1. Transformação de coordenadas polares triangulares

Esta transformação caracteriza-se por uma série de mapeamentos de coordenadas objetivando de reduzir a ordem da singularidade das integrais. Inicialmente o elemento de contorno, já mapeado, no espaço de coordenadas naturais  $(r, s)$  é subdividido em dois ou três subelementos triangulares, dependendo se o ponto singular está situado no

canto ou no meio da aresta do elemento (ver Figura 3.19 (a)). Em seguida, cada triângulo é mapeado em um quadrado de lado unitário utilizando-se a expressão

$$x_i(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{q=1}^3 h_q^* \hat{x}_{iq} , \quad (3.39)$$

onde,  $x_i$  são as coordenadas cartesianas ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\hat{x}_{iq}$  é a componente  $i$  do vetor de coordenadas do  $q$ -ésimo nó do elemento.  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são as coordenadas polares triangulares, e  $h_q^*$  são as funções de forma associadas à transformação, dadas por:

$$\begin{aligned} h_1^*(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_1) \\ h_2^*(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1(1 - \zeta_2) \\ h_3^*(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1\zeta_2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Quando este quadrado unitário é novamente mapeado em um espaço de coordenadas naturais  $(\eta_1, \eta_2)$ , com  $-1 \leq \eta_1, \eta_2 \leq +1$  (ver Figura 3.19 (c), (d) e (e)), permite-se que os pesos e as abscissas da quadratura de Gauss padrão possam ser diretamente aplicados (Araújo, 1994).

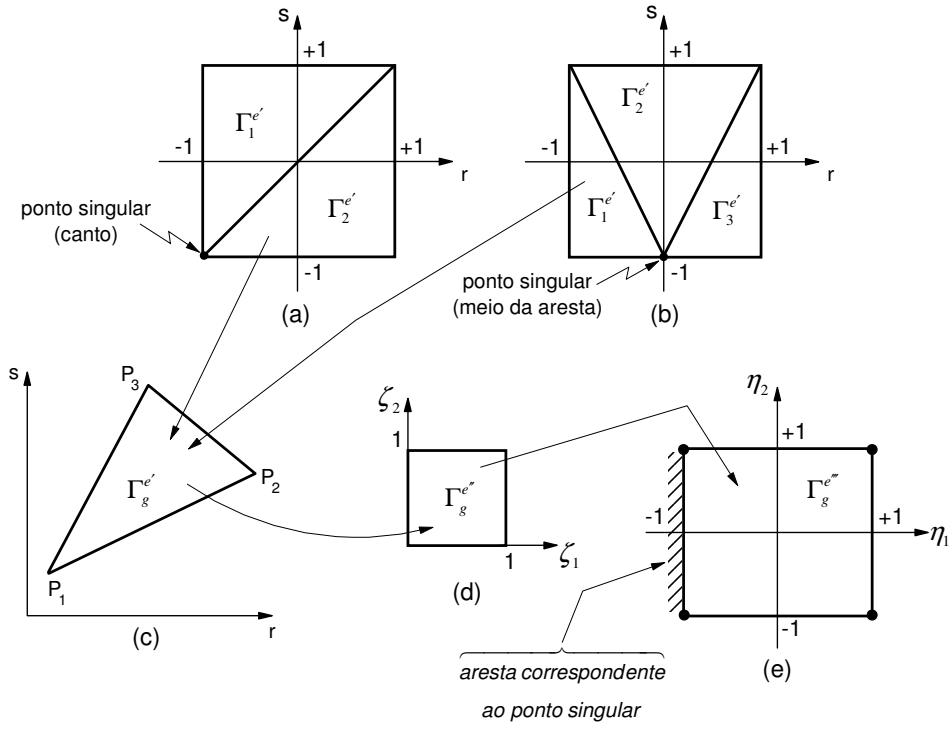


Figura 3.19 – Seqüência de mapeamentos – transformação de coordenadas polares triangulares

Sendo assim, as integrais em (3.14) podem ser avaliadas a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_e} P^*[\mathbf{x}(r,s), \xi, \omega] h_q(r,s) d\Gamma[\mathbf{x}(r,s)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P^*[(r,s), \omega] h_q(r,s) dr ds = \\
 &= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_0^1 \int_0^1 P^*[(\zeta_1, \zeta_2), \omega] h_q(\zeta_1, \zeta_2) \left| \mathbf{J}_{\Gamma}^e(\zeta_1, \zeta_2) \right| \left| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'}) \right| d\zeta_1 d\zeta_2 = \\
 &= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P^*[(\eta_1, \eta_2), \omega] h_q(\eta_1, \eta_2) \left| \mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_1, \eta_2) \right| \left| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'}) \right| \left| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''}) \right| d\eta_1 d\eta_2 = \\
 &= \sum_{i=1}^{nsdi} \sum_{k=1}^{nsdi} \sum_{l=1}^{nsdi} P^*[(\eta_{1k}, \eta_2), \omega] h_q(\eta_{1k}, \eta_{2l}) \left| \mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_{1k}, \eta_{2l}) \right| \left| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'}) \right| \left| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''}) \right| w_k w_l
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} U^*[\mathbf{x}(r,s), \xi, \omega] h_q(r,s) d\Gamma[\mathbf{x}(r,s)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U^*[(r,s), \omega] h_q(r,s) dr ds = \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_0^1 \int_0^1 U^*[(\varsigma_1, \varsigma_2), \omega] h_q(\varsigma_1, \varsigma_2) \left| \mathbf{J}_{\Gamma}^e(\varsigma_1, \varsigma_2) \right| \left\| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'}) \right\| d\varsigma_1 d\varsigma_2 = \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U^*[(\eta_1, \eta_2), \omega] h_q(\eta_1, \eta_2) \left| \mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_1, \eta_2) \right| \left\| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'}) \right\| \left\| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''}) \right\| d\eta_1 d\eta_2 = \\
&= \sum_{i=1}^{nsdi} \sum_{k=1}^{nsdi} \sum_{l=1}^{nsdi} U^*[(\eta_{1k}, \eta_2), \omega] h_q(\eta_{1k}, \eta_{2l}) \left| \mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_{1k}, \eta_{2l}) \right| \left\| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'}) \right\| \left\| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''}) \right\| w_k w_l
\end{aligned} \tag{3.42}$$

onde,  $nsdi$  é o número de subdomínios triangulares (igual a 2 ou 3), e o jacobiano envolvido nas várias transformações de coordenadas é dado por:

$$\left| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'}) \right| \left\| \mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''}) \right\| = \frac{1}{4} (1 + \eta_1) A_{\Gamma_g} . \tag{3.43}$$

Na expressão 3.43,  $A_{\Gamma_g}$  é a área do subelemento triangular, a qual poderá assumir os valores 1 ou 2 conforme a subdivisão realizada. Após o mapeamento no espaço de coordenadas  $(\eta_1, \eta_2)$ , pode-se ainda, conforme a necessidade, subdividir os elementos em subelementos de integração como apresentado no item 3.4.3.1.

A figura 3.20 apresenta, por exemplo, uma integração de ordem 4x4, obtida da aplicação da transformação de coordenadas polares triangulares, para o ponto singular coincidente com o nó 1 e 2 do elemento quadrangular de 8 nós.



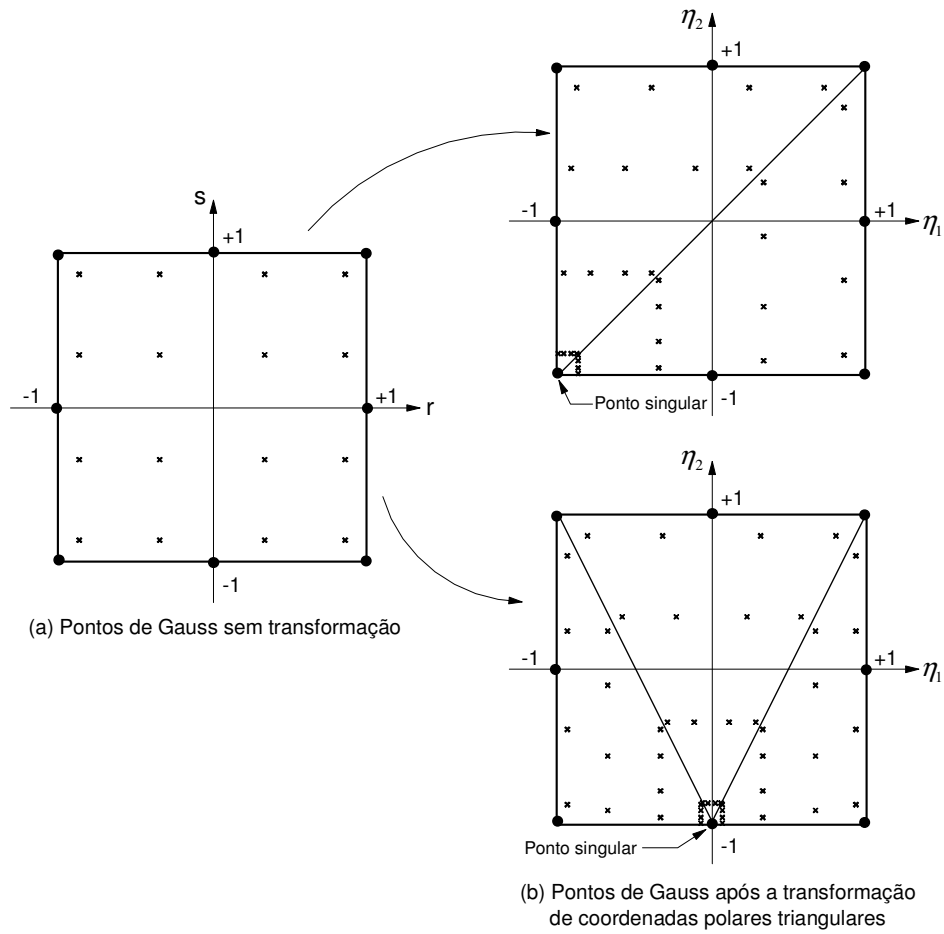


Figura 3.20 – Posição dos pontos de integração após a transformação de coordenadas polares triangulares

### 3.4.3.2. Transformação não-linear

Utiliza-se, neste trabalho, a transformação não-linear desenvolvida por Telles (1987), que se baseia em uma transformação polinomial do 3º grau, cujo objetivo principal é o aumento da eficiência do processo de quadratura de Gauss na avaliação de integrais singulares ou *quasi*-singulares, através do deslocamento dos pontos de integração para as proximidades do ponto singular (Telles, 1987; Telles e Oliveira, 1994).

Para a derivação desta transformação, considera-se a integral da função  $f(\eta)$ , que é singular em  $\bar{\eta}$ , bem como o polinômio do 3º grau apresentados nas expressões 3.44 e 3.45:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (3.44)$$

e

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad , \quad (3.45)$$

A determinação dos coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  do polinômio é feita impondo-se as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \\ \left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad . \\ \eta(1) = 1 \\ \eta(-1) = -1 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Logo, obtém-se:

$$\begin{aligned} a &= 1/Q, \\ b &= -3\bar{\gamma}/Q, \\ c &= 3\bar{\gamma}^2/Q \quad \text{e} \\ d &= -b, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde  $Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2$  e  $\bar{\gamma}$  é o valor de  $\gamma$  para o qual se tem  $\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta}$ , o qual pode ser calculado a partir da expressão 3.48.

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad , \quad \text{com } \eta^* = \bar{\eta}^2 - 1. \quad (3.48)$$

Desta maneira, a expressão 3.52 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[ \frac{(\gamma - \bar{\gamma})^3 + \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 + 3)}{(1 + 3\bar{\gamma}^2)} \right] 3 \frac{(\gamma - \bar{\gamma})^2}{(1 + 3\bar{\gamma}^2)} d\gamma. \quad (3.49)$$

No algoritmo de integração desenvolvido, tem-se que a função  $f(\eta)$  que se deseja integrar é igual aos núcleos fundamentais  $P^*$  e  $U^*$ , e  $\gamma$  representa a posição original dos pontos de integração, ou seja, as coordenadas  $(r, s)$  dos pontos de integração fornecidas na quadratura de Gauss padrão. As novas posições destes pontos são obtidas mediante a aplicação da expressão (equação 3.45), que é função da posição do ponto singular e as integrais em na equação 3.14, são agora avaliadas a partir das expressões abaixo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} P^*[\mathbf{x}(r, s), \xi, \omega] h_q(r, s) d\Gamma[\mathbf{x}(r, s)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P^*[(r, s), \omega] h_q(r, s) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(r, s)| dr ds = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P^*[(r(\gamma), s(\gamma)), \omega] h_q(r(\gamma), s(\gamma)) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(r(\gamma), s(\gamma))| |\mathbf{J}_{nl}(\gamma)| dr(\gamma) ds(\gamma) \end{aligned} \quad (3.50)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} U^*[\mathbf{x}(r, s), \xi, \omega] h_q(r, s) d\Gamma[\mathbf{x}(r, s)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U^*[(r, s), \omega] h_q(r, s) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(r, s)| dr ds = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U^*[(r(\gamma), s(\gamma)), \omega] h_q(r(\gamma), s(\gamma)) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(r(\gamma), s(\gamma))| |\mathbf{J}_{nl}(\gamma)| dr(\gamma) ds(\gamma) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nas equações 3.50 e 3.51  $|\mathbf{J}_{nl}(\gamma)|$  é o jacobiano da transformação não-linear, o qual é dado por:

$$|\mathbf{J}_{nl}(\gamma)| = 3 \frac{(\gamma - \bar{\gamma})^2}{(1 + 3\bar{\gamma}^2)}. \quad (3.57)$$

Esta transformação, de maneira análoga à transformação apresentada anteriormente, também pode ser aplicada combinada com a opção de subdivisão dos elementos em

subelementos de integração. Para o mesmo caso anterior apresenta-se a figura 3.21, agora com a utilização da transformação de Telles.

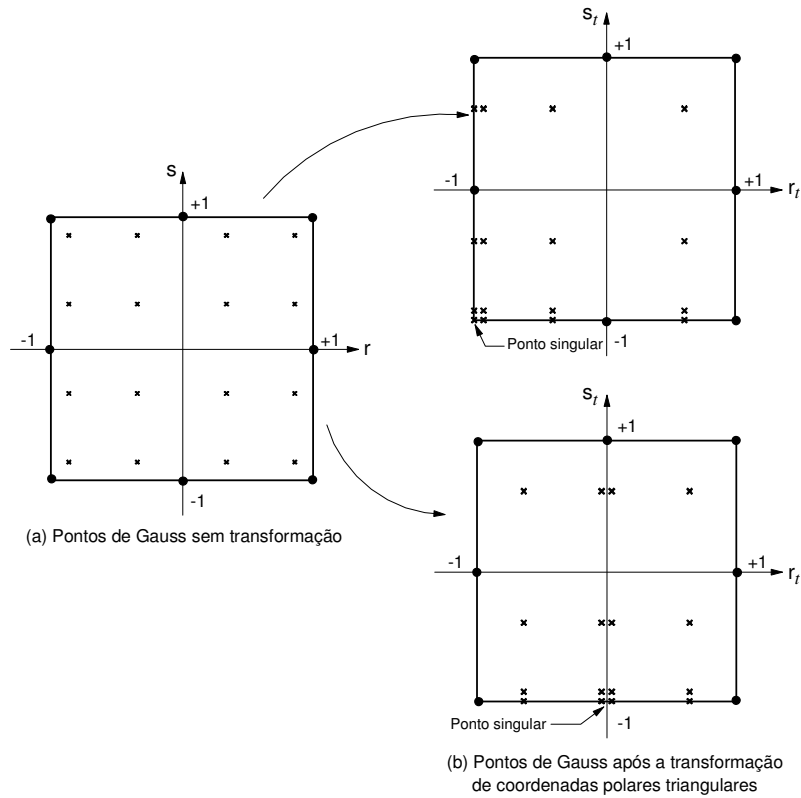


Figura 3.21 – Posição dos pontos de integração após a transformação não-linear

#### 3.4.3.3. Processo combinado – transformação de coordenadas polares triangulares + transformação não-linear

Este processo de integração baseia-se na combinação da transformação de coordenadas polares triangulares e da transformação de Telles. Inicialmente realiza-se a seqüência de mapeamentos referentes à transformação de coordenadas polares triangulares, em seguida, aplica-se a transformação não-linear de coordenadas segundo a direção  $\eta_1$ , de modo a deslocar os pontos de integração no sentido do ponto singular. Deste modo, resulta para as integrais em na equação 3.14:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} P^*[\mathbf{x}(r,s), \xi, \omega] h_q(r,s) d\Gamma[\mathbf{x}(r,s)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P^*[(r,s), \omega] h_q(r,s) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(r,s)| dr ds = \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_0^1 \int_0^1 P^*[(\varsigma_1, \varsigma_2), \omega] h_q(\varsigma_1, \varsigma_2) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(\varsigma_1, \varsigma_2)| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'})\| d\varsigma_1 d\varsigma_2 = \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P^*[(\eta_1, \eta_2), \omega] h_q(\eta_1, \eta_2) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_1, \eta_2)| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'})\| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''})\| d\eta_1 d\eta_2 = \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{P^*[(\eta_1(\gamma), \eta_2(\gamma)), \omega] h_q(\eta_1(\gamma), \eta_2(\gamma)) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_1(\gamma), \eta_2(\gamma))| = \\
&\quad |\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'})\| \mathbf{J}_{nl}(\gamma) d\eta_1(\gamma) d\eta_2 \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \sum_{k=1}^{nsdi} \sum_{l=1}^{nsdi} \{P^*[(\eta_1(\gamma_k), \eta_{2l}), \omega] h_q(\eta_1(\gamma_k), \eta_{2l}) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_1(\gamma_k), \eta_{2l})| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\eta_1(\gamma_k), \eta_{2l})\| \\
&\quad |\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'})\| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''})\| w_k w_l \}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} U^*[\mathbf{x}(r,s), \xi, \omega] h_q(r,s) d\Gamma[\mathbf{x}(r,s)] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U^*[(r,s), \omega] h_q(r,s) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(r,s)| dr ds = \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_0^1 \int_0^1 U^*[(\varsigma_1, \varsigma_2), \omega] h_q(\varsigma_1, \varsigma_2) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(\varsigma_1, \varsigma_2)| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'})\| d\varsigma_1 d\varsigma_2 = \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U^*[(\eta_1, \eta_2), \omega] h_q(\eta_1, \eta_2) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_1, \eta_2)| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'})\| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''})\| d\eta_1 d\eta_2 = \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{U^*[(\eta_1(\gamma), \eta_2(\gamma)), \omega] h_q(\eta_1(\gamma), \eta_2(\gamma)) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_1(\gamma), \eta_2(\gamma))| = \\
&\quad |\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'})\| \mathbf{J}_{nl}(\gamma) d\eta_1(\gamma) d\eta_2 \\
&= \sum_{g=1}^{nsdi} \sum_{k=1}^{nsdi} \sum_{l=1}^{nsdi} \{U^*[(\eta_1(\gamma_k), \eta_{2l}), \omega] h_q(\eta_1(\gamma_k), \eta_{2l}) |\mathbf{J}_{\Gamma}^e(\eta_1(\gamma_k), \eta_{2l})| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\eta_1(\gamma_k), \eta_{2l})\| \\
&\quad |\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e'})\| \|\mathbf{J}_{\Gamma}(\Gamma_g^{e''})\| w_k w_l \}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Note-se que, não faz sentido aplicar a transformação não-linear segundo a direção  $\eta_2$ , uma vez que não há singularidade nesta direção (ver Figura 3.19). Como nos casos anteriores esta estratégia pode ser aplicada com ou sem subelementos de integração. A figura abaixo mostra a posição dos pontos de integração (ordem 4x4) após a aplicação do processo combinado.

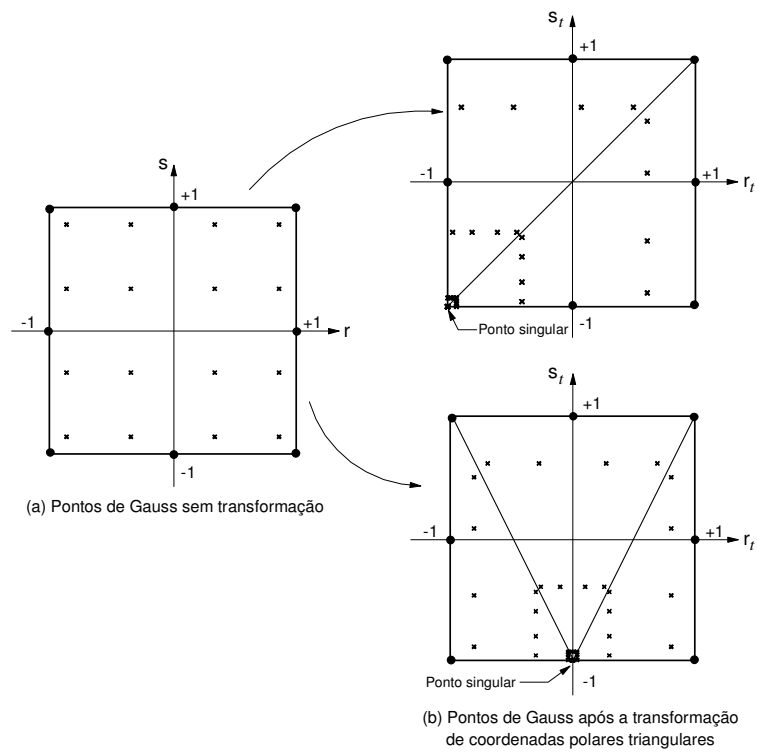


Figura 3.22 – Posição dos pontos de integração após a transformação combinada

## Capítulo 04 - O Algoritmo de Subestruturação

---

Problemas em que os domínios sejam formados por materiais diferentes e/ou apresentem descontinuidades, como por exemplo, problemas de acoplamento solo-fundação e de mecânica da fratura, podem ser analisados convenientemente via M.E.C. com a utilização de estratégias de Subestruturação (Martins, 2001; Araújo et al., 2001; Dors, 2002). Tais estratégias consistem basicamente na subdivisão do domínio do problema em um conjunto de sub-regiões e na consideração de modelos de elementos de contorno para cada uma delas. A solução do sistema de equações resultante é avaliada mediante a consideração, além das condições de contorno, de condições a serem impostas nas interfaces entre as sub-regiões.

A estratégia de acoplamento genérico EC-EC adotada baseia-se na utilização de elementos de contorno descontínuos e de *solvers* iterativos, que permitirão que a solução do sistema global seja avaliada sem que o mesmo seja explicitamente montado. Excluindo, completamente, o manuseio dos blocos nulos da matriz resultante.

Este capítulo abordará, de forma sucinta, a formulação de acoplamento genérico EC-EC (estratégia de Subestruturação) baseada na utilização de *solvers* iterativos, o esquema de montagem do sistema matricial acoplado e a estratégia de resolução do sistema acoplado (*solver*).

#### 4.1. Solvers

Na prática, os engenheiros deparam-se, com frequência, com modelos com milhões de graus de liberdade, porém, não somente a precisão da resposta é importante em tais análises, também o tempo de processamento e espaço de memória envolvido na análise. Para isso, existem difundidos no meio científico diversas formas de se resolver esses grandes sistemas de equações. Os *solvers*, como são conhecidos, apresentam-se de diversas formas, distinguindo-se em diretos e iterativos. Neste trabalho, serão usados solvers iterativos, descritos a seguir.

##### 4.1.1. Os solvers iterativos

Os *solvers* iterativos são aqueles cuja solução é obtida via relação de recorrência sem transformação da matriz. Em cada iteração verifica-se a convergência segundo algum critério.

Atualmente, tem-se estudado bastante os *solvers* iterativos. Para o caso dos sistemas oriundos do Método dos Elementos de Contorno, os que têm apresentado melhores resultados são os denominados solvers de Krylov ( Hageman e Young, 1981; Araújo, 1989; Kane, 1990; Mansur *et al*, 1992; Barra *et al*, 1992; Barra *et al*, 1993). Os *solvers* baseados no subespaço de Krylov e suas versões preconditionadas são bastante eficientes em problemas de grande porte, reduzindo tanto tempo de resolução do sistema de equações, bem como, o espaço de armazenamento de dados.

Neste trabalho adotou-se, como solver iterativo, apenas o Gradiente Bi-Conjugado précondicionado. Para se derivar este algoritmo, parte-se inicialmente do algoritmo de tridiagonalização de Lanczos (Wilkinson, 1965).

Este processo baseia-se na derivação de duas seqüências de vetores,  $\mathbf{c}^{k+1}$  e  $\bar{\mathbf{c}}^{k+1}$ , a partir da matriz  $\mathbf{A}$  e de sua transposta  $\mathbf{A}^T$ , respectivamente, segundo as expressões:

$$\delta_{k+1} \mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{c}^k - \alpha_k \mathbf{c}^k - \beta_k \mathbf{c}^{k-1} \quad (4.1)$$



e

$$\bar{\delta}_{k+1} \bar{\mathbf{c}}^{k+1} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{c}}^k - \bar{\alpha}_k \bar{\mathbf{c}}^k - \bar{\beta}_k \bar{\mathbf{c}}^{k-1} . \quad (4.2)$$

Nas expressões 4.1 e 4.2 considera-se que os vetores  $\mathbf{c}^1$  e  $\bar{\mathbf{c}}^1$  são inicialmente conhecidos e  $k$  varia de 1 a  $N$  (ordem da matriz). Estas seqüências de vetores são obtidas impondo-se a condição de que os vetores sejam mutuamente ortogonais.

Desta forma, obtêm-se as seguintes relações para  $\alpha_k$ ,  $\bar{\alpha}_k$ ,  $\beta_k$  e  $\bar{\beta}_k$ :

$$\alpha_k = \frac{\bar{\mathbf{c}}^{k,T} \mathbf{A} \mathbf{c}^k}{\bar{\mathbf{c}}^{k,T} \mathbf{c}^k} = \bar{\alpha}_k , \quad (4.3)$$

$$\beta_k = \frac{\bar{\mathbf{c}}^{k-1,T} \mathbf{A} \mathbf{c}^k}{\bar{\mathbf{c}}^{k-1,T} \mathbf{c}^{k-1}} \quad (4.4)$$

e

$$\bar{\beta}_k = \frac{\mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{c}}^k}{\mathbf{c}^{k-1,T} \bar{\mathbf{c}}^{k-1}} . \quad (4.5)$$

Para se estabelecer o algoritmo de Lanczos, considera-se uma fórmula iterativa básica do tipo:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \rho_{n+1} \gamma_{n+1} \mathbf{r}^n + \rho_{n+1} \mathbf{u}^n + (1 - \rho_{n+1}) \mathbf{u}^{n-1} , \quad (4.6)$$

cujo vetor resíduo associado é dado por,

$$\mathbf{r}^{n+1} = -\rho_{n+1} \gamma_{n+1} \mathbf{A} \mathbf{r}^n + \rho_{n+1} \mathbf{r}^n + \mathbf{r}^{n-1} - \rho_{n+1} \mathbf{r}^{n-1} . \quad (4.7)$$

Analogamente, tem-se a seguinte expressão para o resíduo associado à matriz  $\mathbf{A}^T$ :

$$\bar{\mathbf{r}}^{n+1} = -\bar{\rho}_{n+1} \bar{\gamma}_{n+1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{r}}^n + \bar{\rho}_{n+1} \bar{\mathbf{r}}^n + \bar{\mathbf{r}}^{n-1} - \bar{\rho}_{n+1} \bar{\mathbf{r}}^{n-1} . \quad (4.8)$$

Determinando-se que os vetores  $\mathbf{r}^{n+1}$  e  $\bar{\mathbf{r}}^{n+1}$  sejam vetores de Lanczos, dados pelas expressões 4.1 e 4.2, respectivamente, e realizando-se as transformações necessárias, chega-se a:

$$\gamma_{n+1} = \bar{\gamma}_{n+1} = \frac{\bar{\mathbf{r}}^{n,T} \mathbf{r}^n}{\bar{\mathbf{r}}^{n,T} \mathbf{A} \mathbf{r}^n} \quad (4.9)$$

e

$$\rho_{n+1} = \bar{\rho}_{n+1} = \left[ 1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \left( \frac{\bar{\mathbf{r}}^{n,T} \mathbf{r}^n}{\bar{\mathbf{r}}^{n-1,T} \mathbf{r}^{n-1}} \right) \frac{1}{\rho_n} \right]^{-1} , \quad (4.10)$$

com,  $\rho_1 = 1$  e  $\mathbf{r}^1 = \bar{\mathbf{r}}^1$ .

Por outro lado, adotando-se uma fórmula iterativa do tipo:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \lambda_n \mathbf{p}^n , \quad (4.11)$$

deriva-se o algoritmo de Gradiente Bi-conjugado.

Na expressão 4.11,  $\mathbf{p}^n$  são vetores que definem a direção de busca e são dados por,

$$\mathbf{p}^n = \begin{cases} \mathbf{r}^0 , & \text{se } n = 0 \\ \mathbf{r}^n + \alpha_n \mathbf{p}^{n-1} , & \text{se } n \geq 1 \end{cases} , \quad (4.12)$$

e o resíduo para a  $n$ -ésima iteração é avaliado a partir da expressão:

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{r}^{n-1} - \lambda_{n-1} \mathbf{A} \mathbf{p}^{n-1} . \quad (4.13)$$

Em 4.12 e 4.13 os parâmetros  $\alpha_n$  e  $\lambda_{n-1}$  do processo iterativo são dados por:

$$\alpha_n = \frac{\bar{\mathbf{r}}^{n,T} \mathbf{r}^n}{\bar{\mathbf{r}}^{n-1,T} \mathbf{r}^{n-1}} \quad (4.14)$$

e

$$\lambda_{n-1} = \frac{\bar{\mathbf{r}}^{n-1,T} \mathbf{r}^{n-1}}{\bar{\mathbf{p}}^{n-1,T} \mathbf{A} \bar{\mathbf{p}}^{n-1}} \quad (4.15)$$

E ainda, consideram-se as seguintes expressões para as fórmulas iterativas auxiliares:

$$\bar{\mathbf{r}}^n = \bar{\mathbf{r}}^{n-1} - \lambda_{n-1} \mathbf{A} \bar{\mathbf{p}}^{n-1} \quad \text{e} \quad (4.16)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^n = \begin{cases} \bar{\mathbf{r}}^0 & , \text{ se } n = 0 \\ \bar{\mathbf{r}}^n + \alpha_n \bar{\mathbf{p}}^{n-1} & , \text{ se } n \geq 1 \end{cases} \quad (4.17)$$

Pode-se afirmar que os processos iterativos descritos são gerais e podem ser aplicados a quaisquer tipos de sistemas não-singulares. A convergência, em aritmética infinita, ocorrerá em, no máximo,  $n$  iterações, com  $n \leq N$ . Entretanto, devido a erros de truncamento, que podem ocorrer durante a execução das operações, a convergência poderá não ser atingida para  $n \leq N$ . Para evitar que tais problemas ocorram, e ainda melhorar a convergência destes *solvers*, utilizam-se estratégias de condicionamento. Adotou-se, neste trabalho, o condicionamento de Jacobi, que é definido como a matriz dos elementos da diagonal de  $\mathbf{A}$ , a matriz de coeficientes.

## 4.2. Acoplamento EC-EC genérico

Considere o domínio  $\Omega$  e a sua subdivisão em sub-regiões como se mostra na figura 4.01. Para cada sub-região do domínio aplica-se a expressão 3.34, obtendo-se:

$$\mathbf{H}(\omega)^k \mathbf{u}(\omega)^k = \mathbf{G}(\omega)^k \mathbf{p}(\omega)^k, \text{ com } k = 1, \dots, nsr \quad (4.18)$$

onde  $nsr$  é igual ao número total de sub-regiões.

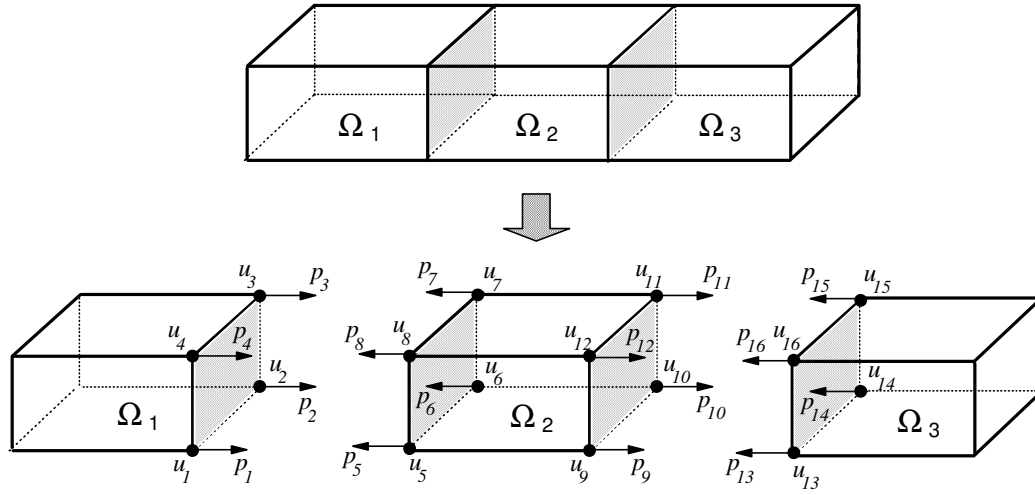


Figura 4.01 – Subdomínios acoplados

Gera-se, dessa forma, um conjunto de  $nsr$  sistemas de equações, que deve ser organizado de modo a obter-se, no termo do lado direito, os valores de contorno prescritos e as forças de interface (incógnita), e, no termo do lado esquerdo, os valores de contorno desconhecidos e os deslocamentos de interface (incógnita), resultando no seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\omega)_b^k & \mathbf{H}(\omega)_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(\omega)_b^k \\ \mathbf{u}(\omega)_i^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\omega)_b^k & \mathbf{G}(\omega)_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(\omega)_b^k \\ \mathbf{p}(\omega)_i^k \end{Bmatrix}, k=1, \dots, nsr. \quad (4.19)$$

O termo  $i$  indica a superfície de interface com deslocamento e forças de contorno desconhecidos, as matrizes  $\mathbf{A}(\omega)_b^k$  e  $\mathbf{B}(\omega)_b^k$  e os vetores  $\mathbf{x}(\omega)_b^k$  e  $\mathbf{y}(\omega)_b^k$ , valores de

contorno desconhecidos da sub-região  $k$ , resultam da introdução das condições de contorno do problema e são obtidos a partir das seguintes expressões:

$$\mathbf{A}(\omega)_b^k = [\mathbf{H}(\omega)_{c(u)}^k - \mathbf{G}(\omega)_{c(p)}^k] \quad , \quad \mathbf{x}(\omega)_b^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\omega)_b^k \\ \mathbf{p}(\omega)_b^k \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

e

$$\mathbf{B}(\omega)_b^k = [-\mathbf{H}(\omega)_{c(u)}^k - \mathbf{G}(\omega)_{c(p)}^k] \quad , \quad \mathbf{y}(\omega)_b^k = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}(\omega)_b^k \\ \bar{\mathbf{u}}(\omega)_b^k \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

onde, o índice  $c(u)$  define a parcela de contorno da  $k$ -ésima sub-região com  $u$  como incógnita e o índice  $c(p)$  define a parcela de contorno da  $k$ -ésima sub-região com  $p$  como incógnita.

Com a introdução dos elementos descontínuos, a estratégia de acoplamento foi bastante simplificada. Em trabalhos anteriores, para se resolver os sistemas apresentados, havia a necessidade de se aplicar condições de equilíbrio e de continuidade de forças entre as interfaces das diversas sub-regiões de modo a equiparar o número de incógnitas ao número de equações. Na estratégia que considera elementos descontínuos, tem-se que um nó, de uma determinada sub-região, poderá estar acoplado a apenas um outro nó de outra sub-região. Portanto, existirão sempre duas equações para cada par de incógnitas a ser determinado.

Sendo assim, apenas a aplicação das condições de acoplamento entre as interfaces das diversas sub-regiões é suficiente para igualar o número de equações e incógnitas e estas são dadas por,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i \quad (4.22)$$

e

$$\mathbf{p}_i = -\mathbf{p}_i, \quad (4.23)$$

onde o índice  $i$  refere-se aos valores da superfície de interface.

A aplicação das condições anteriores ao modelo apresentado na figura 4.01 resulta em,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_5, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_6, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_7, \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_8, \quad \mathbf{u}_9 = \mathbf{u}_{13}, \quad \mathbf{u}_{10} = \mathbf{u}_{14}, \quad \mathbf{u}_{11} = \mathbf{u}_{15}, \quad \mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_{16},$$

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_5, \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_6, \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_7, \quad \mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_8, \quad \mathbf{p}_9 = -\mathbf{p}_{13}, \quad \mathbf{p}_{10} = -\mathbf{p}_{14}, \quad \mathbf{p}_{11} = -\mathbf{p}_{15} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{p}_{12} = -\mathbf{p}_{16}.$$

Assim sendo, através da aplicação das condições de equilíbrio entre os diversos nós das várias sub-regiões e da introdução das condições do problema pode-se obter o sistema matricial acoplado na forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Para o exemplo apresentado na figura 4.01 tem-se um sistema final, caso explicitado, com o seguinte aspecto:

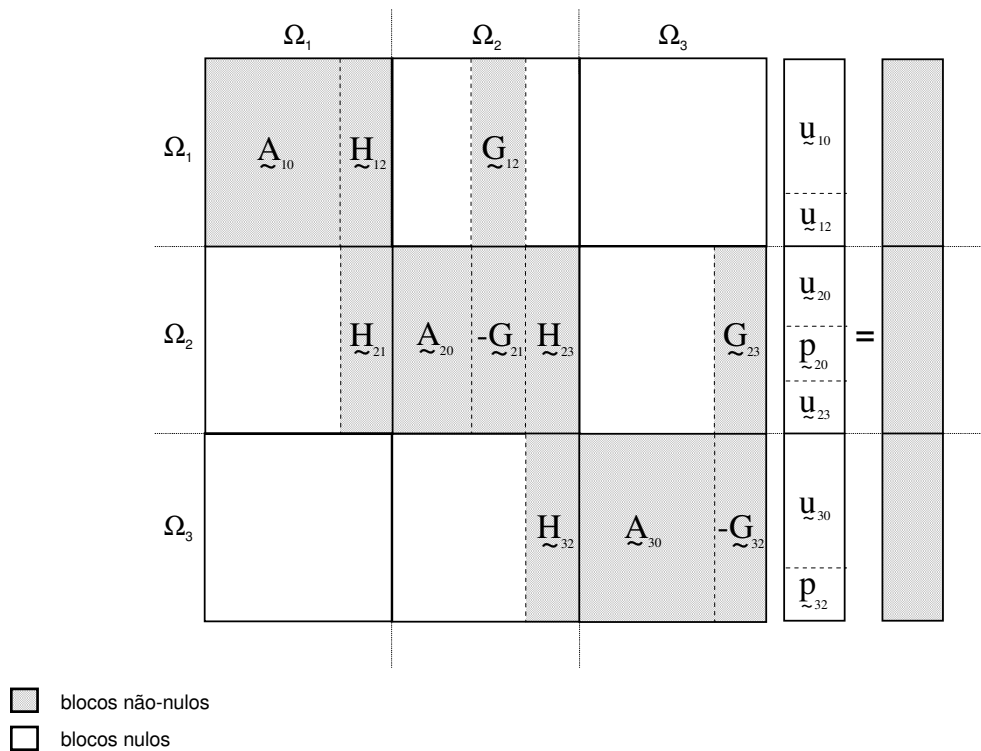


Figura 4.02 – Matriz global do sistema acoplado

Note-se que, a matriz global do sistema apresenta muitos blocos nulos, o que implicaria na utilização de grande espaço de memória para armazenamento do sistema global acoplado. Porém, a estratégia de acoplamento genérica adotada permite que a resolução do sistema seja realizada sem que o sistema global acoplado seja explicitamente montado.

A resolução do sistema mediante a utilização de *solvers* iterativos funcionará basicamente da seguinte forma: trabalhar-se-á com as matrizes de cada uma das sub-regiões como se os sistemas fossem desacoplados, realizando-se os produtos matriz-vetor e vetor-vetor como se não houvesse a necessidade de se buscar informações de acoplamento. Na verdade, a cada iteração do *solver*, será realizada a transferência dos valores de acoplamento entre as sub-regiões. Ao final do processo iterativo os valores de contorno serão atualizados.

Para que o procedimento descrito anteriormente pudesse ser realizado de forma eficiente, o processo para gerar os elementos de contorno descontínuos, a pesquisa das condições de acoplamento entre as diversas sub-regiões e a conseqüente aplicação destas na resolução do sistema devem ser feitas automaticamente pelo programa.

Assim, tal variável, intitulada de *intel*, informa se o elemento, além de ser um elemento de interface, em quais graus de liberdade o mesmo está acoplado. Desta forma, a variável assume tal valor,

$$intel = ijk , \quad (4.24)$$

sendo que para a direção desacoplada, o valor assumido de *i* ou *j* ou *k* é zero, e unidade para o caso acoplado. Portanto para um nó acoplado na direção global *j* somente, o valor da variável deve ser *010*.

Internamente, através de uma variável lógica, *icprob*, que indica a existência de domínios acoplados, o programa faz a verificação, em virtude de *intel* se há acoplamento ou não. Caso positivo, é acionada uma rotina, *research\_coupl3d*, que:

- 1) Pesquisa as sub-regiões acopladas do modelo, comparando as coordenadas dos nós com as demais regiões do modelo;
- 2) Nós com mesmas coordenadas são identificados, respeitando-se uma tolerância mínima coerente, gerando assim novas variáveis que definem o acoplamento e por consequência as condições de equilíbrio e continuidade.

### 4.3. Interfaces inclinadas

As interfaces inclinadas, ou apoios inclinados, por definição, são restrições de deslocamentos impostas ao modelo estrutural em direções diferentes das direções definidas pelo referencial global do modelo. A figura 4.03 demonstra o caso de interfaces inclinadas acopladas.

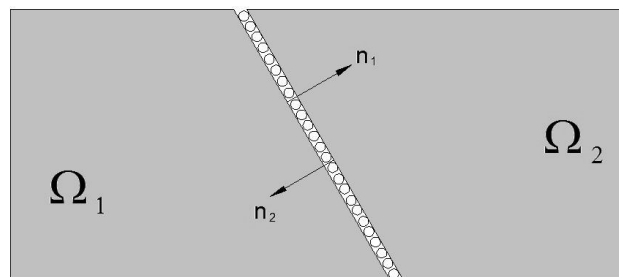


Figura 4.03 – Esquema típico de interfaces inclinadas

Na implementação feita, um sistema local de coordenadas é automaticamente gerado de modo a possibilitar a imposição de condições de acoplamento em interfaces inclinadas. Sabe-se que o sistema local de coordenadas de cada elemento, de acordo com a figura 3.03, possui o eixo local  $\bar{x}_3$ , na direção normal ao elemento, sendo as outras direções definidas pelas suas incidências.

Uma vez que o sistema de equações algébricas esteja montado e a matriz de transformação de coordenadas definidas, deve-se realizar, para o  $i$ -ésimo nó do elemento  $n$ , que possua interface inclinado, a seguinte transformação:



$$\begin{aligned}
\mathbf{H}' &= \mathbf{H}\mathbf{R}^T \\
\mathbf{G}' &= \mathbf{G}\mathbf{R}^T \\
\mathbf{u}' &= \mathbf{u}\mathbf{R} \\
\mathbf{p}' &= \mathbf{p}\mathbf{R}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

De forma explícita, deve-se realizar o seguinte procedimento:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{i1}\mathbf{R}^T & \mathbf{H}_{i2}\mathbf{R}^T & \dots & \mathbf{H}_{in}\mathbf{R}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i1}\mathbf{R}^T & \mathbf{G}_{i2}\mathbf{R}^T & \dots & \mathbf{G}_{in}\mathbf{R}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i\mathbf{R} \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

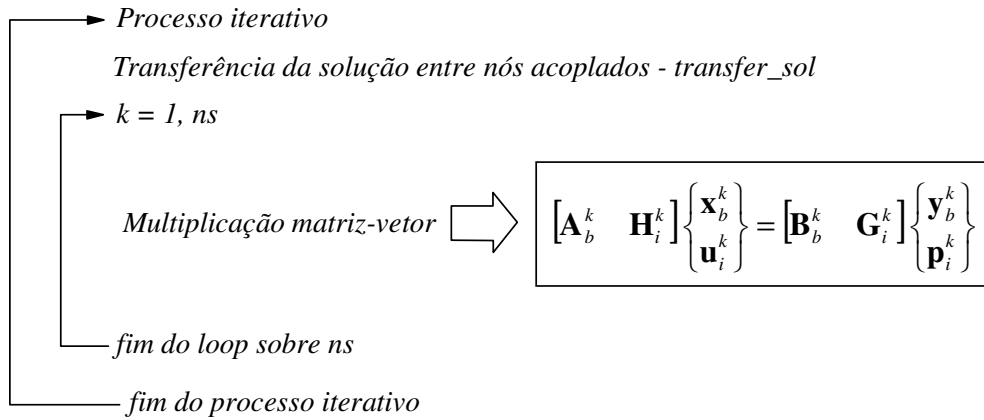
#### 4.4. Resolução do Sistema Acoplado

A resolução do sistema matricial global acoplado é realizada, como já visto, através da utilização dos *solvers* iterativos, os quais realizam, ao longo do processo iterativo, basicamente, operações de multiplicação matriz–vetor e vetor–vetor. As iterações são realizadas até que se encontre a solução do problema dentro uma dada tolerância.

O principal objetivo deste procedimento é o de se resolver o sistema matricial global de equações sem que o mesmo seja explicitamente montado. Sendo assim, tal procedimento é realizado de forma independente para cada uma das sub-regiões. Para isso, faz-se, portanto, apenas necessário acessar, quando do cálculo da contribuição de uma dada sub-região, no produto matriz–vetor em questão, as correspondentes variáveis dessa sub-região. Em geral, as variáveis de nós de interface serão atualizadas ao longo do processo iterativo.

Nota-se que, dentro do processo iterativo, há um “*loop*” sobre o número de sub-regiões, onde, para cada sub-região, computa-se a correspondente contribuição no produto matriz-vetor. No início de cada nova iteração, os valores das variáveis acopladas são atualizados, como mostra a figura 4.04. Ainda cabe dizer que, por um

processo similar ao descrito na figura 4.04, realiza-se o produto  $\mathbf{A}^T \times \mathbf{v}$ , que também ocorre em esquemas iterativos de Krylov para sistemas não-hermitianos.



*Figura 4.04 – Processo iterativo*

Na figura 4.04 o sistema indicado é apresentado de forma genérica, para ressaltar que o procedimento de acoplamento é, de fato, genérico e aplicável a todos os tipos de problemas e métodos e métodos numéricos.

## Capítulo 05 - Aplicações

---

Neste capítulo, apresentam-se vários exemplos que consideram a realização de análises elastodinâmicas no domínio da frequência, através dos quais buscou-se observar a eficiência dos módulos computacionais desenvolvidos. Ênfase especial é dado à observação do desempenho da estratégia de acoplamento EC-EC e das estratégias de integração implementadas, importantes por exemplo, na simulação dos elementos descontínuos.

Comparações são feitas, quando possível, com soluções analíticas ou com outros pesquisadores. Em todas as análises o *solver* iterativo utilizado foi o J-BICG, com tolerância de  $10^{-5}$ .

### **Aplicação 5.01 : Vigas com Subregiões**

Este exemplo trata da análise dos deslocamentos de uma viga engastada livre, sob carregamento harmônico de compressão em sua extremidade livre. Validação da resposta e performance do algoritmo de acoplamento genérico EC-EC, no caso elastodinâmico, são observados. Os vários procedimentos de integração implementados são usados na análise.

Em uma primeira análise, o domínio do problema é discretizado em duas subregiões, sendo as propriedades físicas determinadas conforme a figura 5.01

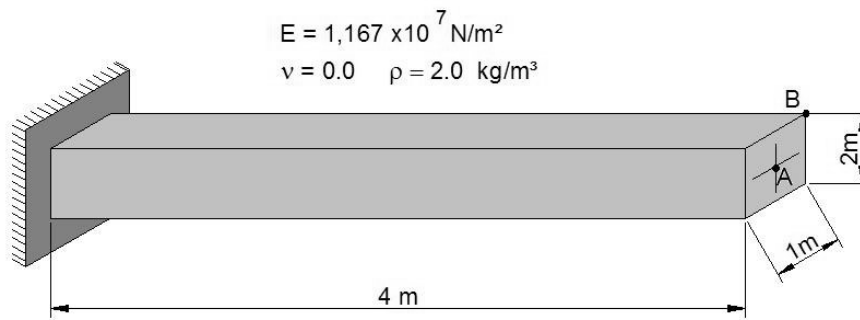


Figura 5.01 – Subdomínios acoplados

Para a discretização de cada uma das subregiões, utilizou-se um modelo com 6 elementos quadrangulares de 4 nós, resultando em sistema final acoplado de 16 nós. O esquema adotado das subregiões é ilustrado conforme a Figura 5.02.

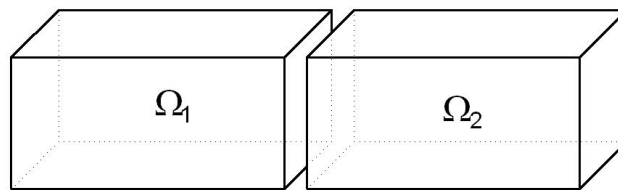


Figura 5.02 – Duas subregiões acopladas

A resposta final analisada no ponto B da figura 5.01, sob a ação de um carregamento harmônico do tipo  $p(t) = P_0 \sin(\omega t)$ , com  $P_0 = 1000 \text{ N}$  e  $\omega = 0,628 \text{ rad/s}$ , reconstituída no domínio do tempo via transformação inversa segundo o algoritmo FFT, com utilização de 32 pontos de frequência. Compara-se as respostas obtidas com a resposta analítica, fornecida por Clough e Penzien, 1993, no gráfico 5.1.

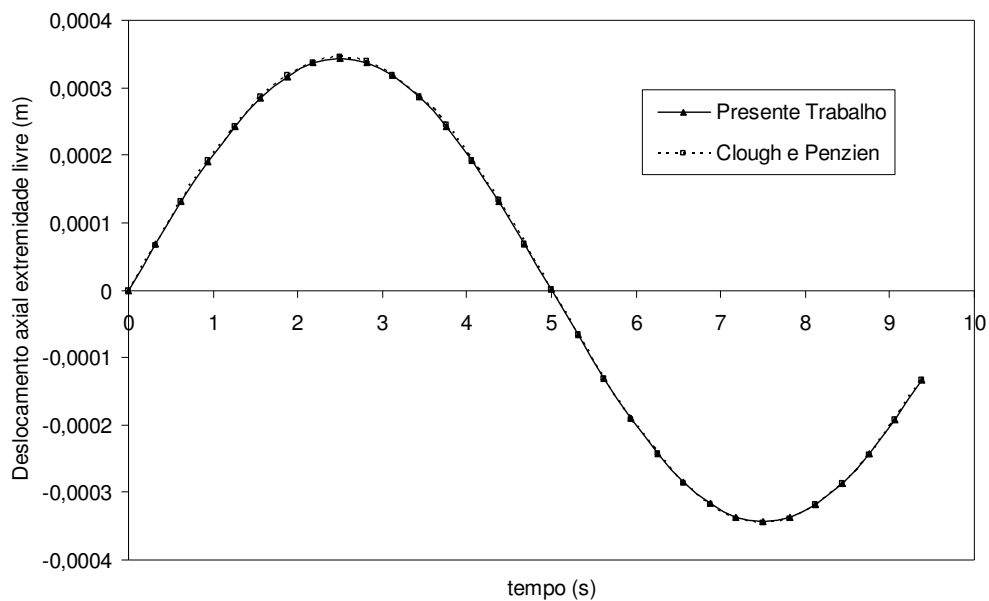


Gráfico 5.01 – Resposta no tempo do deslocamento na extremidade livre

As análises foram feitas para os diversos procedimentos especiais de integração, variando-se o número de pontos de integração adotado (ver definição na página XX) (figura 5.02).

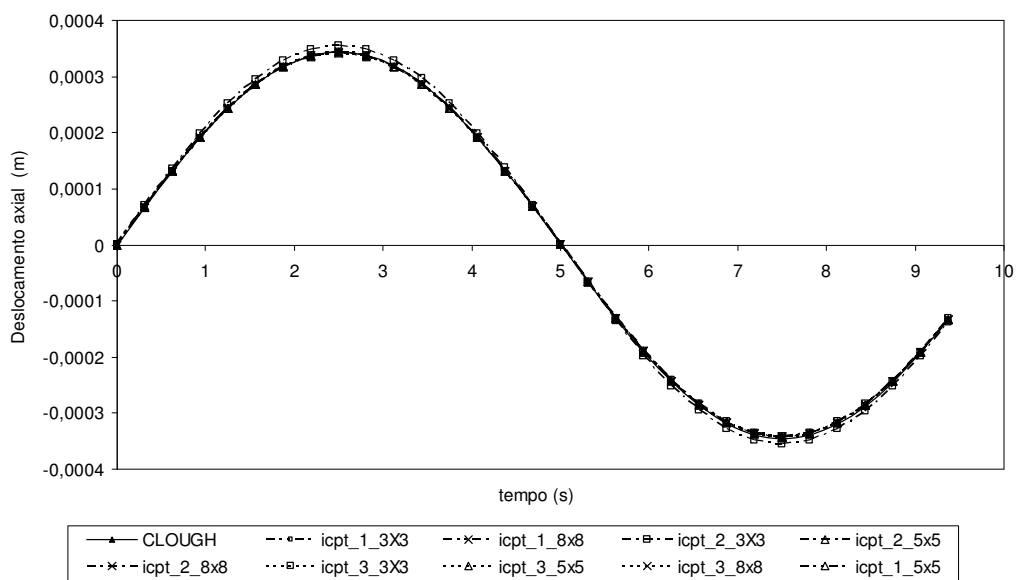


Gráfico 5.02 – Resposta no tempo do deslocamento na extremidade livre em função dos processos de integração e do número dos pontos de integração

Os resultados encontrados foram extremamente satisfatórios, pois o sistema atingiu muito rapidamente a resposta exata, inclusive com poucos pontos de integração.

Além disso, para se estabelecer comparações, sobre o erro da resposta e a eficiência do processo de acoplamento associado ao *solver* iterativo, analisou-se o mesmo problema, agora no ponto A, com oito subregiões idênticas (Figura 5.03). Este problema, apesar de possuir solução analítica simples, é complexo do ponto de vista computacional, pois há no modelo cantos e arestas que forçam o uso de elementos de contorno descontínuos nas interfaces.

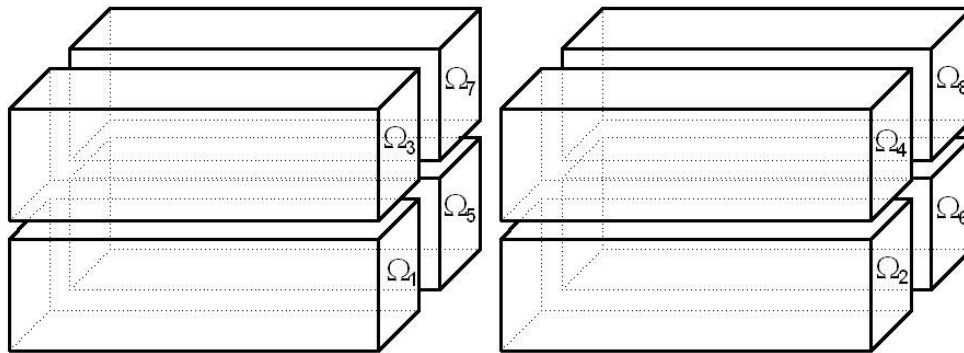


Figura 5.03 – Oito subregiões acopladas

A fim de verificar os resultados, comparam-se as amplitudes complexas de deslocamento na extremidade da viga com os correspondentes valores analíticos fornecidos por Clough e Penzien, 1993. Os gráficos de 5.03 a 5.05 apresentam, para determinados valores de  $d$  (deslocamento nodal considerado na geração dos elementos descontínuos), o erro de cada processo especial de integração, em função o número pontos de integração.

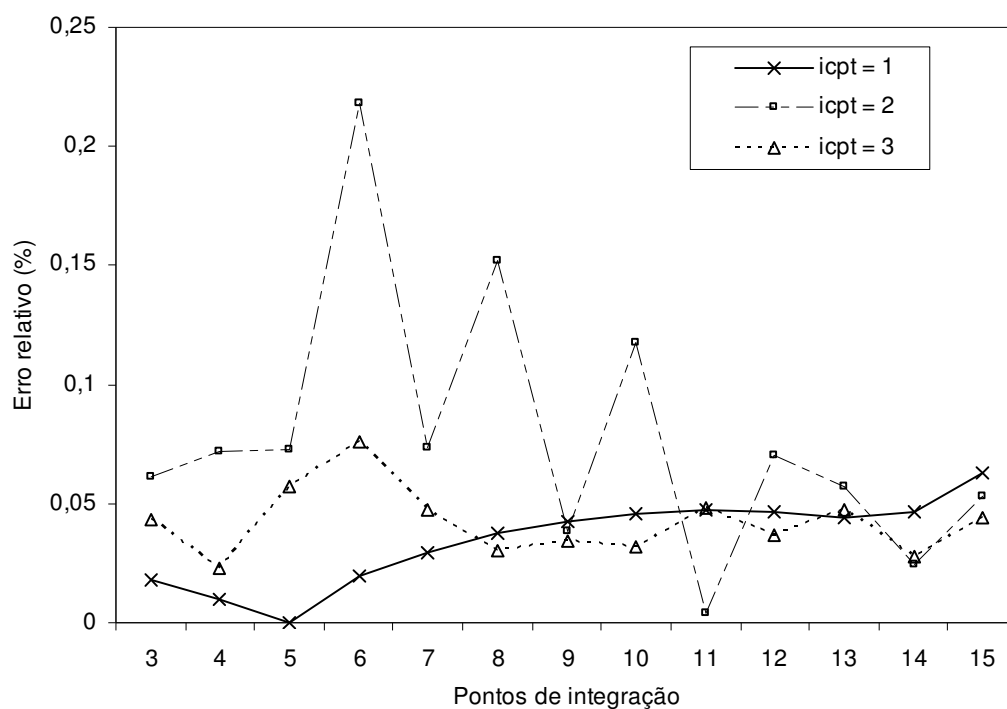


Gráfico 5.03 – Erro na avaliação do deslocamento  $\times$  número de pontos de integração. ( $d=0.01$ )

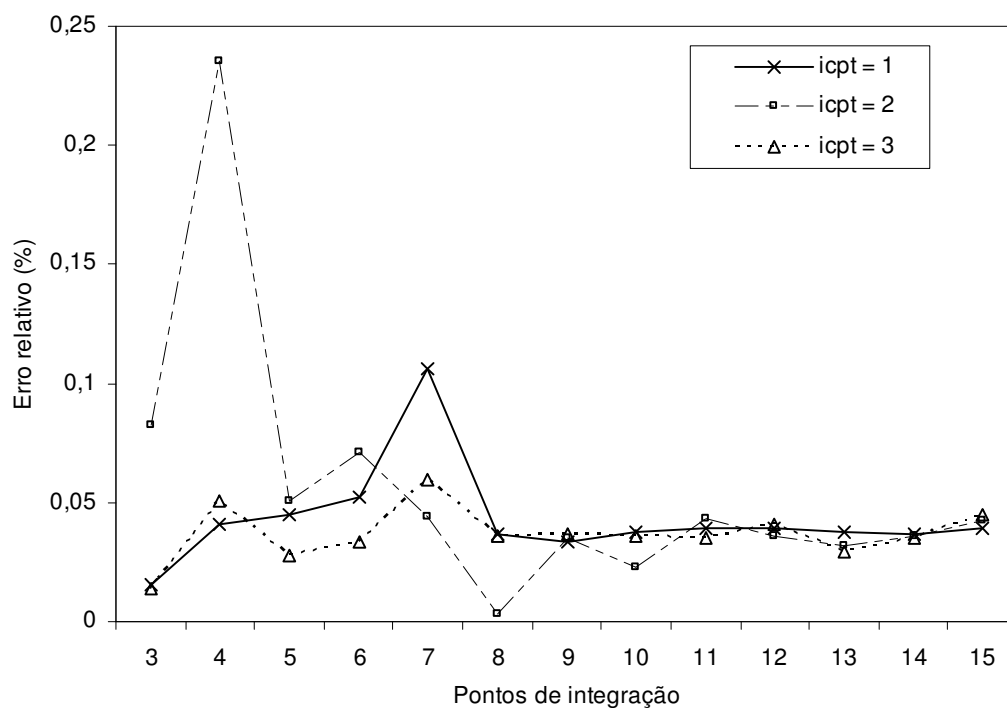


Gráfico 5.04 – Erro na avaliação do deslocamento  $\times$  número de pontos de integração. ( $d=0.05$ )

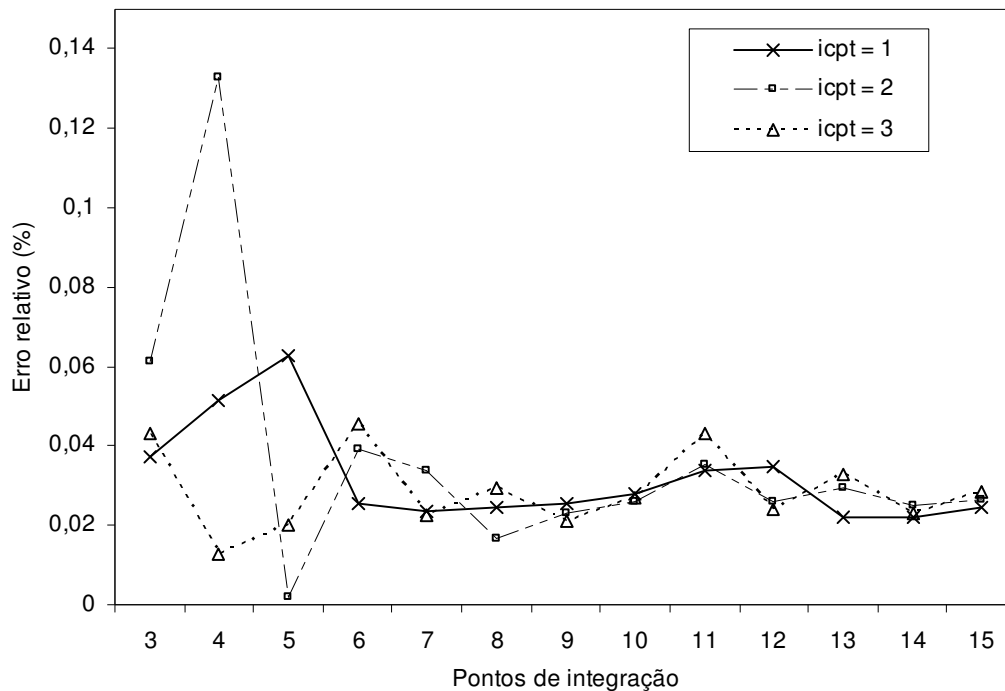


Gráfico 5.05 – Erro na avaliação do deslocamento  $x$  número de pontos de integração. ( $d=0.1$ )

Os resultados apresentados nos gráficos 5.03 a 5.05, demonstram a eficiência dos processos de integração desenvolvidos. Observando-se os erros, vê-se que o processo especial de integração  $icpt=2$  é o que apresenta maior erro relativo, apesar de ser um erro extremamente pequeno. Para valores de  $d \geq 0,05$  os resultados são considerados extremamente positivos, para  $d = 0,01$  percebe-se que o *solver* perde eficiência, fato que naturalmente se espera em função da quasi-singularidade do sistema de equações (haverá pontos fonte praticamente coincidentes).

Ressalta-se, porém, que não se faz necessário considerar valores tão pequenos de  $d$ , como se comprova nos gráficos 5.06 a 5.08, os quais demonstram a eficiência do *solver* utilizado. Sendo que, para valores de  $d \geq 0,05$  sua convergência é de 10 a 15% da ordem do sistema, para valores de inferiores a 0,05, vê-se que o *solver* perde eficiência, atingindo índices de eficiência (relação entre o número de iterações para convergência do *solver* e o número total de iterações definidas em função da ordem do sistema) de, em média, 60%



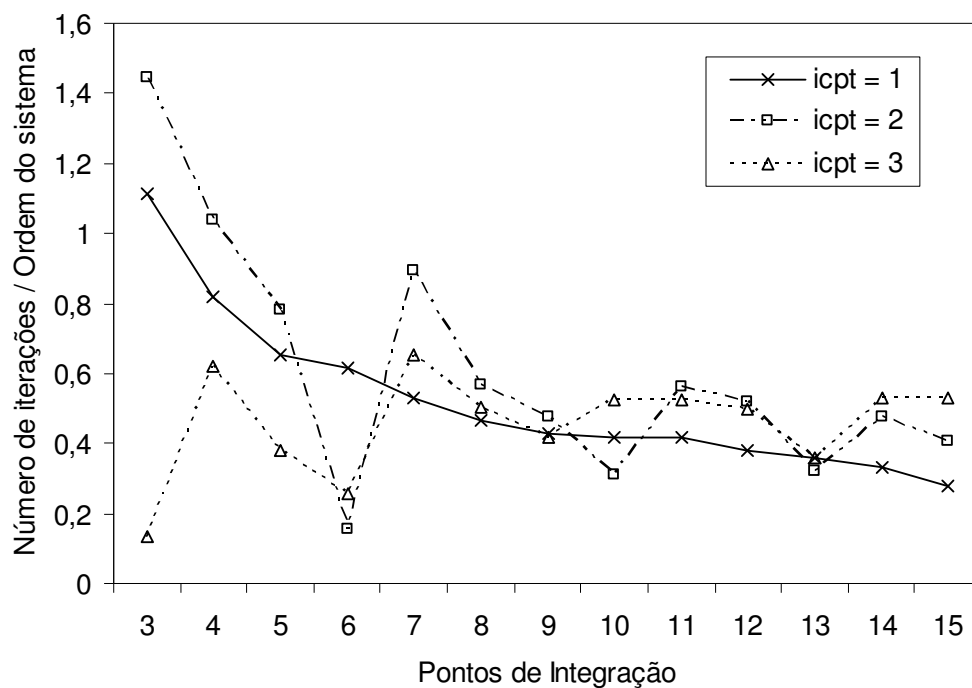


Gráfico 5.06 – Eficiência do Solver J-BICG ( $d=0,01$ )

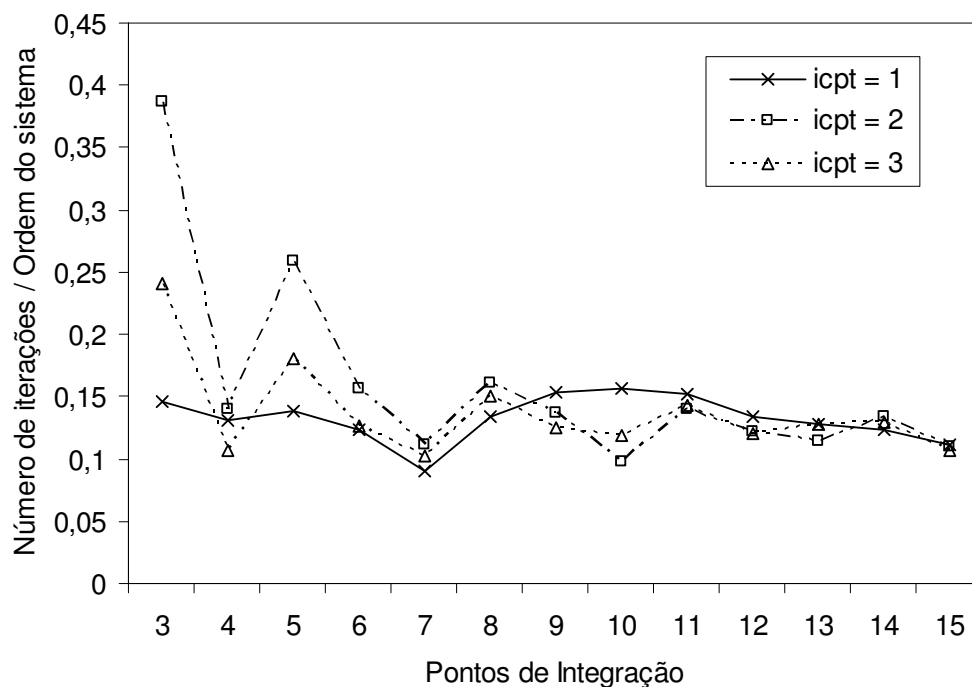


Gráfico 5.07 – Eficiência do Solver J-BICG ( $d=0,05$ )

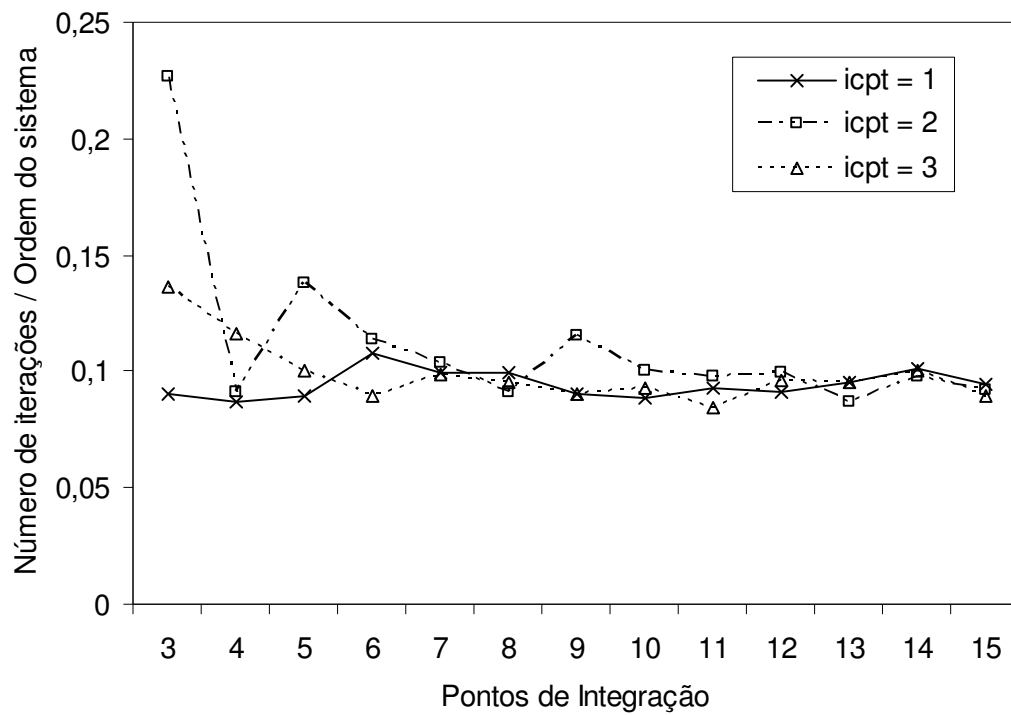


Gráfico 5.08 – Eficiência do Solver J-BICG ( $d=0,1$ )

### Aplicação 5.2: Interação solo-fundação

Neste problema, verifica-se o desempenho do programa na análise da interação solo-fundação genérica, mostrada na Fig. 5.04.

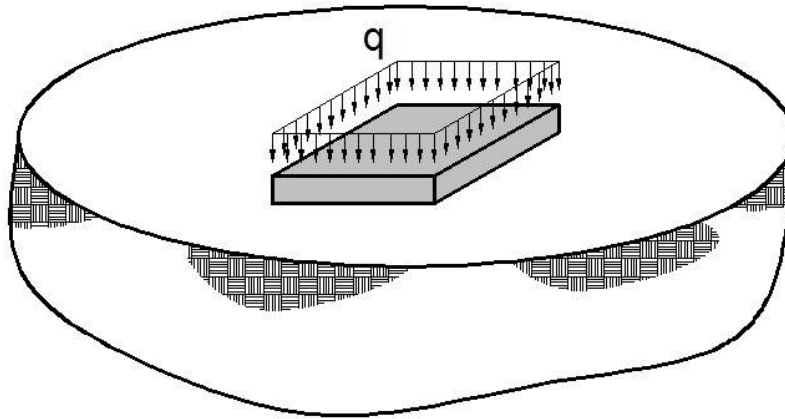


Figura 5.04 – Esquema da iteração solo-fundação

Comparações foram feitas com os resultados apresentados por Qian, Tham e Cheung, 1996, os quais modelaram este problema adotando as seguintes rigidezes relativas:

$$E = \begin{cases} E_1 = 0,016 \\ E_2 = 0,24 \\ E_3 = 13,2 \end{cases} ,$$

onde, para  $E \geq 1,0$  a fundação é considerada rígida. Tais valores são determinados a partir da relação:

$$E = \frac{E_s}{12E_f} \left( \frac{h}{a} \right)^3, \quad (5.1)$$

onde  $E_s$  e  $E_f$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade do solo e da fundação,  $h$  é a altura da fundação ( $h = 200mm$ ) e  $a$  a metade da aresta da fundação quadrada, adotada, neste caso, sendo  $a = 2000mm$ . Na análise adotou-se  $h/a = 0,10$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,30$ . A carga uniformemente distribuída atuante na face superior do bloco é  $q = -100 \text{ kN} / \text{m}^2$ .

Para a montagem dos gráficos de comparação de resposta, considerou-se o deslocamento adimensional,

$$\Delta = \left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{E_s |w|}{aq(1+\nu_s)} \right), \quad (5.2)$$

onde  $|w|$  é o módulo da componente real da amplitude de deslocamento na fundação para uma determinada frequência. A Frequência adimensional é definida como sendo:

$$\omega_a = \frac{\omega a}{c_2}, \quad (5.3)$$

onde  $\omega$  é a frequência calculada (rad/s) e  $c_2$  é a velocidade de propagação de onda secundária no solo (definida no capítulo 2).

As figuras 5.5 e 5.6 fornecem a malha de elementos de contorno utilizada com 336 elementos de contorno quadráticos de 8 nós (*q8\_3dbe*) para o bloco, 336 elementos de contorno quadráticos de 8 nós (*q8\_3dbe*) para o solo e 240 elementos de fechamento, que resulta em um sistema final de 6201 graus de liberdade. Note que essa malha é mais refinada nos cantos, onde a tensão tende a assumir valores elevados, dependentes da rigidez relativa. Os gráficos de 5.9 a 5.11 apresentam as repostas obtidas do deslocamento vertical em três diferentes pontos de análise da fundação (centro do bloco, canto e aresta), para 8x8 pontos de integração, utilizando-se do processo de integração icpt=1.

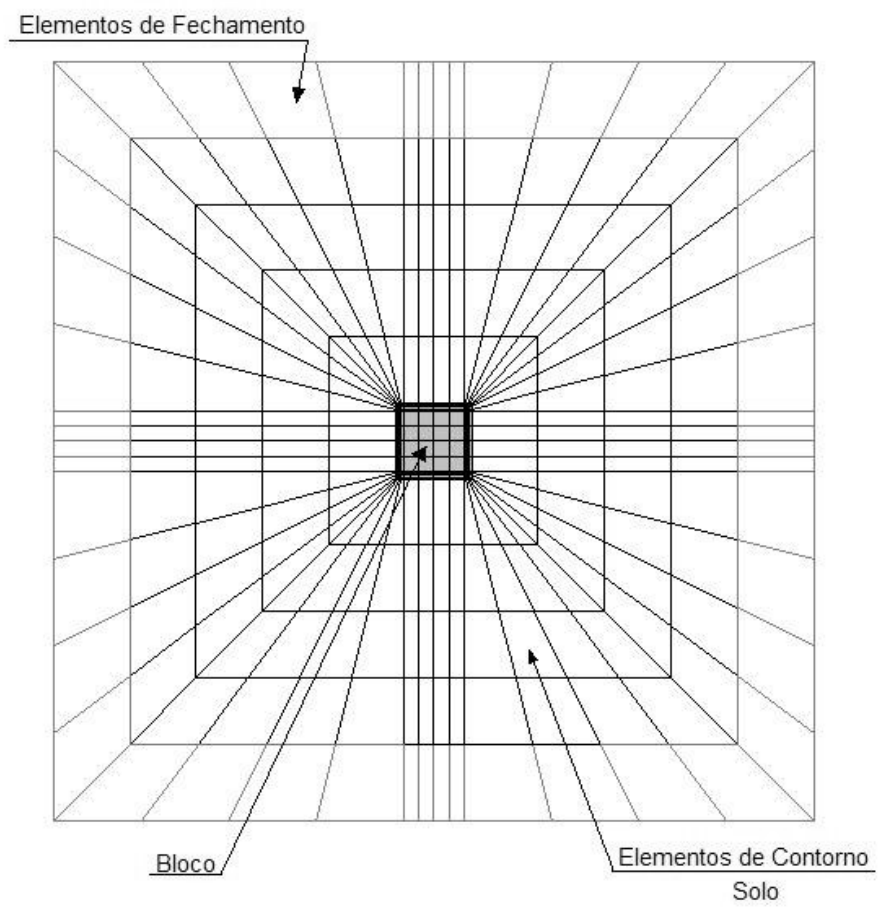


Figura 5.5 – Malha de elementos

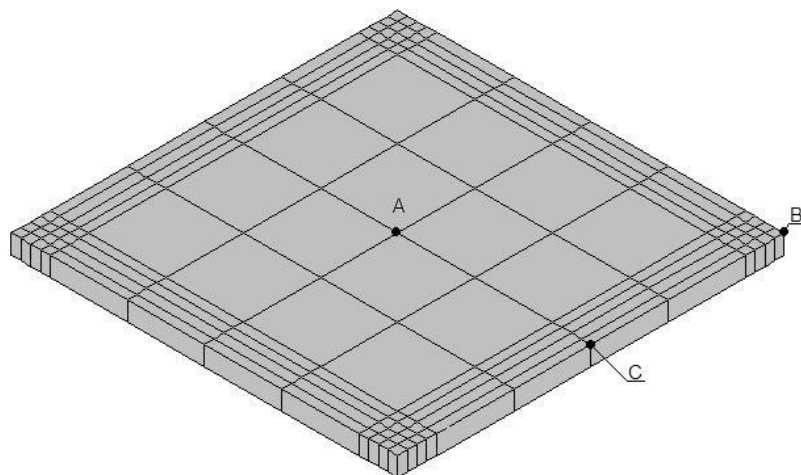


Figura 5.6 – Detalhe da malha de elementos de contorno da fundação

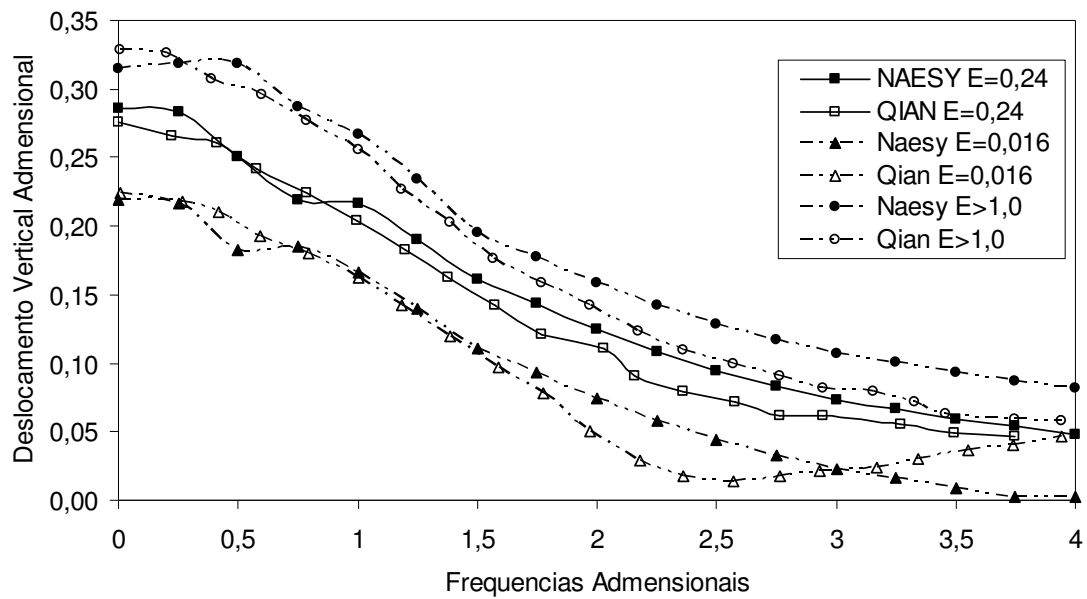


Gráfico 5.09 – Deslocamento adimensional no nó do canto (nó B)

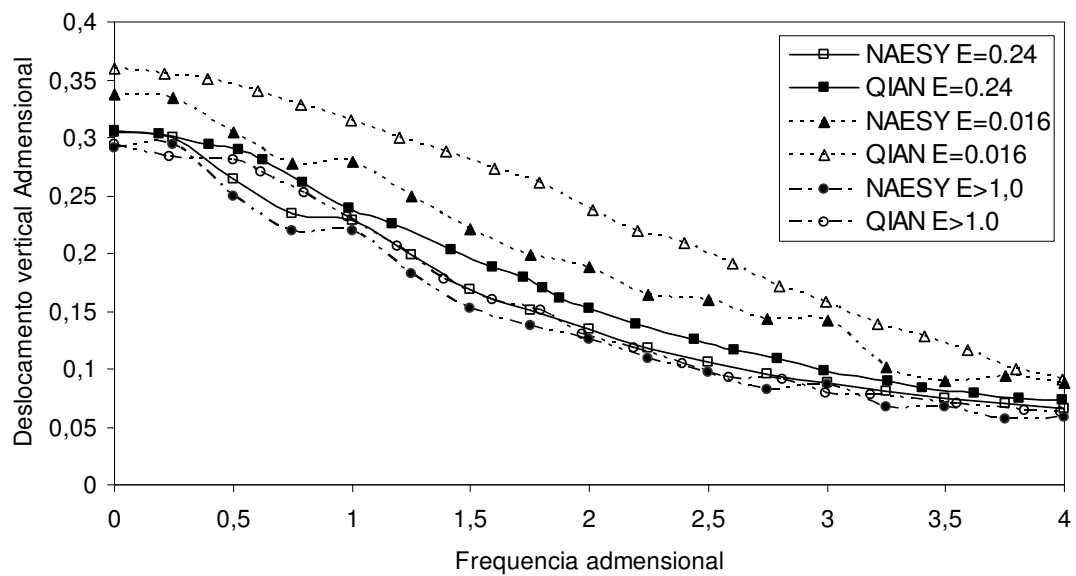


Gráfico 5.10 – Deslocamento adimensional no nó do centro (nó A)

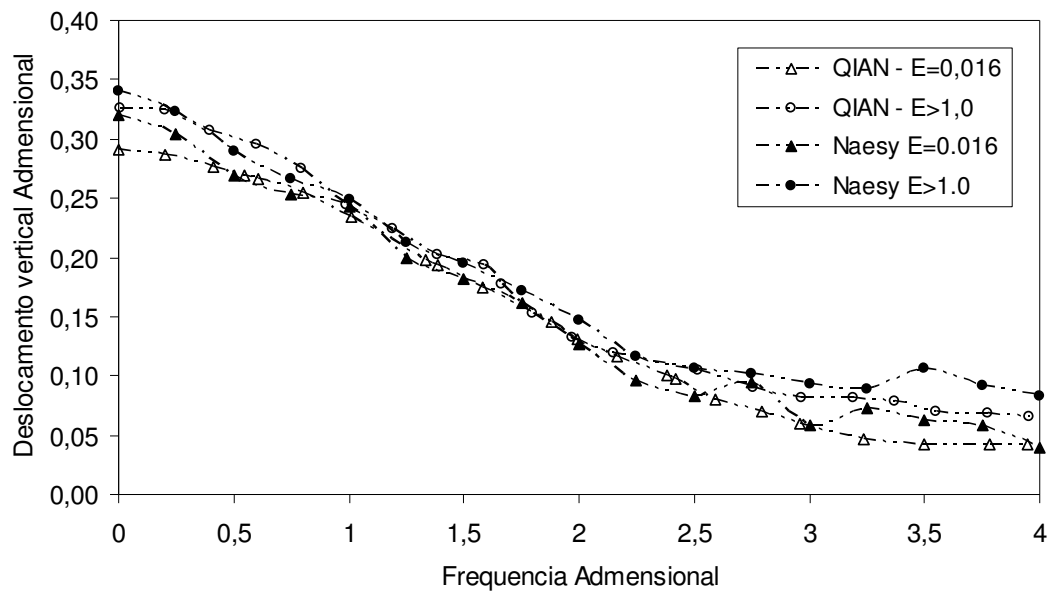


Gráfico 5.11 – Deslocamento adimensional no nó da aresta (nó C)

Os gráficos 5.12 e 5.13 apresentam resultados referentes ao desempenho do *solver* J-BiCG, e do algoritmo de acoplamento genérico.

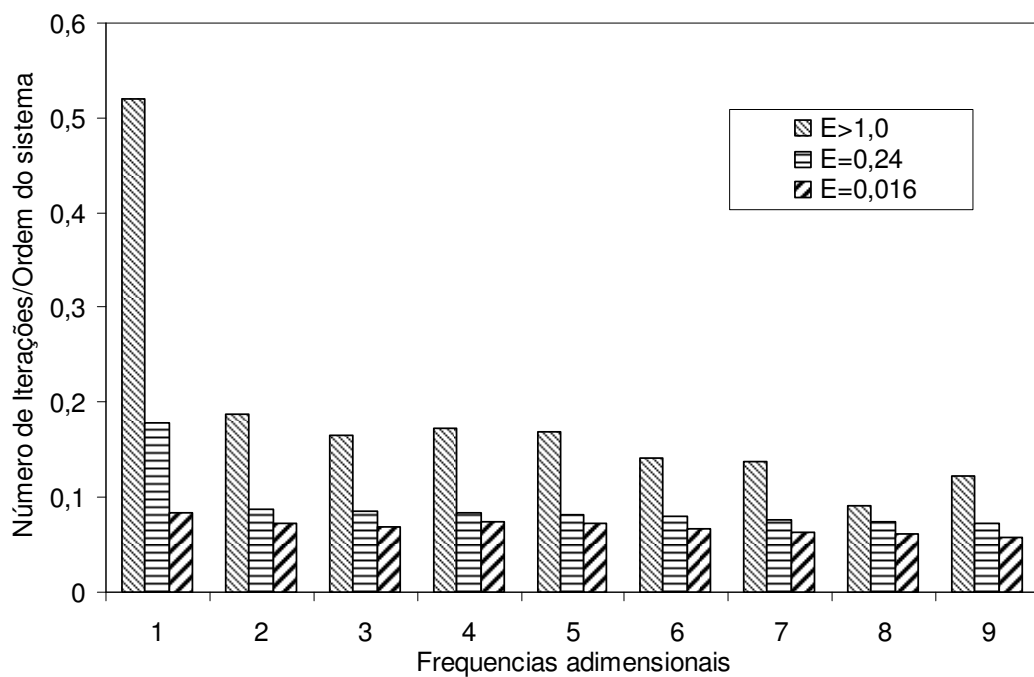


Gráfico 5.12 – Número de iterações pela ordem do sistema para cada caso de rigidez analisada

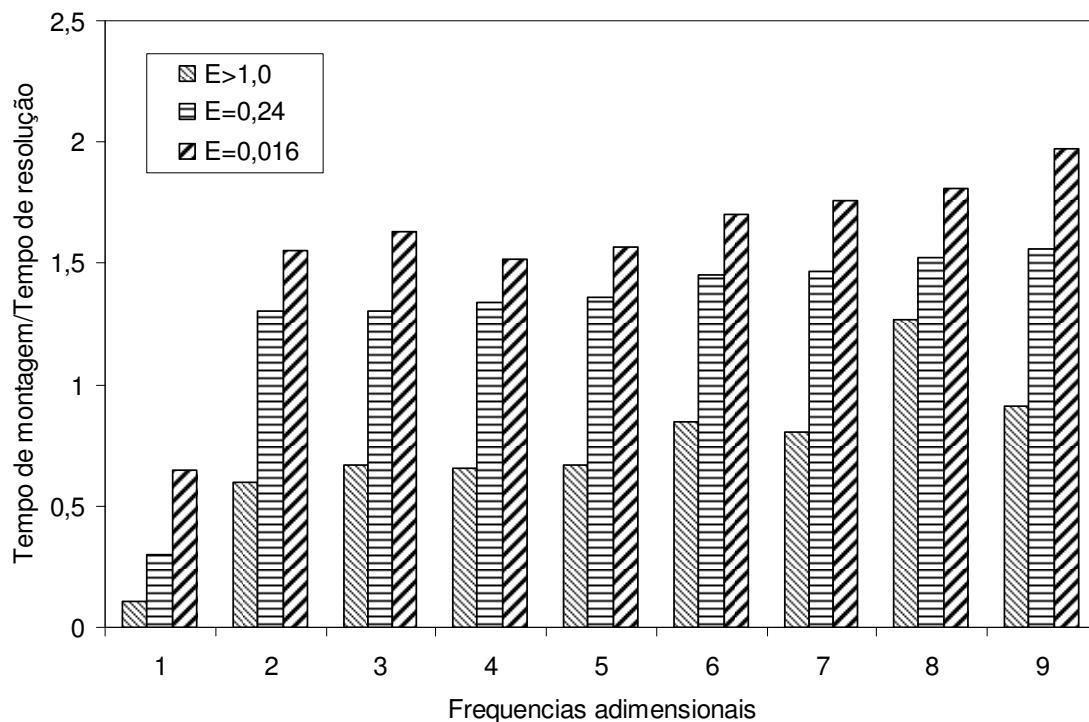


Gráfico 5.13 – Tempo de montagem do sistema de equações pelo tempo de resolução

Em geral, nos casos em que a fundação não é perfeitamente rígida ( $E \geq 1,0$ ), o *solver* apresenta-se muito eficiente para os diversos valores de frequência considerados, convergindo em um número de iterações, em média, inferior a 10 % da ordem do sistema (gráfico 5.12). Ressalta-se ainda que, mesmo para  $E \geq 1,0$ , usualmente relacionado com mal-condicionamento do sistema de eqs., o *solver* não é todo ineficiente, convergindo em um número de iteração abaixo de 20% de sua ordem para a maioria das frequências analisadas. No gráfico 5.13, vê-se que, para o *solver* utilizado, o tempo de montagem de CPU medido é, em média, superior ao tempo de resolução, resultado este que, na verdade, não se espera com utilização de *solvers* diretos (Silva, 2005).

Do ponto de vista de precisão, vê-se que os valores de deslocamento calculados (gráficos 5.9 a 5.11) apresentam boa concordância com aqueles apresentados por Qian, Tham e Cheung, 1996.



### Aplicação 5.3: Interação Fundação – Solo – Fundação

Aqui, analisa-se a interação dinâmica fundação-solo-fundação (figura 5.7). Basicamente, resolve-se o mesmo exemplo anterior, mas agora com a introdução de outra fundação física e geometricamente idêntica à primeira, distante 12,5m dela, havendo carga apenas na primeira, em um solo de 150mx210m.

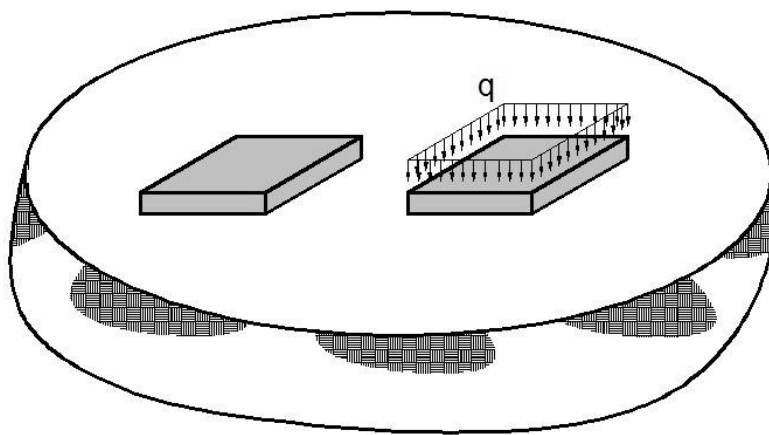


Figura 5.7 –Esquema do Problema

Para a realização de comparações, utilizou-se os seguintes parâmetros:

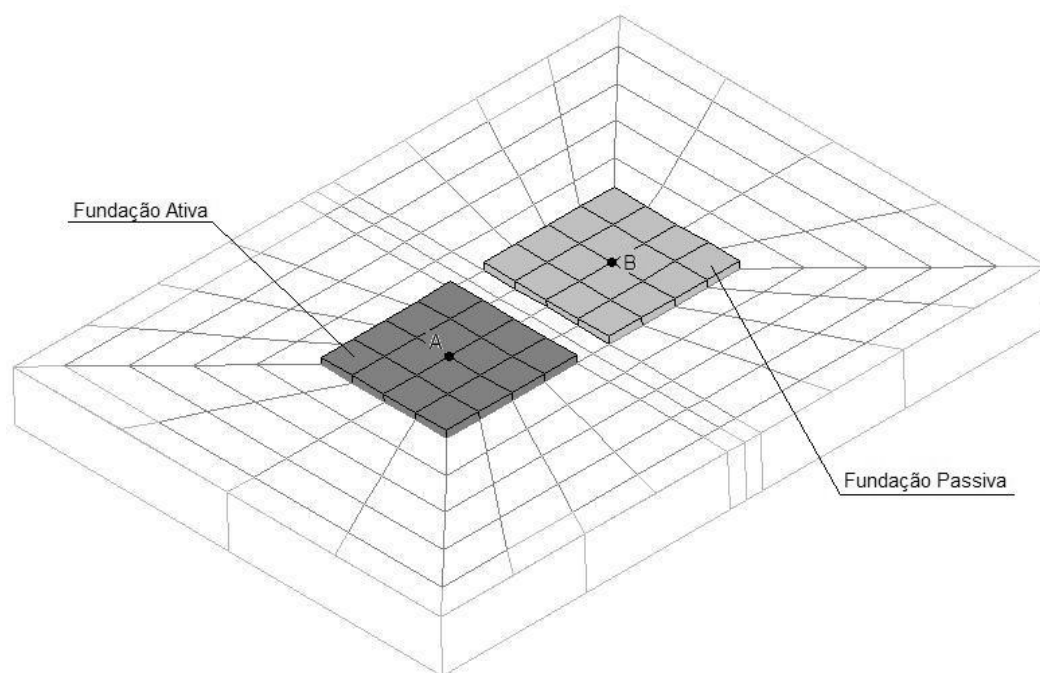
*Solo:*

$$E_s = 20 \times 10^6 \text{ N/m}^2, \nu_s = 1/3.$$

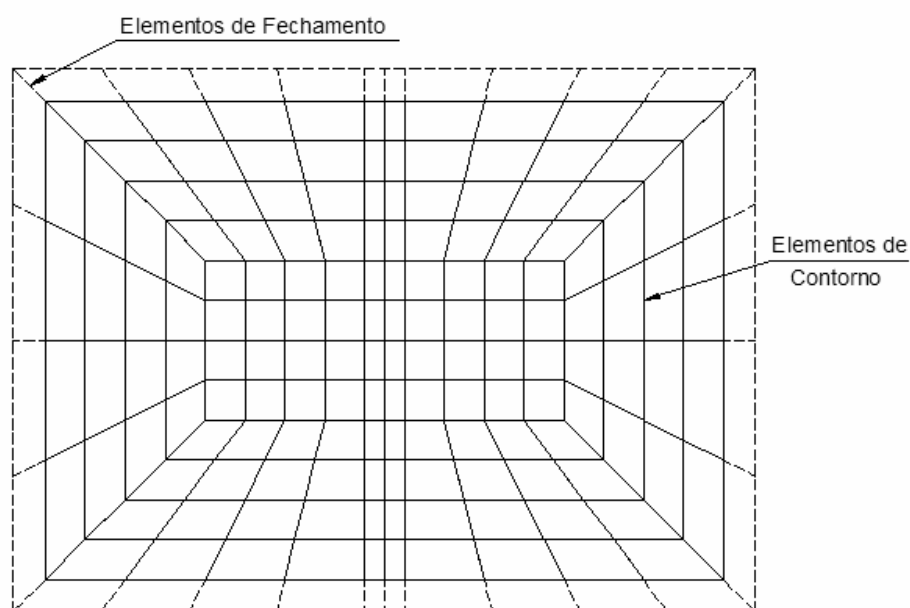
*Fundações:*

$$E_F = 35 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \nu_s = 0,3$$

A malha de elementos de contorno utilizada, possui 48 elementos de contorno quadráticos de 8 nós (q8\_3dbe) para cada uma das fundações, 152 elementos de contorno quadráticos de 8 nós (q8\_3dbe) para o solo e 54 elementos de fechamento. O sistema resultante de 4662 graus de liberdade foi então encontrado.



*Figura 5.8 – Malha de elementos tridimensional*



*Figura 5.9 – Malha de elementos – vista superior*

Os gráficos 5.14 a 5.17 representam a resposta, para os mesmos parâmetros adimensionais definidos no exemplo anterior, a qual também é comparada à fornecida por Qian, Tham e Cheung, 1996. Os pontos de análise estão no centro da face superior

de cada fundação (figura 5.13) e os valores coletados referencem aos deslocamentos verticais reais e imaginários de cada ponto.

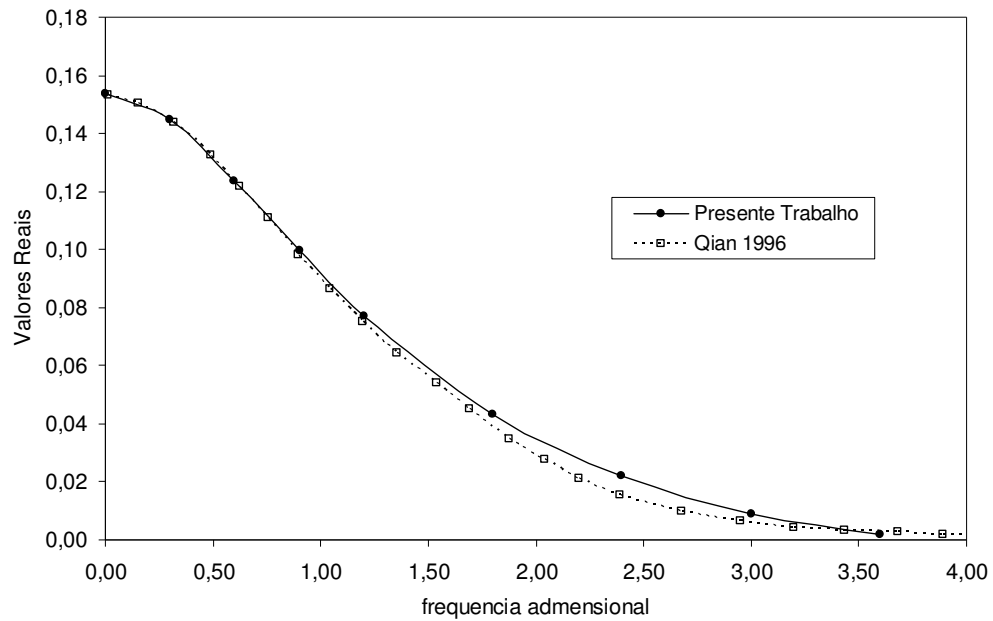


Gráfico 5.14 – Deslocamento adimensional – fundação ativa – Ponto A

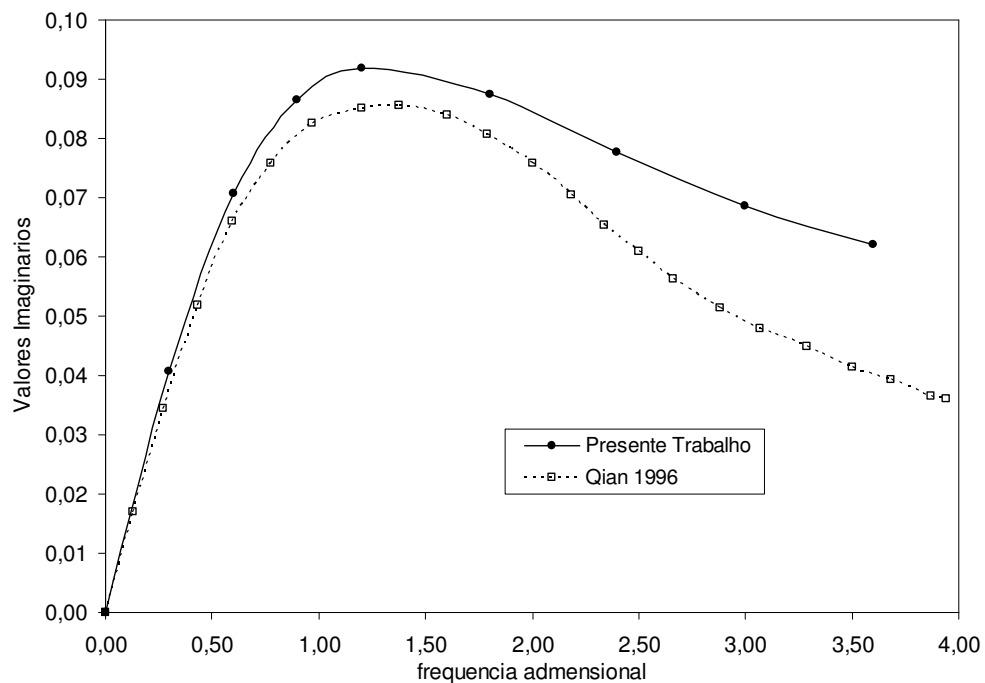


Gráfico 5.15 – Deslocamento adimensional – fundação ativa – Ponto A

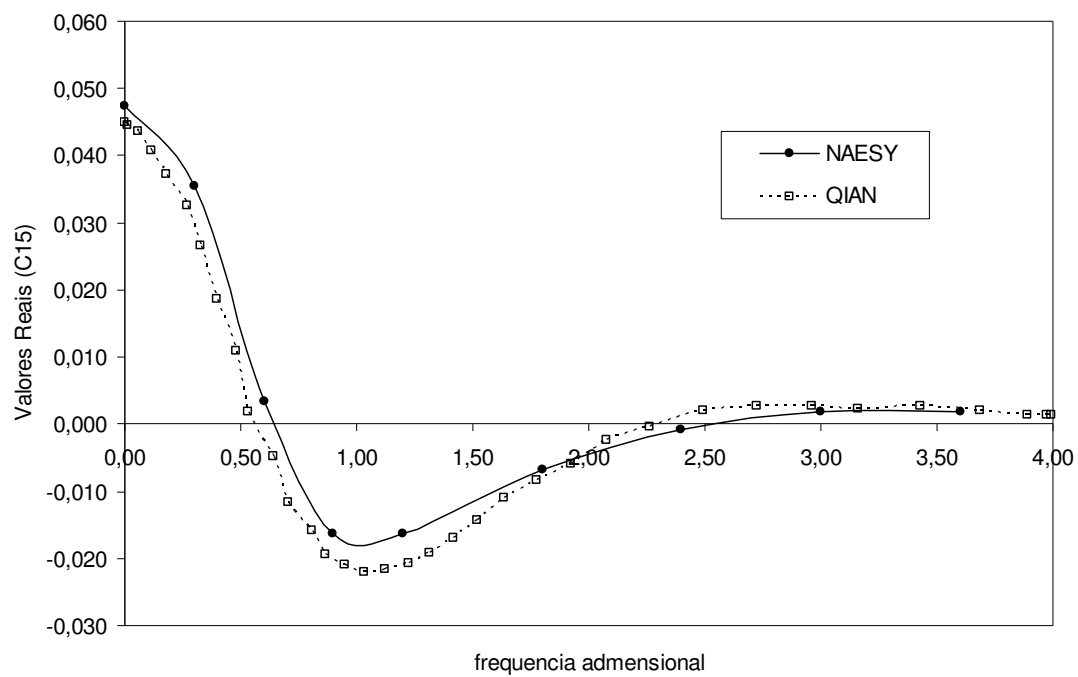


Gráfico 5.16 – Deslocamento adimensional – fundação passiva – Ponto B

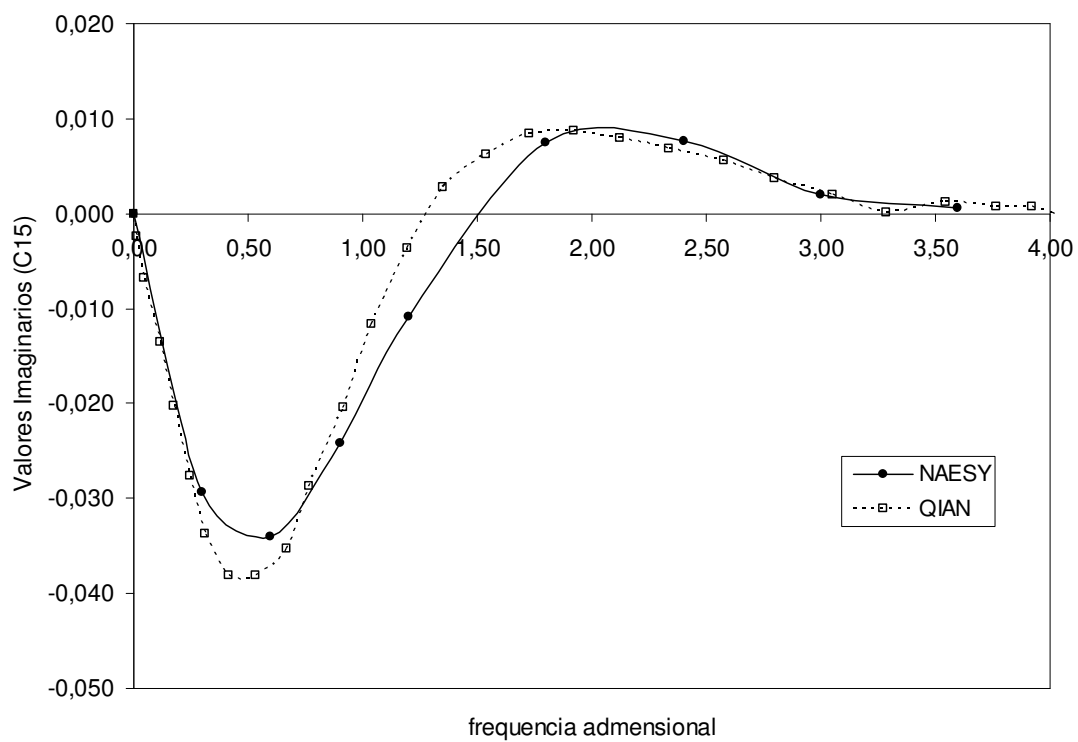


Gráfico 5.17 – Deslocamento adimensional – fundação passiva – Ponto B

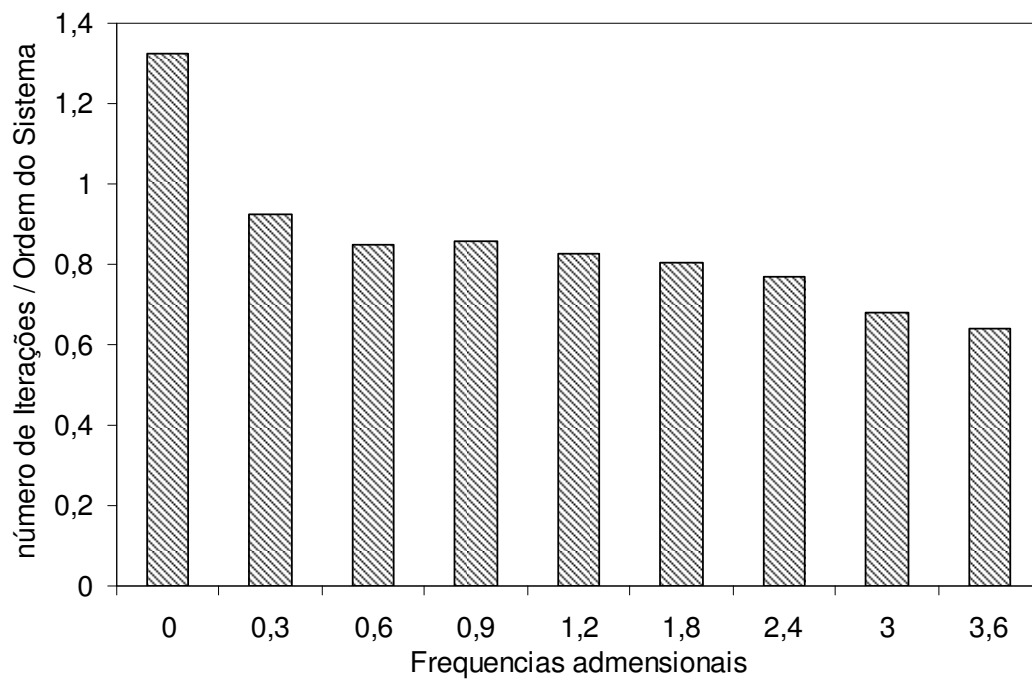


Gráfico 5.18 – Eficiência do Solver iterativo

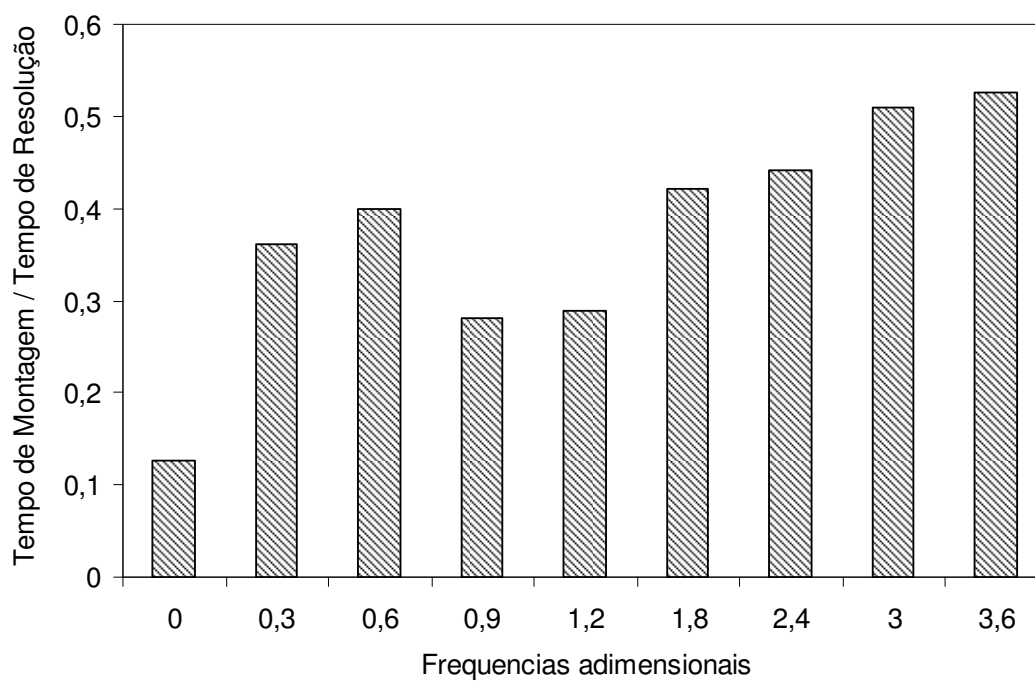


Gráfico 5.19 – Análise do tempo de resolução e montagem

Do gráfico 5.14, onde fornece-se a parte real das amplitudes, vê-se que a boa coincidência entre as respostas calculadas com os módulos computacionais desenvolvidos e aquelas fornecidas por Qian, Tham e Cheung, 1996. As mesmas observações podem ser realizadas para a fundação passiva (gráficos 5.16 e 5.17). Na comparação da parte imaginária da resposta da fundação ativa (gráfico 5.15), percebe-se uma pequena divergência para valores de frequência adimensionais superiores a 1.0. A malha adotada é porém relativamente grosseira e não pôde ser refinada devido à proximidade entre as fundações. Na verdade, trata-se de uma situação prática irrealista.

Neste problema, vê-se que a relação entre o número de iterações para a convergência do solução é da ordem do sistema, atingindo no mínimo 70% dessa ordem (gráfico 5.18), o que indica perda de eficiência do solver, provavelmente pela mal-condicionamento da matriz (malha relativamente grosseira). Em 5.19 apresenta-se as relações entre o tempo de montagem e o tempo de resolução do sistema de equações.

#### **Aplicação 5.4: Solo com Trincheira**

Neste problema analisa-se o desempenho da trincheira no isolamento ativo de vibração. Adicionalmente, também apresentam-se, como nos exemplos anteriores, dados de desempenho do programa computacional.

O problema (vide figura 5.10 e figura 5.11) foi representado por uma malha de 126 elementos de contorno quadráticos de 04 nós (*q4\_3dbe*) de e 176 elementos de fechamento (figura 5.17 e 5.18), resultando em um sistema de equações algébricas da ordem de 441 graus de liberdade.

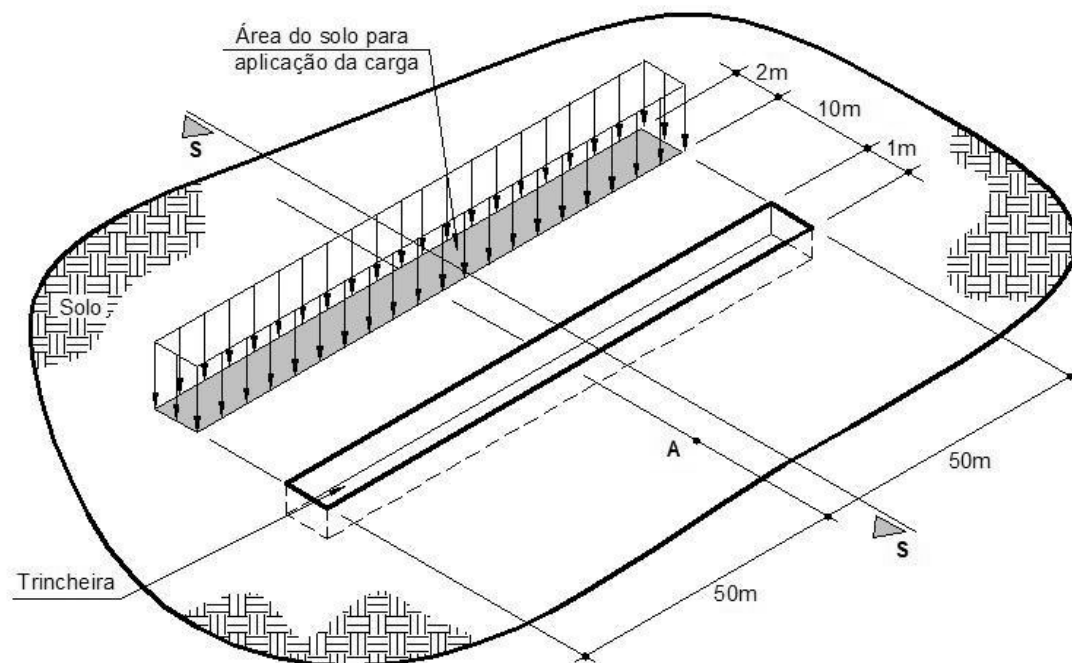


Figura 5.10 – Solo com trincheira – esquema

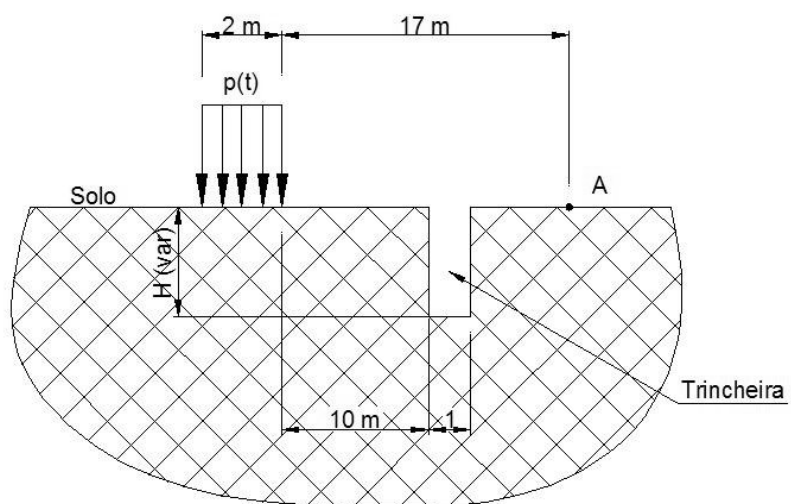


Figura 5.11 – Esquema do problema analisado – Corte S-S

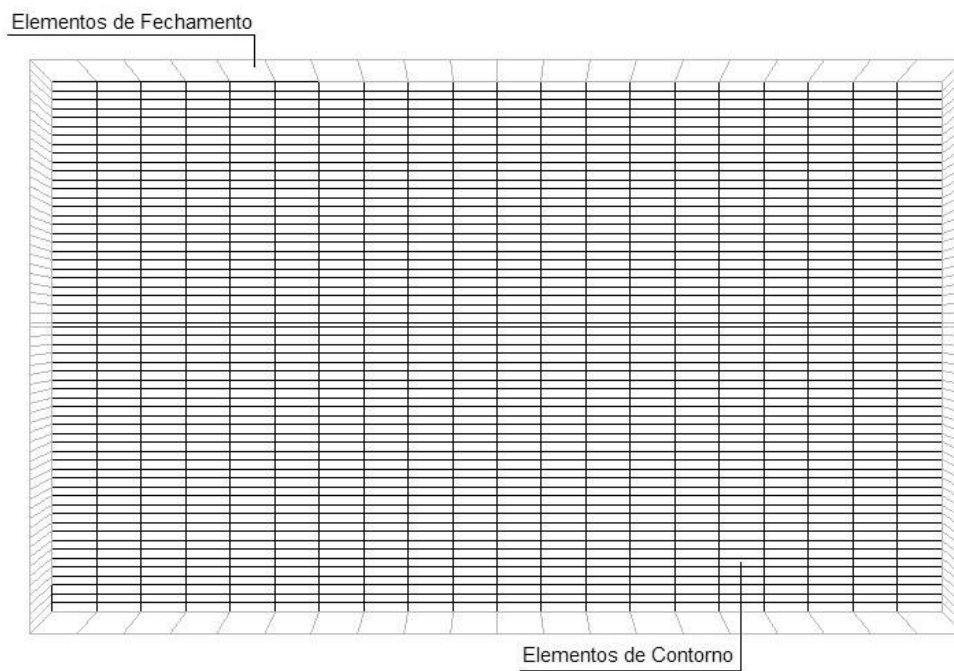


Figura 5.12 – Malha do problema analisado

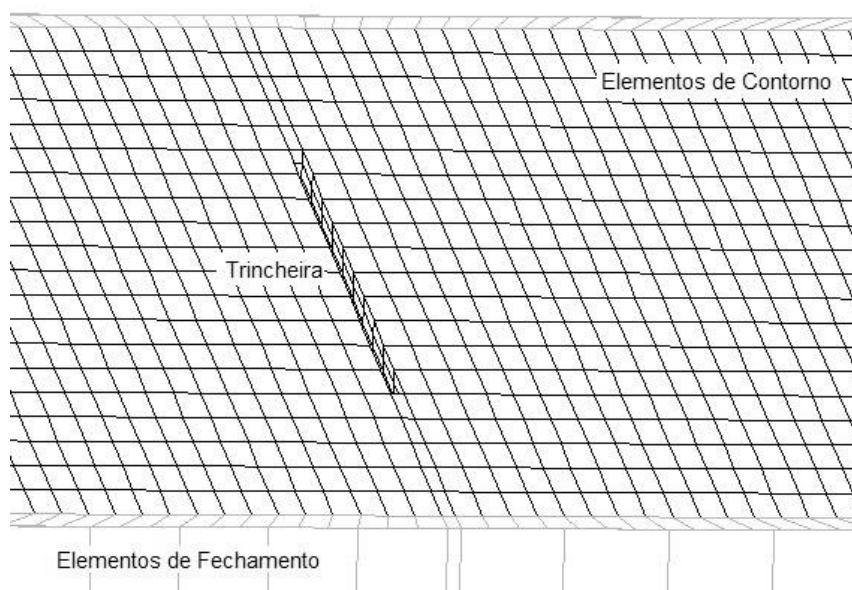


Figura 5.13 – Malha do problema analisado – Detalhe

Na análise adotaram-se os seguintes parâmetros do material:  $E_s = 330 \times 10^3 \text{ kN} / \text{m}^2$



$\nu_s = 0,25$ ,  $\rho = 1,7825 \text{ ton/m}^3$ . A variação temporal da carga é do tipo senoidal com amplitude real de 5 kN/m e frequência de  $20\pi$  rad/s e modelam-se trincheiras de 3, 4, 5 e 6m. Amorim, 2002, analisa o mesmo problema bidimensionalmente via Método dos Elementos de Contorno. Para a comparação com a formulação 3D adotada neste trabalho, considera-se uma faixa de solo de 2 m de largura, que estende-se por 100m na direção longitudinal do problema (figura 5.10), na qual atua a carga descrita anteriormente. As respostas obtidas são apresentadas nos gráficos 5.20 a 5.24.

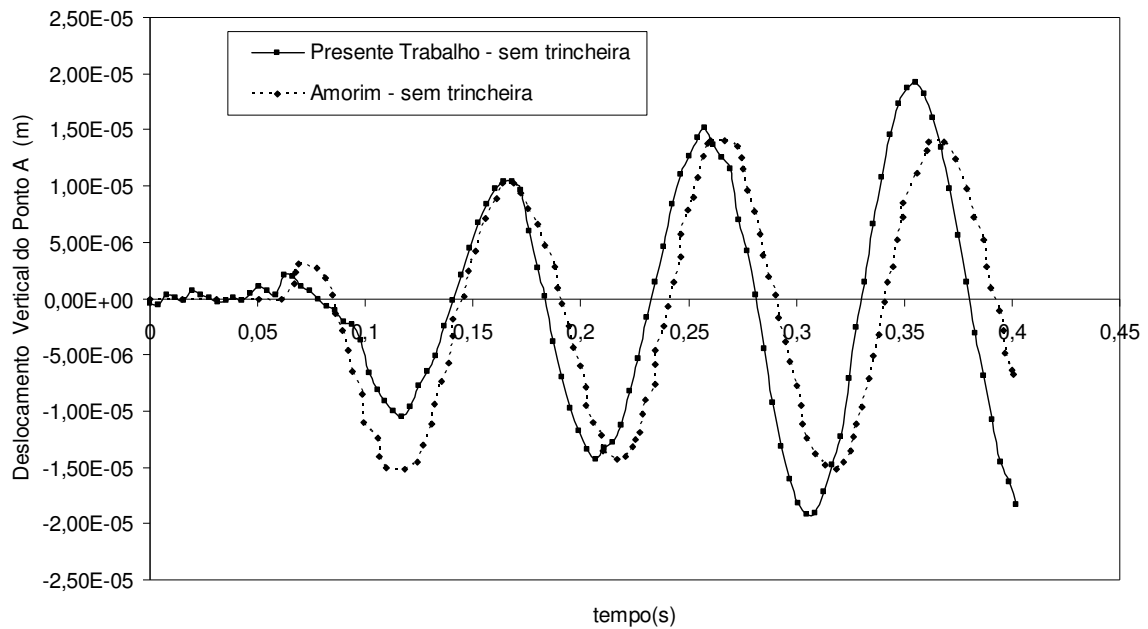


Gráfico 5.20 – Comparação sem utilização de trincheira

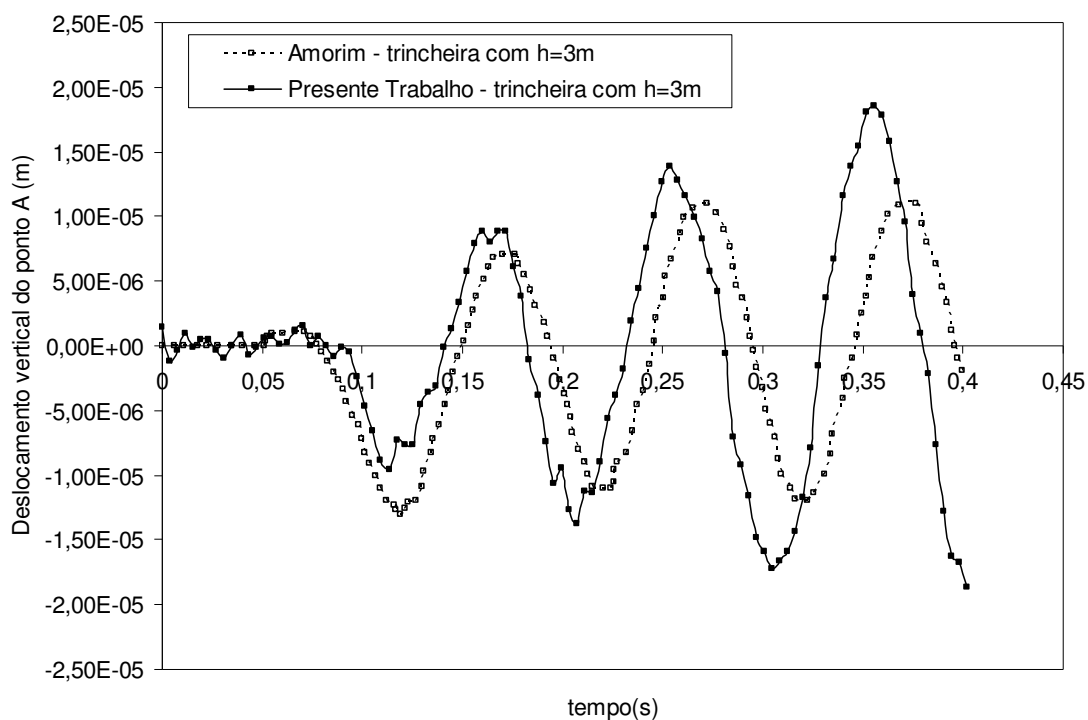


Gráfico 5.21 – Comparação com trincheira de 3m de profundidade

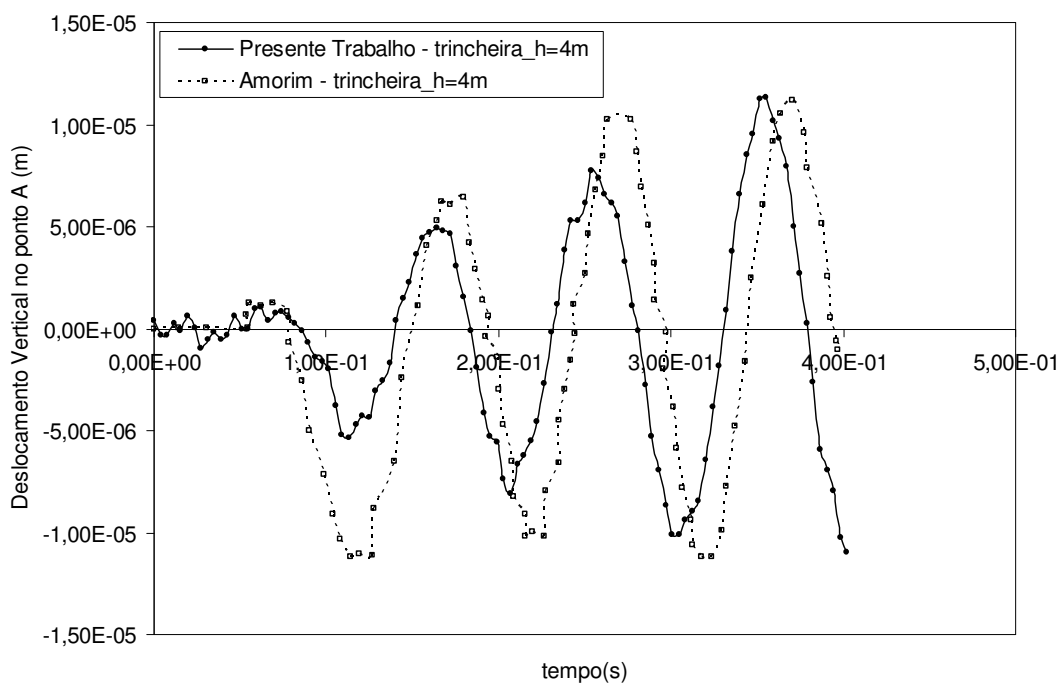


Gráfico 5.22 – Comparação com trincheira de 4m de profundidade

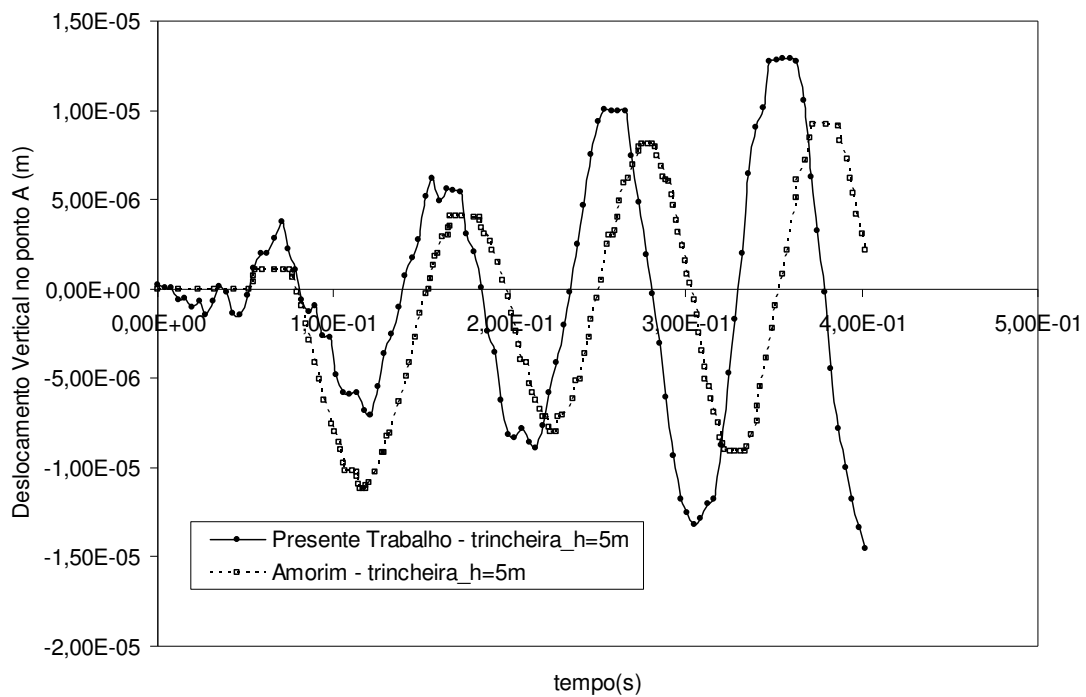


Gráfico 5.23 – Comparação com trincheira de 5m de profundidade

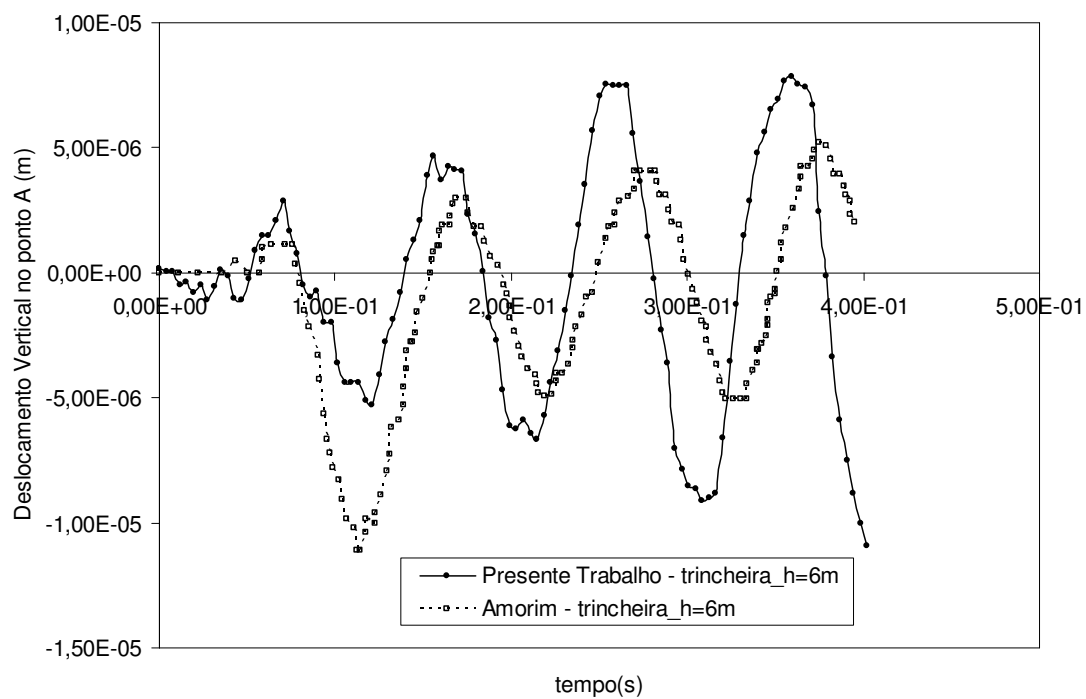


Gráfico 5.24 – Comparação com trincheira de 6m de profundidade

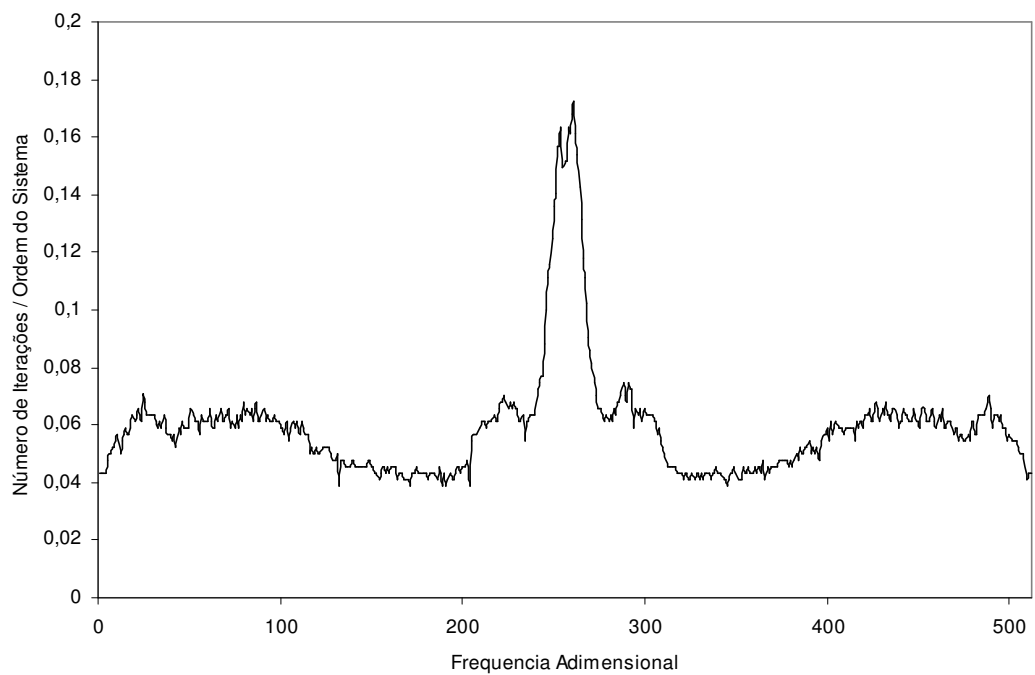


Gráfico 5.25 – Número de iterações pela Ordem do sistema para o solo sem trincheira

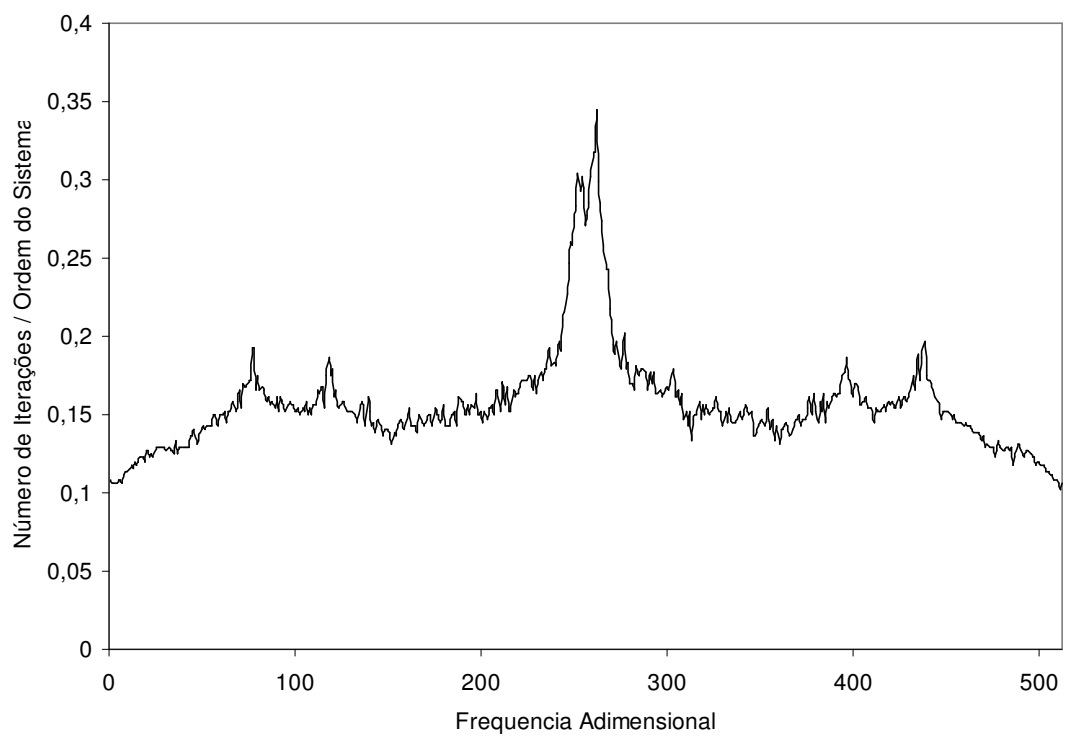


Gráfico 5.26 – Número de iterações pela Ordem do sistema para a trincheira de 3m de profundidade

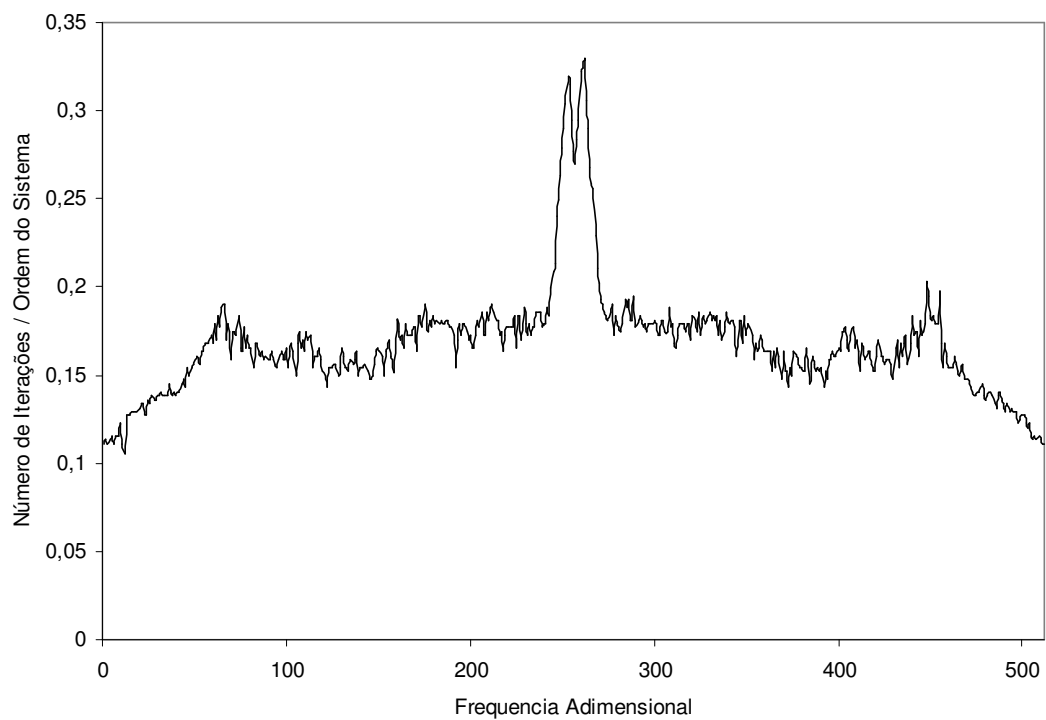


Gráfico 5.27 – Número de Iterações pela Ordem do sistema para a trincheira de 4m de profundidade

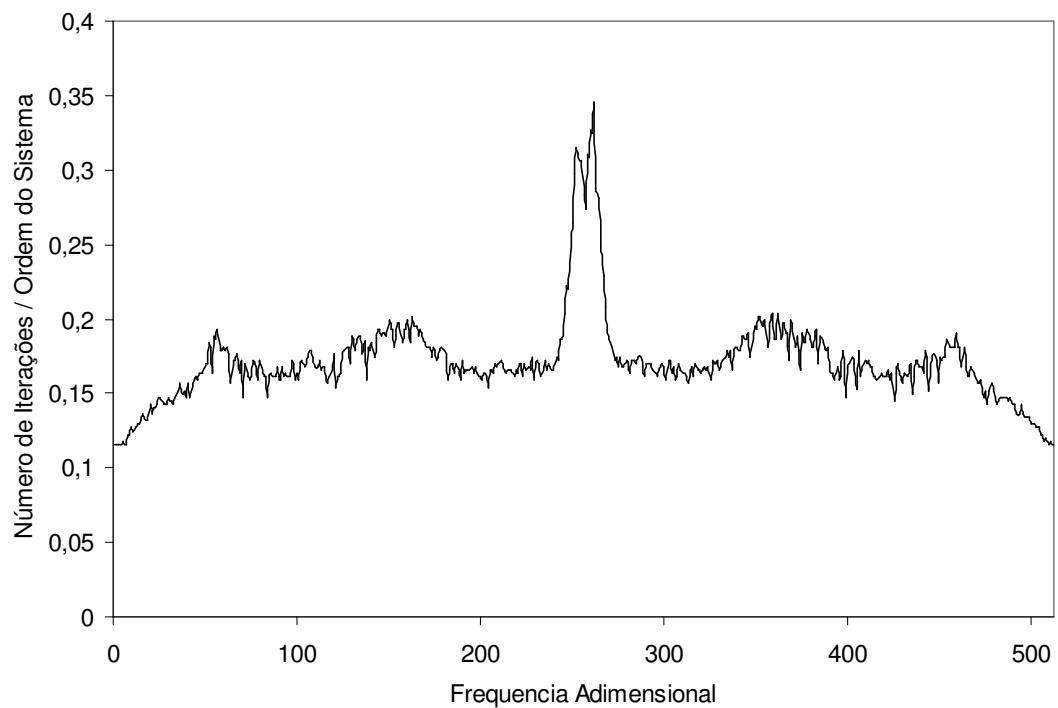
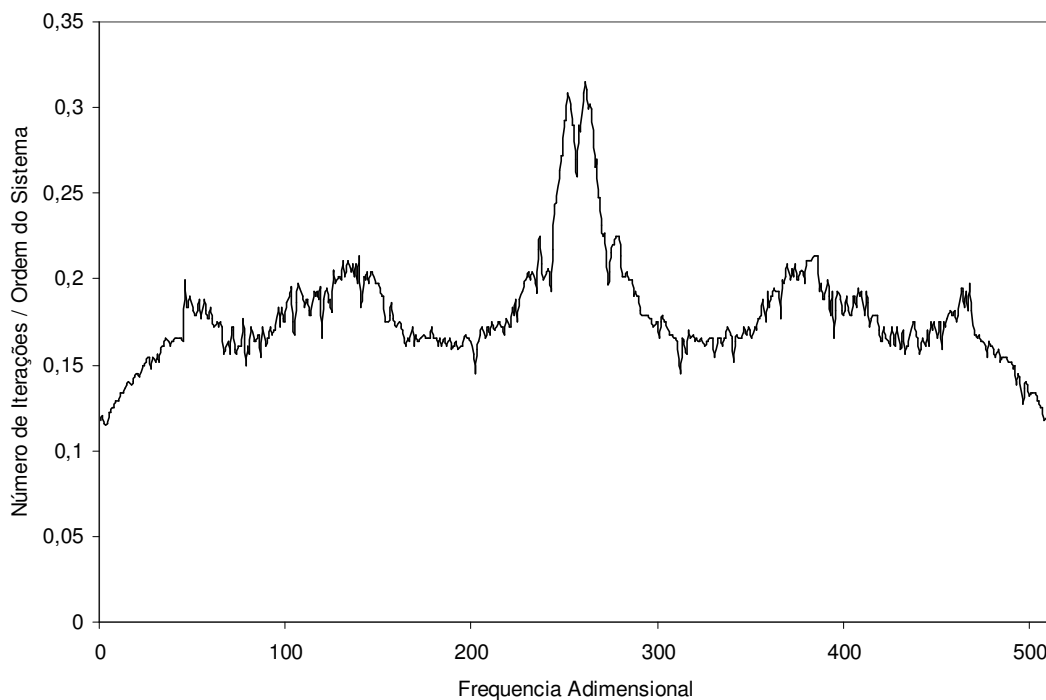


Gráfico 5.28 – Número de Iterações pela Ordem do sistema para a trincheira de 5m de profundidade



*Gráfico 5.29 – Número de iterações pela Ordem do sistema para a trincheira de 6m de profundidade*

Do ponto de vista de precisão de resposta, julga-se que os resultados coincidam bem, embora haja mais amortecimento na resposta 2D fornecida por Rodriguez e De Paula, 2002. O fato da análise realizada no âmbito desta pesquisa ser 3D contribui para esse comportamento, uma vez que na resposta medida no ponto de observação haverá influência de perturbações provenientes de outros pontos da faixa de carga fora da linha perpendicular entre o ponto de observação e o eixo da faixa de carga. Do ponto de vista da análise de eficiência da trincheira, vê-se que há redução em média de 50% das amplitudes de deslocamentos medidas para a trincheira de 6m, valor que, na verdade, não representa grande eficiência. Ressalta-se que outros valores de distância entre a fonte e a trincheira deverão ser naturalmente verificados na simulação da trincheira, de modo a observar posições de melhor desempenho. Outro ponto a ser observado é que a espessura adotada para a trincheira é, na verdade, irrealista (muito grande para situações práticas). Menciona-se porém que essa dimensão foi considerada na modelagem da trincheira de modo que se tivessem as mesmas dimensões adotadas na simulação feita em Rodriguez e De Paula, 2002, usada nesta pesquisa para fins de comparação. Na verdade, a maneira usual de se simular trincheira (normalmente de

espessura muito pequena) via modelos de elementos de contorno é pela consideração de subregiões cuja interface coincida com a trincheira.

Nos gráficos de 5.25 a 5.29, apresentam-se dados de desempenho do solver. Em média, na análise do modelo sem trincheira (gráfico 5.25), verificou-se convergência de em número de iterações da ordem de 6% da ordem do sistema. Já para os modelos com trincheira, o valor dessa relação subiu para 16%.

### Aplicação 5.5: Solo sem trincheira

Neste problema, além da verificação do algoritmo de subestruturação, observa-se a importância da correta introdução do tempo estendido, de modo a eliminar a interferência de resposta anteriores ao início da análise no tempo de análise de interesse. A figura 5.15 define o problema analisado.

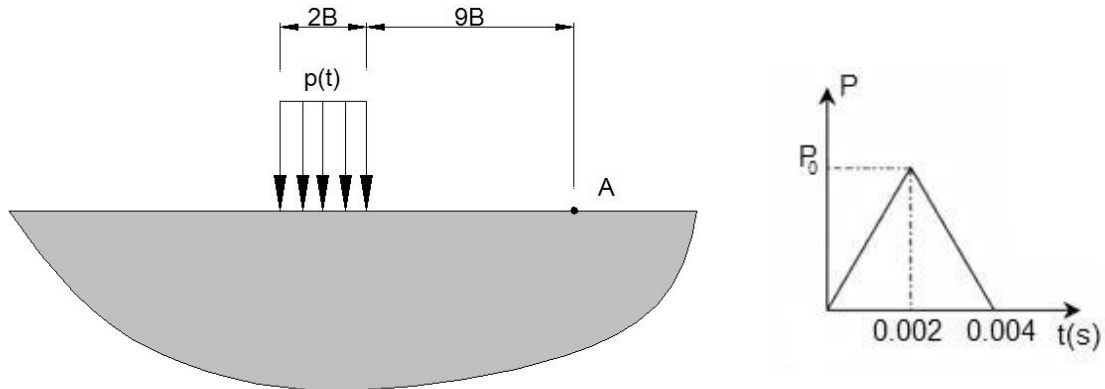
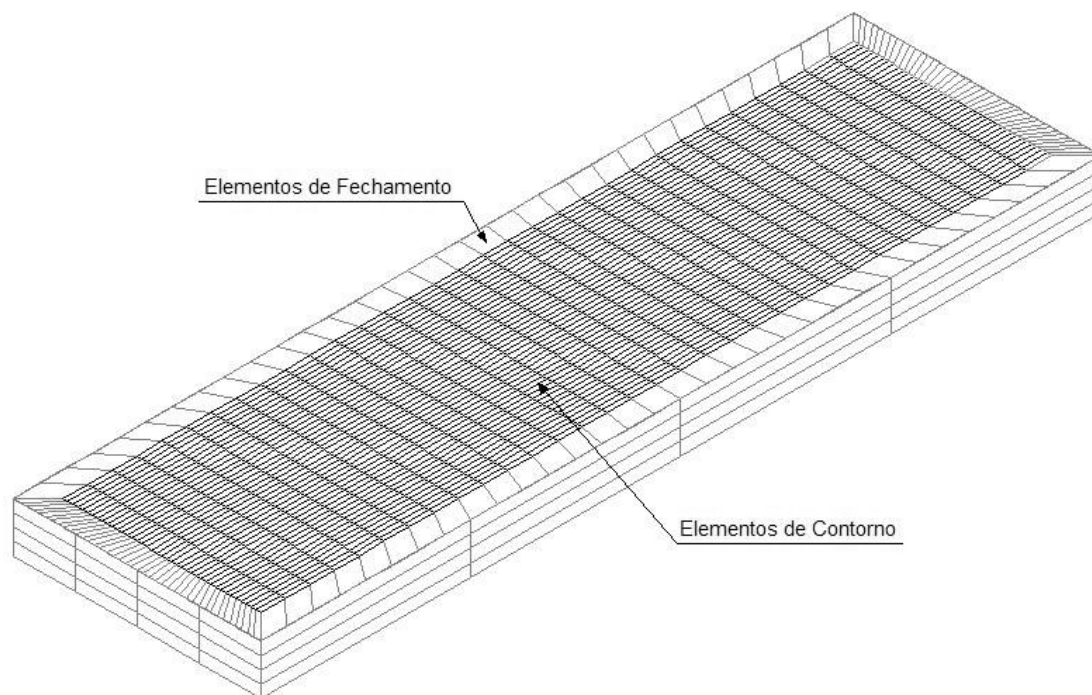


Figura 5.15 – Definição do Problema e do carregamento  $p(t)$

A fim de realizar comparações, adotaram-se  $B=1\text{m}$ ,  $P_0=1000\text{kN}$  e uma malha de 1280 elementos de contorno lineares de 04 nós (*q4\_3dbe*) e 224 elementos de fechamento, gerando um sistema final de 1353 nós. (Figura 5.16). Tal refinamento é conveniente, já que deseja-se reconstituir, precisamente, o histórico de deslocamentos do ponto A.



*Figura 5.16 – Malha de elementos refinada*

O resultado apresentado no gráfico 5.16 foi obtido utilizando-se o processo de integração  $icpt=1$  e  $8 \times 8$  pontos de integração. Com relação à transformação do carregamento, utilizou-se 512 pontos para sua reconstituição no tempo via algoritmo FFT e um tempo de análise de 1.0s, a fim de que se pudesse eliminar efeitos devidos a perturbações ocorridas anteriormente ao início da análise. Neste caso, não se considerou taxa de amortecimento de material, uma vez que há amortecimento geométrico.

O resultado foi comparado ao de Genes & Kocak, 2002 e Yerli, Temel e Kiral, 1998. Genes e Kocak, 2002, utilizaram, para obtenção de tais resultados, uma estratégia baseada na combinação do método dos elementos finitos padrão com o “scaled boundary-finite element method”, desenvolvido por Wolf e Song, 1997, próprio para representações de domínios infinitos. Já Yerli, Temel e Kiral, 1998, utilizaram uma formulação baseada elementos finitos infinitos para problemas transientes. Ressalta-se que em ambos os trabalhos mencionados, as análises realizadas foram bidimensionais, enquanto que, no presente trabalho, a análise é tridimensional.



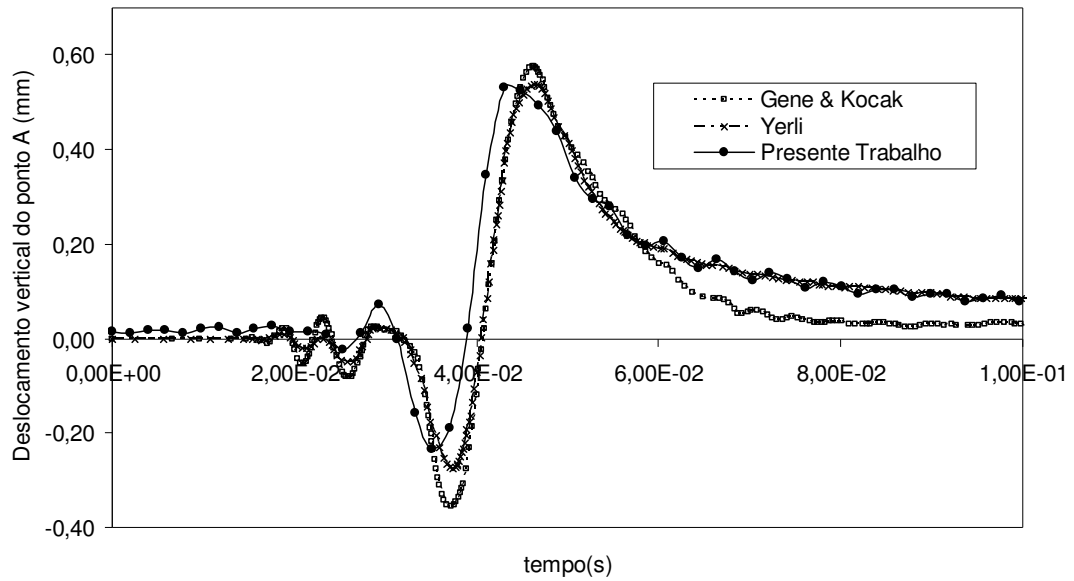


Gráfico 5.30 – Deslocamento vertical para a malha refinada

No cálculo da resposta no domínio da frequência, para aumento de eficiência do programa, calcularam-se as amplitudes apenas para os pontos de frequência nos quais seus valores eram significativos de acordo com o seguinte critério:

$$\frac{U(\omega_{i-1}) - U(\omega_i)}{U(\omega_i)} \leq tol, \quad (5.4)$$

onde  $U(\omega_{i-1})$  é a resposta para um determinado grau de liberdade para uma frequência  $\omega_{i-1}$ ,  $U(\omega_i)$  é a resposta de determinado grau de liberdade para a frequência seguinte ( $\omega_i$ ). A tolerância adotada foi de  $10^{-5}$ . No problema em questão, por exemplo, apenas até a frequência  $\omega \leq 1000 \text{ rad/s}$  foram analisadas (gráfico 5.31 e 5.32). Onde também pode-se observar que, inclusive já reconstituída no domínio do tempo, bons resultados são apresentados.

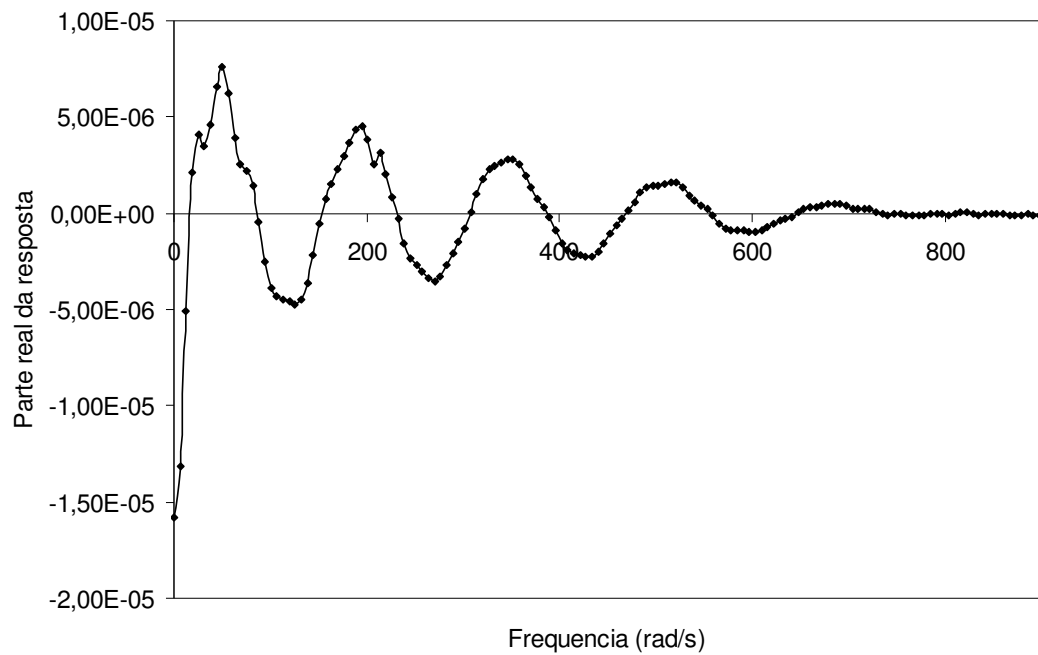


Gráfico 5.31 – Espectro de Frequência para o solo com a malha refinada – valores reais

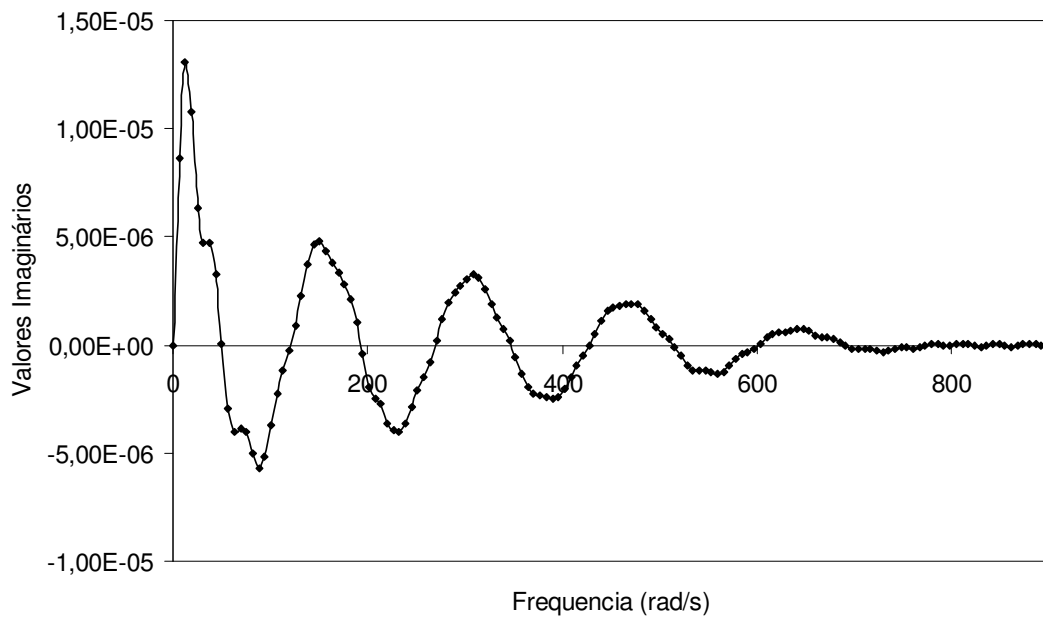


Gráfico 5.32 – Espectro de Frequência para o solo com a malha refinada – valores imaginários

Um segundo modelo, composto de duas subregiões, é adicionalmente considerado para a resolução desse problema (figura 5.07). Porém, não foi possível reconstituir a mesma discretização do caso anterior para a representação da todo o solo, em virtude da capacidade dos computadores disponíveis no LAMEC/UFOP. Desta forma, a malha de elementos de contorno teve que ser reduzida, adotando-se a descrita na figura 5.08, com as seguintes características:

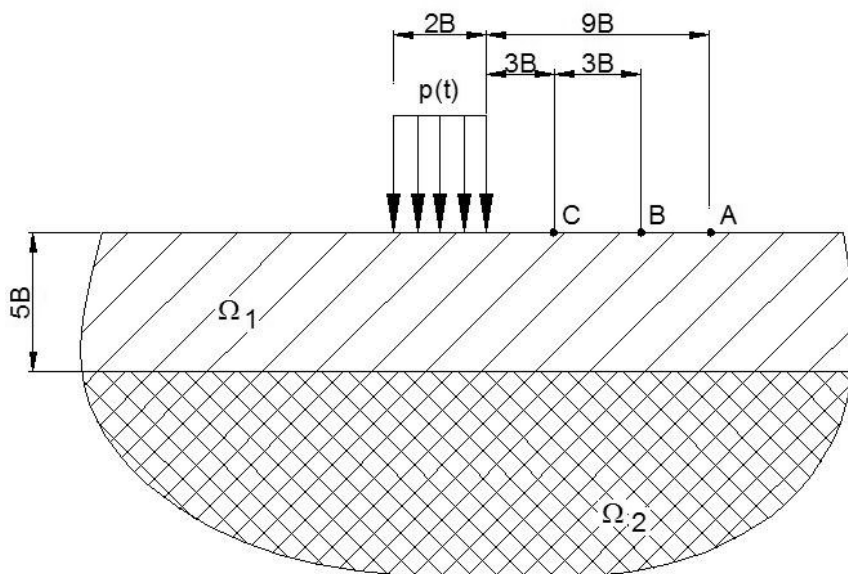
#### *Região 01*

- 1360 elementos de contorno quadrangulares de 04 nós (*q4\_3dbe*) e 438 elementos de fechamento.

#### *Região 02*

- 80 elementos de contorno quadrangulares de 04 nós (*q4\_3dbe*) e 116 elementos de fechamento.

Define-se então, um sistema resultante de 5979 graus de liberdade.



*Figura 5.07 – Solo em camadas*

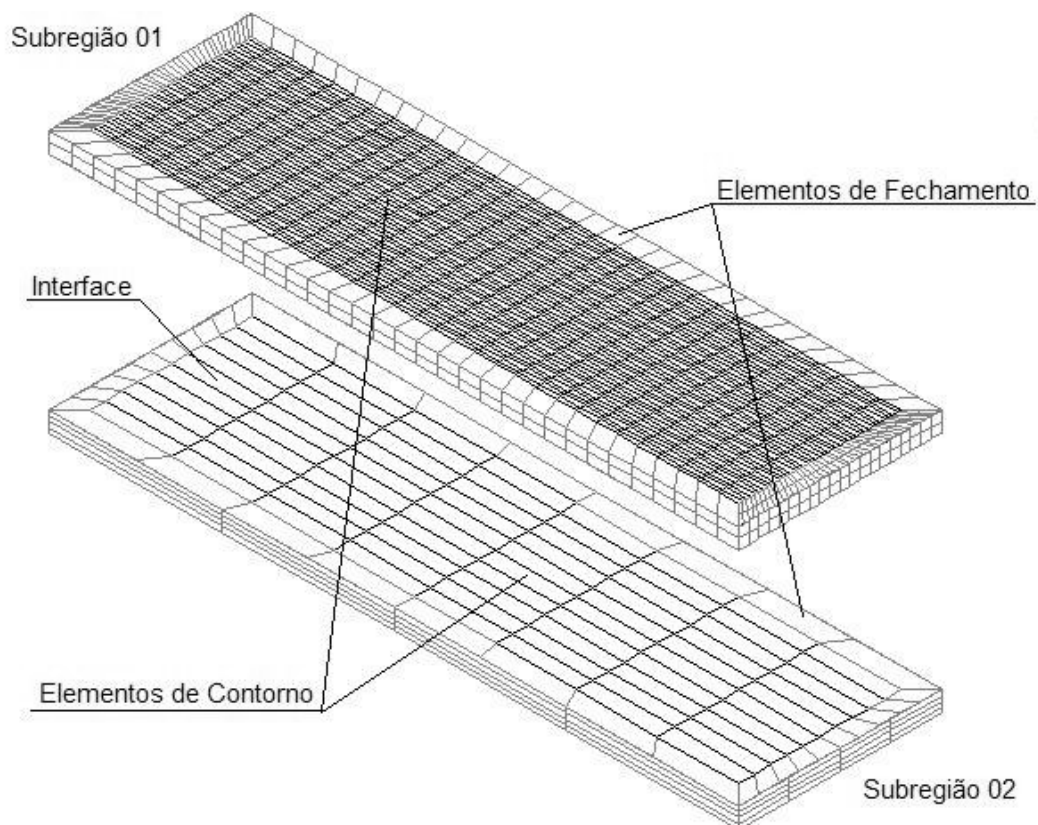


Figura 5.08 – Malha do Solo acoplado

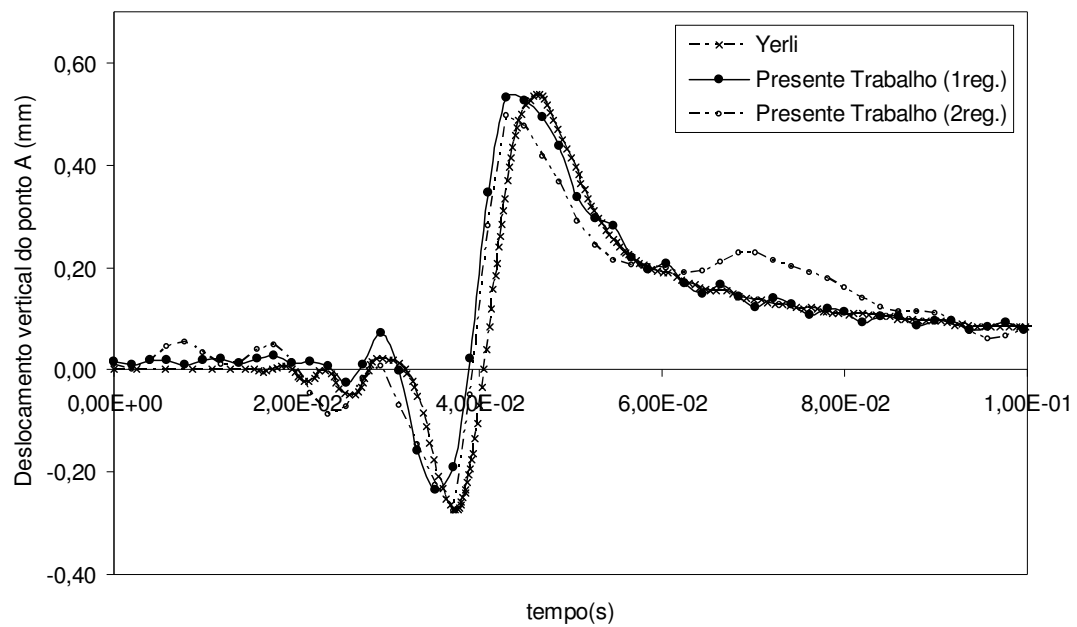


Gráfico 5.33 –Reconstituição da resposta no domínio do tempo para o sistema acoplado.

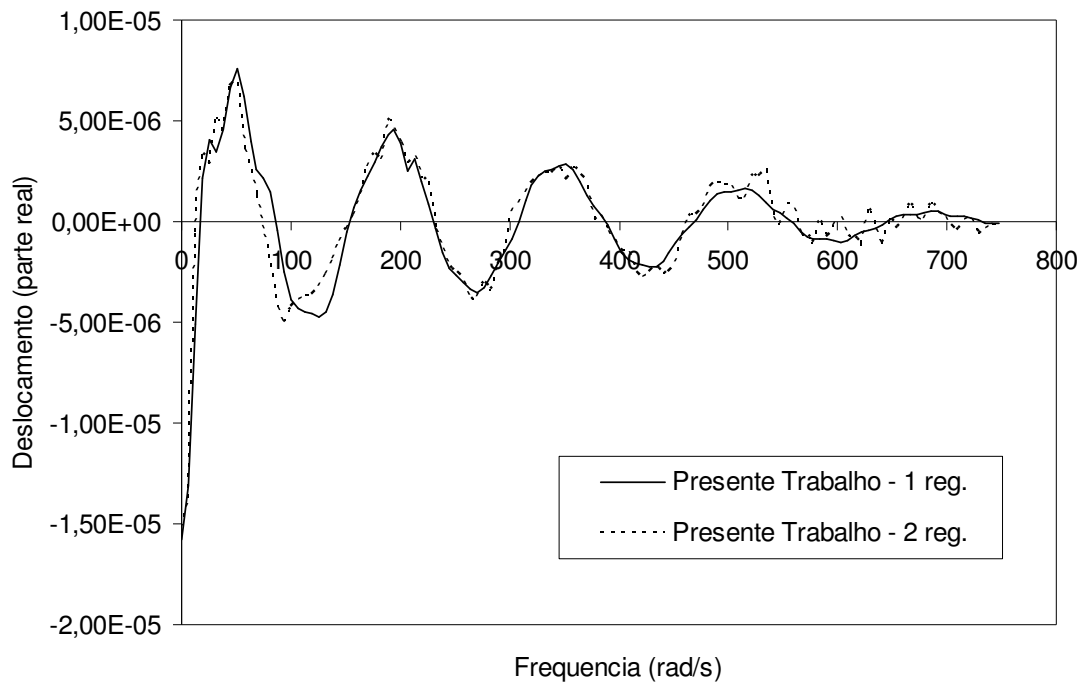


Gráfico 5.34 –Espectro de frequência – parte real.

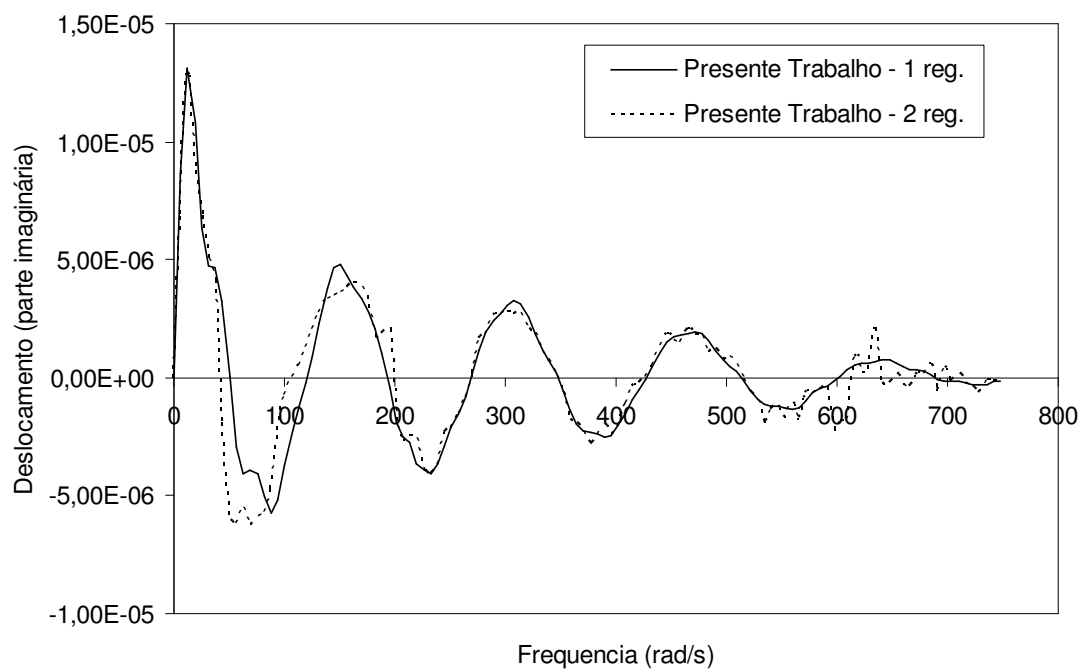


Gráfico 5.35 –Espectro de frequência. – Parte imaginária

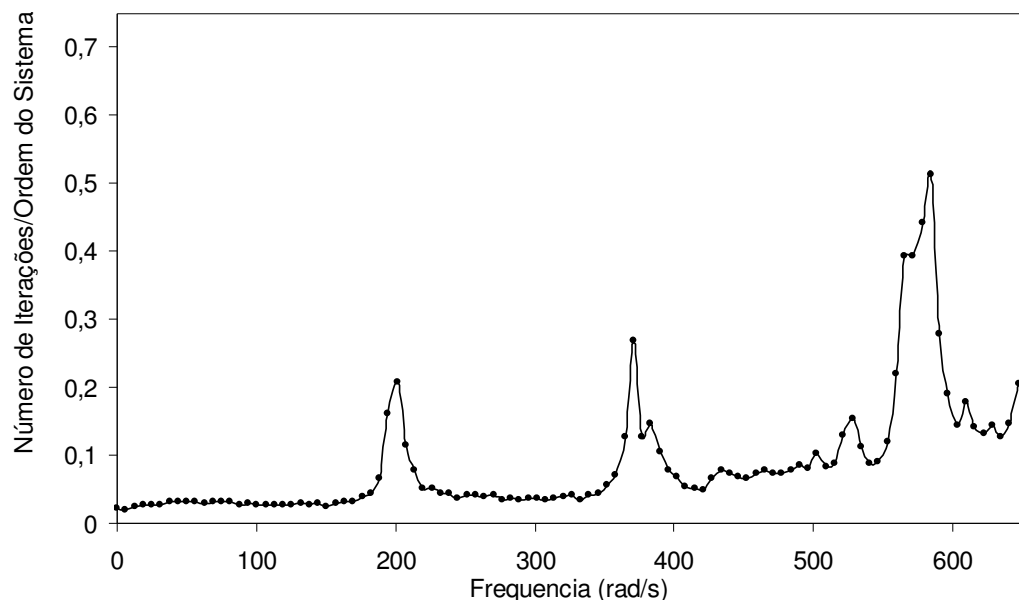


Gráfico 5.36 – Performance do solver para o problema acoplado.

Como se vê dos gráficos de resposta já reconstituída no domínio do tempo, para o caso homogêneo (comparação possível) com uma e duas subregiões, houve boa concordância entre as respostas. Note que, as respostas no domínio da frequência apresentam ligeiras discrepâncias, possivelmente devidas ao erro introduzido pela discretização interna (na interface entre as subregiões). Esse resultado, porém, se reflete, de certa forma, na reconstituição temporal da resposta, não se alterando as amplitudes de pico, mas sim, aquelas destinadas a fase de amortecimento do sistema. Para o caso não-homogêneo não foi possível uma comparação. Do gráfico 5.36 vê-se que o solver apresenta excelente razão de convergência. Na verdade, apenas para frequências muito altas ( $\omega \geq 700 \text{ rad/s}$ ), quando as amplitudes da resposta já são, de fato, muito pequenas, já devendo ser truncadas, é que se verifica a queda de desempenho do solver.

## Capítulo 06 – Conclusões

---

Baseado nos exemplos numéricos apresentados, foi possível avaliar e validar o desempenho das estratégias de acoplamento genérico e dos procedimentos especiais de integração para formulações elastodinâmicas no domínio da frequência.

A respeito da estratégia de acoplamento genérico EC-EC desenvolvida, conclui-se, primeiramente, que esta simplifica, pela opção dos elementos descontínuos, consideravelmente a modelagem de regiões complexas via elementos de contorno, como por exemplo naqueles casos em que o domínio de análise componha-se de camadas estratificadas ou inclusões com formas geométricas quaisquer. Desse modo, interfaces artificiais, anteriormente necessárias para a geração de número suficiente de equações, não mais são necessárias (Araújo *et al.*, 2004; Dors, 2002).

A performance do *solver* J-BiCG, fundamental para o desenvolvimento do algoritmo de acoplamento genérico desenvolvida, é avaliada em função do número de iterações e do erro medido nas respostas físicas. Como discutido no capítulo de aplicações, vê-se das comparações com outros autores, que respostas de qualidade foram obtidas (com erros relativamente pequenos), havendo, naturalmente, algumas divergências não significativas para fins práticos, sobretudo em função de diferenças nas formulações envolvidas. Com vistas ao desempenho do solver, pode-se também concluir que os resultados são muito satisfatórios, tendo convergência sido atingida para relações  $niter/N$  (número de iterações necessárias para a convergência pelo número total máximo de iterações, estabelecido em função da ordem do sistema) muito pequenas, da ordem 10 a 15%. Obviamente, para os sistemas mal-condicionados verificou-se queda de desempenho, fato este que, na verdade, já se esperava. Ressalta-se, todavia, que convergência foi sempre obtida, em todas as análises realizadas.

Particularmente, há que se considerar que, para análises no domínio da frequência, o aumento de eficiência é, fatalmente, muito elevado, uma vez que se faz necessária a resolução de um modelo (usualmente de grande ordem para análises 3D) para diversos valores de frequência, muito embora algum critério de truncamento de análise para frequências mais elevadas, como considerado no âmbito deste trabalho, possa ser aplicado. Que se note ainda que, em muitas aplicações, tanto o tempo estendido de análise como o fenómeno de "*aliasing*" contribuem para que um número elevado de pontos de frequência sejam necessários.

Como pode-se observar, a estratégia genérica de acoplamento, não limitada quanto à sua utilização por restrições físicas ou geométricas do problema em análise, estende, sobremaneira, a aplicabilidade de Métodos de Elementos de Contorno em engenharia. Ademais, o fato de essa estratégia constituir um procedimento espontâneo de implementação de formulações do M.E.C. em ambiente de processamento paralelo, na realidade, a torna uma interessante alternativa para a análise de modelos de grande ordem, muito típicos, por exemplo, em sismologia. A estratégia também possibilita, espontaneamente, o desenvolvimento de formulações híbridas de acoplamento entre modelos de elementos de contorno e modelos discretos estabelecidos via utilização de outros métodos como, por exemplo, M.E.F.

Cabe ainda ressaltar que, o espaço de memória armazenado para as análises apresentadas no capítulo anterior, também é significamente reduzido, uma vez que o sistema resultante não é explicitamente montado. Por exemplo, nas aplicações realizadas, verificam-se os seguintes dados de esparsidade da matriz resultante caso fossem explicitamente montadas: cerca de 26% no problema da interação fundação-solo (aplicação 5.03), 57% para o problema da interação fundação-solo-fundação (aplicação 5.04), 79% para a viga engastada livre analisada com oito subregiões (aplicação 5.01) e 39% para o problema do solo acoplado (aplicação 5.02).

Por fim, indicam-se abaixo, alguns tópicos, relacionados com a linha de pesquisa abordada neste trabalho, e que poderão contribuir para o seu desenvolvimento futuro. Mencionam-se:



- Expansão da estrutura de acoplamento desenvolvida na pesquisa para outros módulos de análise do programa computacional, como por exemplo, para problemas transientes;
- Acoplamento entre solo e estruturas aporticadas espaciais;
- Inclusão de outros *solvers* iterativos na estratégia de acoplamento;
- Simulação elastodinâmica de compósitos;
- Introdução de formulações próprias para a simulação do acoplamento entre um matriz qualquer e inclusões rígidas em número e formas geométricas quaisquer;
- Implementação em ambiente computacional de processamento paralelo.

## Referências Bibliográficas

---

Achenbach J.D. (1993), *Wave propagation in Elastic Solids*, Elsevier Science Publishers B.V., Evanston, USA.

Alberto D.R. (2002), *Análise Transiente Tridimensional Via Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno com Opção de Subestruturação – Aplicação a Problemas de Difusão e Acústicos*, Dissertação de Mestrado, Dept<sup>o</sup> Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

Araújo F. C., Alberto D. R. e Dors C. (2003), *Analysis of 3D time-dependent acoustic problems via a generic BE substructuring algorithm based on iterative solvers*. Engineering Analysis with Boundary Elements. V27(7), p-705-716.

Araújo F.C. (1989). *Técnicas iterativas para resolução de sistemas de equações lineares originados do método dos elementos de contorno*. Dissertação de Mestrado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Araújo F.C. (1994). *Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler probleme der elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE-Methode*. Ph.D. Thesis, Institut Für Angewandte Mechanik, Technische Universität Braunschweig.

Araujo F.C., Dors C. e Mansur W.J. (2003), *Dynamic cross-interaction between footings – 3D frequency-domain parallelized analysis via the BEM*. In: Proc. International Conference on Boundary Element Techniques IV, Granada. Queen Mary, University of London, London, v.1, p.253-358

Araújo F.C., Dors C., Mansur W.J. e Martins C.J. (2004), *New Developments on Be/Be Multi-Zone algorithms Based on Krylov Solvers- Applications to 3D Frequency – Dependent Problems*, J. Braz Soc. Mech. Sc & Engrg,v.26, p.231-803;

Araujo F.C., Martins D.J. e Mansur W.J. (2001), *An efficient BE iterative-solver based substructuring algorithm for 3D time-harmonic problems in elastodynamics*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.25, p.795-803.

Araujo F.C., Martins D.J. e Mansur W.J. (2002), *Analyses of 3D time-harmonic soil foundation interaction problems by using efficient BE substructuring algorithms*, In: Proc. European Conference on Dynamics, Munich. A.A.Balkema Publishers Rotterdam, v.2, p.1267-1272.

Araujo FC, Belmonte GJ, Freitas MSR.(2000), *Efficiency increment in 3D multi-zone boundary element algorithms by use of iterative solvers*. J Chin Inst Engrs,v23(3), p-269–74.

Banerjee P.K. (1994), *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, London.

Barra, L. P. S., Coutinho, A. L. G. A., Mansur, W. J., and Telles, J. C. F. (1992), *Iterative solution of BEM equations by GMRES algorithm*, Computers and Structures, Vol. 44, pp. 1249–1253.

Barra, L. P. S., Coutinho, A. L. G. A., Telles, J. C. F. and Mansur, W. J., (1993), *Multi-Level Hierarchical Preconditioners for Boundary Element Systems*, Engng. Anal. Boundary Elements, Vol. 12, pp. 103–109.

Bathe KJ (1996), *Finite Element Procedures in Engineering. Analysis*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

Brebbia C.A., Telles J.C.F. e Wrobel L.C. (1984), *Boundary Element Techniques*, Springer Verlag, Berlin.

Choppra A.K. (2001), *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*, Upper Saddle River, NJ.

Clough. R.W. e Penzien J. (1993), *Dynamics of Structures*, McGraw Hill, Berkeley.

Cooley J.W. e Tukey J.W. (1965) An algorithm for the machine calculation of fourier complex series, *Mathematics of Computation*, 19,90,p-297-301.

Danson, D. (1982), *BEASY - Boundary Element Analysis System*, Computational Mechanics Centre, MANUAL: Southampton, UK.

Dominguez J. (1993). *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publication: Southampton.

Dors C. (2002), *Paralelização de Algoritmos MEC via Sub-Estruturação baseada em Solvers Iterativos – Aplicação a Problemas 3D Escalares e Vetoriais*, Dissertação de Mestrado, Dept<sup>o</sup> Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

Eringen, A. C. and Suhubi, E. S., (1975). *Elastodynamics*, vol. II, Academic Press, New York, USA.

Genes M.C., Kocak S. (2002), *A combined finite element based soil–structure interaction model for large-scale systems and applications on parallel platforms*. *Engineering Structures*, v. 24, p-1119–1131.

Hageman, L. A. and Young, D. M. (1981), *“Applied Iterative Methods”*, Academic Press, Inc.

Jun,L. Beer,G. e Meek,J.L. (1985). *Efficient evaluation of order  $1/r$ ,  $1/r^2$ ,  $1/r^3$  using Gauss quadrature*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.2, p118-123

Kane, J. H., Kumar, B. L. and Saigal, S., (1990), *An Arbitrary Condensing, Noncondensing Solution Strategy for Large Scale, Multi-Zone Boundary Element Analysis*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng, Vol. 79, 219–244.

Lachat, J.C. e Watson J.O. (1976). *Efficient numerical treatment of boudary integral equations: a formulation for three-dimensional*. Int. J. Numer. Methods Engrg. v.10, p.991-1005.

Li H.B., Han G.M. e Mang H.A. (1985). *A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method*. Int. J. Numer. Methods Engrg. v.21, p.2071-2098.

Mang H., Li H. e Han G. (1985), *A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct BEM*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, v.21, p-2071-2098.

Manolis G.D. e Beskos D.E.(1988), *Boundary Element method in Elastodynamics*, Unwin Hyman Ltd , Londres.

Mansur W.J., Araújo F.C. e Malaghini J.E.B.(1992), *Solution of BEM systems fo equations via iterative techniques*, Int J. Numer. Methods Engrg, v.33, p-1183-1841.

Martins CJ (2000), *Análise de problemas 3D no domínio da freqüência via processo de acoplamento multi-domínio BE/BE*, Dissertação de Mestrado, Dept<sup>o</sup> Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

Miklowitz, J. (1978), *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*, McGraw-Hill, London.

Qian, J., Tham, L. G. and Cheung, Y. K., (1996), *Dynamic Cross-Interaction between Flexible Surface Footings by Combined BEM and FEM*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, pp. 509–526.

Rodríguez, J. C. T. e De Paula, F. A. (2002) ANELC – Uma ferramenta computacional para a análise de problemas elastodinâmicos bidimensionais. Simpósio Brasileiro de Aplicações de Informática em geotecnia – INFOGEO.

Silva K.I. (2005), *Decomposição Genérica de Domínio para análises 3D via MEC – Estudo de eficiência de estratégias voltadas para a análise de problemas de engenharia de grande ordem*, Dissertação de Mestrado, Dept<sup>o</sup> Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.

Silva, K. I., e Araújo, F. C., (2004), "The Use of Discontinuous Boundary Elements in the Generic BE/BE Coupling Algorithm - Applications to 3D Potential Problems", Proc., 5th International Conference on Boundary Element Techniques, Lisbon, F. Aliabadi, and V. Leitão, eds., EC Ltd., London, UK, Vol. 1, pp. 237-242.

Song C, Wolf JP (1997), The scaled boundary finite-element method: a consistent infinitesimal finite-element cell method for elastodynamics. *Comput Methods Appl Mech Eng*;v.55, p-147-329.

Sonneveld P. (1989). *CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems*. SIAM – J.Sci. Statist. Comput. V.10, p-36-52

Southwell R.V. (1946), *Relaxation Methodos in Therotical Physics*, Oxford Univerty Press.

Tedesco J.W., McDougal W.G., Ross A.C. (1998). *Structural dynamics: theory and applications*. Menlo Parks.

Telles J.C.F. (1987). *A self adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals*. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* v.24, p.959-973.

Telles J.C.F. e Oliveira R.F. (1994). *Third degree polynomial trasnformation for boundary element integrals: further improvements*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.13, p.135-141.

van der Vorst H.A. (2003). *Iterative Lyylov methods for large linear systems*. Cambrigde University Press.

Voutsinas, S. e Bergeles, G. (1990). *Numerical calculation of singular integrals appearing in three-dimensional potential flow problems*. Appl. Math. Modeling, v.14, p-618-629.

Wilkinson, J. H., (1965), *The Algebraic Eingenvale Problem*, Claredon Press, Oxford.

Wylie C.R. e Barret L.C. (1985), *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw Hill, New York.

Yerli HR, Temel B, Kiral E. (1998), *Transient infinite elements for 2-D soil-structure-interaction analysis*. J Geotech Geoenviron Eng. Div ASCE;v.10, p-976–88.

Zienkiewicz O.C. e Taylor R.L.,(1989). *The Finite Element Method*, Vol.1, Quarta Edição, McGraw Hill, Londres.