

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA VIA MEF DE PROBLEMAS EM SOLOS REFORÇADOS

AUTOR: RODRIGO RODRIGUES VIEIRA DE OLIVEIRA

ORIENTADORAS: Prof^ª. Dr^ª. Christianne de Lyra Nogueira
Prof^ª. Dr^ª. Patrícia de Oliveira Faria

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Geotecnia.

Ouro Preto, maio de 2006.

O48a Oliveira, Rodrigo Rodrigues Vieira de.
Análise elasto-plástica via MEF de problemas em solos reforçados
[manuscrito]. / Rodrigo Rodrigues Vieira de Oliveira - 2006.
xi, 143f. : il., color. graf., tabs., quadros.

Orientadora: Profa. Christianne de Lyra Nogueira. Co-orientadora:
Profa. Patrícia de Oliveira Faria.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Escola
de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação
em Engenharia Civil. Área de concentração em Geotecnia.

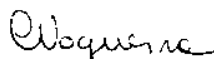
1. Mecânica do solo - Teses. 2. Análise numérica - Teses. 3. Geotêxteis - Teses.
4. Elastoplasticidade - Teses I. Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de
Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-graduação em
Engenharia Civil. Área de concentração em Geotecnia. II. Título.

CDU: 624.13

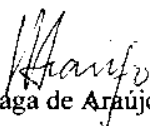
ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA VIA MEF DE PROBLEMAS EM SOLOS REFORÇADOS

AUTOR: RODRIGO RODRIGUES VIEIRA DE OLIVEIRA

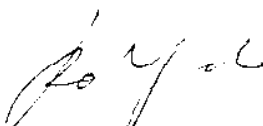
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 04 de abril de 2006, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Profa. Dra. Christianne de Lyra Nogueira (Orientadora / UFOP)



Prof. Dr. Luiz Gonzaga de Araújo (UFOP)



Prof. Dr. Roberto Francisco de Azevedo (UFV)

AGRADECIMENTOS

A Deus;

Aos meus pais e às minhas irmãs , pelo apoio incondicional, companheirismo e amizade;

Às minhas orientadoras, Professoras Christianne e Patrícia, pelo importante direcionamento e apoio fornecidos durante a elaboração deste trabalho;

Ao Professor Luiz Gonzaga pela inestimável orientação e pela convivência desde minha iniciação científica;

Ao Professor Walter Dornellas;

Aos Professores do PROPEC;

Aos funcionários do DECIV;

Aos colegas de pós-graduação, especialmente Cereno, Cristiane, Helba, Kátia, Marcelo e Paulo pela amizade e companheirismo;

À infra-estrutura do Laboratório de Mecânica Computacional da Escola de Minas (LAMEC), sem a qual este trabalho não poderia ser realizado de forma adequada;

À empresa Maccaferri do Brasil e à Fundação Gorceix pelo apoio financeiro.

Resumo

Uma estrutura de solo reforçado (ESR) é um sistema composto que envolve basicamente três componentes: o solo, o reforço e a interface solo-reforço. O desempenho da estrutura reforçada irá depender da interação entre estes componentes. Essa interação pode ser estudada através do monitoramento de um grande número de ensaios em escala de campo, ensaios de laboratório em escala reduzida ou em ensaios em centrífuga. Entretanto, o custo associado ao monitoramento adequado desses ensaios é elevado, de difícil execução, o que torna esse procedimento limitado.

As análises paramétricas, via o Método dos Elementos Finitos (MEF), apresentam um menor custo e são uma alternativa efetiva à realização de um grande número de ensaios. A aplicação do MEF permite com certa facilidade investigar a influência das diversas configurações do sistema reforçado (tipo e quantidade de elementos de reforço, distribuição espacial dos elementos de reforço na massa de solo, etc) no comportamento mecânico de uma ESR, possibilitando ainda a obtenção da resposta do sistema reforçado até a ruptura.

Para modelar uma ESR, via MEF, é preciso adotar uma formulação que leve em consideração a não linearidade física dos materiais, e, por conseguinte, a utilização de processos de solução de sistemas de equações não lineares e de esquemas de integração de tensão que satisfaçam, a nível global e local, as condições de equilíbrio e as equações constitutivas, respectivamente.

Assim, o presente trabalho trata de uma modelagem não linear física de uma ESR e envolve implementações computacionais de modelos constitutivos elastoplásticos para representar de forma idealizada o comportamento do solo e da interface solo-reforço, e de esquemas de integração das relações constitutivas para esses elementos.

Os exemplos estudados pelas implementações numéricas realizadas sugerem que a metodologia pode ser aplicada à solução de problemas práticos da Engenharia Civil.

Abstract

Reinforced earth structure is a composite system that involves basically three components: the soil, the reinforcement and the soil-reinforcement interface. The performance of the reinforced structure will depend on the interaction among these components. This interaction can be studied by monitoring a sufficiently large number of full scale field tests, laboratory tests on reduced scale or in centrifuge tests. However, the cost of performing and monitoring these tests is very high, which turns this procedure inconvenient from a practical viewpoint.

The parametric analyses, by Finite Element Method (FEM), are a cost effective alternative to a large number of tests. This method has the potential to allow us to examine the effects of changes in the configuration of the reinforced system (i.e., the type and quantity of the reinforcement, space distribution of the reinforcement elements into the soil structure, etc) and to model the complete response of a reinforced structure up to collapse.

In order to model a reinforcement structure, by FEM, it is important to adopt a formulation that considers the nonlinear constitutive behavior of the materials. Therefore, it is necessary to adopt methods for the solution of nonlinear systems of equations, and schemes for integrating the constitutive relations that satisfy, at the global level and at the local level, the equilibrium and the constitutive equations, respectively.

Thus, the present work presents a physical nonlinear formulation of reinforced earth structures. Moreover, this work involves computational implementations of elasto-plastic models to represent the idealized form of the constitutive behavior of the soil and the soil-reinforcement interface, and computational implementations of integration schemes of the constitutive relations for these elements.

The examples studied by the numeric implementations suggest that the methodology can be applied to the solution of practical Civil Engineering problems.

Sumário

Página

Lista de Figuras	v
-------------------------------	----------

Lista de Tabelas	ix
-------------------------------	-----------

Lista de Quadros.....	xi
------------------------------	-----------

Capítulo 1 – INTRODUÇÃO

1.1 - Considerações preliminares	1
1.2 - Objetivo e descrição do trabalho	2

Capítulo 2 - ESTRUTURAS DE SOLOS REFORÇADOS COM GEOSSINTÉTICOS

2.1 - Geossintéticos	5
2.2 - Propriedades dos geossintéticos	10
2.3 - Comportamento mecânico de estruturas de solos reforçados	16

Capítulo 3 – O MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA MECÂNICO DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO PARA ESTRUTURAS DE SOLOS REFORÇADOS

3.1 – Equação de equilíbrio	24
3.2 – Equações constitutivas.....	26

Capítulo 4 – O MODELO NUMÉRICO DO PROBLEMA MECÂNICO DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO PARA ESTRUTURAS DE SOLOS REFORÇADOS

4.1 – Revisão bibliográfica.....	42
4.2 – Formulação via MEF do problema mecânico de equilíbrio estático	45
4.3 – Solução de sistemas de equações não lineares	48
4.4 – Representação discreta de uma estrutura de solo reforçado	54
4.5 – Algoritmos de integração de tensão.....	65

Capítulo 5 – EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

5.1 – Exemplos de verificação relacionados ao solo	77
5.2 – Exemplos de verificação relacionados ao reforço	89
5.3 – Exemplos de verificação relacionados à interface.....	95

Capítulo 6 – ANÁLISES DE FUNDAÇÕES EM SOLO REFORÇADO

6.1 – Introdução	113
6.2 – Fundações em solo não reforçado	115
6.3 – Fundação em solo reforçado com uma camada de reforço	118
6.4 - Influência do número de camadas de reforço.....	122
6.5 - Influência do espaçamento entre camadas de reforço	124
6.6 – Influência da posição da primeira camada de reforço	126
6.7 – Influência da rigidez do reforço.....	128

Capítulo 7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 – Conclusões.....	131
7.2 – Sugestões	136

Referências Bibliográficas	137
---	------------

Lista de Figuras

página

Capítulo 1 – INTRODUÇÃO

Figura 1.1- Algumas aplicações de geossintéticos em reforço de solo	1
---	---

Capítulo 2 - ESTRUTURAS DE SOLOS REFORÇADOS COM GEOSSINTÉTICOS

Figura 2.1 – Princípio básico do reforço de solo (Huesker, 2000).....	5
Figura 2.2 - Geotêxtil tecido composto por fitas extrudadas (Ingold e Miller, 1988).....	9
Figura 2.3 - Geotêxteis não-tecidos (Ingold e Miller, 1988)	9
Figura 2.4 – Geotêxteis tricotados (Ingold e Miller, 1988).....	9
Figura 2.5 - Tipos de geogrelhas empregadas em reforço de solo (Castro, 1999)	10
Figura 2.6 – Ensaio de tração não confinado de faixa larga em geotêxtil (Martins, 2000)..	12
Figura 2.7 – Ensaios para determinação dos parâmetros de atrito de interface.....	13
Figura 2.8 – Esquema do equipamento de arrancamento (Castro, 1999).....	14
Figura 2.9 – Esquema do ensaio de arrancamento	15
Figura 2.10 – Verificação da estabilidade rotacional	17
Figura 2.11 – Deslizamento lateral.....	18
Figura 2.12 – Extrusão lateral devido ao recalque do aterro	18
Figura 2.13 – Matriz de geocélulas	18
Figura 2.14 – Aumento do confinamento lateral	19
Figura 2.15 – Aumento da capacidade de suporte devido ao efeito membrana	20
Figura 2.16 – Muro reforçado com face em cobertura vegetal	20
Figura 2.17 – Muros reforçados com face em blocos de concreto	21
Figura 2.18 - Otimização de projetos de taludes reforçados (Zornberg, 1998).....	21
Figura 2.19 – Características de interface (Pereira 2003)	22
Figura 2.20 – Verificações da estabilidade externa.....	22
Figura 2.21 – Verificação da estabilidade global	22
Figura 2.22 – Verificações da estabilidade interna.....	23

Capítulo 3 – MODELOS CONSTITUTIVOS IMPLEMENTADOS

Figura 3.1 – Superfície de plastificação de Mohr-Coulomb	30
Figura 3.2 – Aproximação hiperbólica da função de plastificação de Mohr-Coulomb	31
Figura 3.3 – Tratamento das arestas do modelo Mohr-Coulomb (Abbo e Sloan, 1986).....	33
Figura 3.4 – Superfície de plastificação de Drucker-Prager.....	35
Figura 3.5 – Aproximação hiperbólica da função de plastificação de Drucker-Prager.....	35
Figura 3.6 - Modelos de comportamento do reforço na tração	37
Figura 3.7 – Idealização do ensaio de cisalhamento da interface.....	38
Figura 3.8 – Modelo de Coulomb para a interface solo-reforço	39

Capítulo 4 – FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA PROBLEMAS EM SOLOS REFORÇADOS

Figura 4.1 – Elementos finitos para a representação do solo	54
Figura 4.2 - Elemento de reforço.....	57
Figura 4.3 – Elementos unidimensionais.....	57
Figura 4.5 Representação da interface.....	61
Figura 4.6 – Elementos de interface	62
Figura 4.7 – Representação gráfica do algoritmo de integração constitutivo genérico.....	64
Figura 4.8 – Representação gráfica do processo de integração forward Euler.....	65
Figura 4.9 – Representação gráfica do processo subincremental de integração forward Euler	66
Figura 4.10 – Tensão predita elástica incorreta.....	68
Figura 4.11 – Comportamento constitutivo - Tensão predita elástica incorreta - interface .	77

Capítulo 5 – EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

Figura 5.1 – Exemplos de verificação relacionados ao solo.....	78
Figura 5.2 – Ensaio triaxiais axissimétricos.....	79
Figura 5.3 – Superfície de plastificação de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no plano π ..	80
Figura 5.4 – Idealização bi-linear do ensaio CA	81
Figura 5.5– Trajetórias de tensão	82
Figura 5.6 - Simulação do ensaio CA.....	83
Figura 5.7 – Malha de elementos finitos– fundações superficiais.....	85
Figura 5.8- Capacidade de carga – Sapata corrida	87
Figura 5.9- Capacidade de carga – Sapata circular	88

Figura 5.10 – Verificação da implementação dos elementos de reforço R2 e R3.....	90
Figura 5.11 - Disco cheio com solicitação radial uniforme.....	91
Figura 5.12 - Malha de elementos finitos – Disco cheio	91
Figura 5.13 – Disco com orifício interno solicitado radialmente	92
Figura 5.14 – Tensões normalizadas no disco	93
Figura 5.15 - Carregamento sob placa circular em fundação reforçada	94
Figura 5.16 - Malha de elementos finitos esquemática – Fundação elástica reforçada.....	95
Figura 5.17 - Tensão cisalhante mobilizada na interface solo-reforço em função da profundidade U	95
Figura 5.18 - Tensão cisalhante mobilizada na interface solo-reforço em função da rigidez do reforço.....	96
Figura 5.19 – Verificação das implementações relacionadas ao elemento de interface.....	97
Figura 5.20 – Interface axissimétrica	98
Figura 5.21 – Tensão normalizada <i>versus</i> deslocamento relativo cisalhante normalizado ..	99
Figura 5.22 – deslocamento relativo normal <i>versus</i> deslocamento relativo cisalhante.....	99
Figura 5.23 – Placa circular entre duas interfaces	100
Figura 5.24 – Tensões cisalhantes nas interfaces	100
Figura 5.25 – Interface entre dois cilindros concêntricos.....	101
Figura 5.26 - Curva carga <i>versus</i> deslocamento.....	102
Figura 5.27 – Bloco elástico longo	103
Figura 5.28 – Distribuição da tensão de cisalhamento na interface	104
Figura 5.29 – Malha de elementos finitos – Ensaio de arrancamento	106
Figura 5.30 – Distribuição das tensões cisalhantes na interface ao longo da inclusão.....	107
Figura 5.31 - Distribuição das tensões cisalhantes para diferentes valores de k_s	108
Figura 5.32 - Distribuição das tensões cisalhantes – Influência da discretização – Gauss-Legendre – $k_n = 10^{10}$	110
Figura 5.33 - Distribuição das tensões cisalhantes – $k_n = 10^{10}$ - Quadratura de Gauss-Lobatto.....	111

Capítulo 6 – ANÁLISES DE FUNDAÇÕES EM SOLO PURAMENTE COESIVO REFORÇADO

Figura 6.1 – Parâmetros gerais das análises de fundações em solo reforçado	112
Figura 6.2 – Malha de elementos finitos – Fundação em solo reforçado	113

Figura 6.3 – Curva Fator κ versus δ/B – Fundações sem reforço	114
Figura 6.4 - Mecanismo de ruptura de Prandtl para sapata corrida	115
Figura 6.5 – Mecanismo de ruptura – fundação corrida.....	116
Figura 6.6– Mecanismo de ruptura – fundação circular	116
Figura 6.7 – Definição dos parâmetros para o cálculo das variáveis RRR e RCS	118
Figura 6.8 – Influência da posição do reforço na redução dos recalques	119
Figura 6.9 – Influência da posição do reforço na capacidade de carga	119
Figura 6.10 - Posições ideais e máximas de inclusão do reforço no solo.....	120
Figura 6.11 – Curva κ versus δ – Sapata corrida – 1 camada de reforço	120
Figura 6.12 – Isofaixas de deslocamento horizontal – Fundação corrida	121
Figura 6.13 – Influência do número de camadas de reforço na capacidade de carga	122
Figura 6.14 – Influência do número de camadas de reforço na redução dos recalques	122
Figura 6.15 – Influência do espaçamento H entre camadas na capacidade de carga	124
Figura 6.16 - Isofaixas de deslocamento horizontal – Fundação circular	124
Figura 6.17- Influência da posição da primeira camada de reforço na capacidade de carga.....	126
Figura 6.18 – Ruptura do solo - U/B maior que $(U/B)_{\text{máx}}$	126
Figura 6.19 – Influência da rigidez do reforço na capacidade de carga	128

Lista de Tabelas

página

Capítulo 2 - ESTRUTURAS DE SOLOS REFORÇADOS COM GEOSSINTÉTICOS

Tabela 2.1- Principais geossintéticos e funções que desempenham.....	7
--	---

Capítulo 3 – MODELOS CONSTITUTIVOS IMPLEMENTADOS

Tabela 3.1. Definição das constantes do vetor a – Modelo Mohr-Coulomb modificado.....	34
--	----

Tabela 3.2. Definição das constantes do vetor a – Modelo Drucker-Prager modificado.....	36
--	----

Capítulo 4 – FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA PROBLEMAS EM SOLOS REFORÇADOS

Tabela 4.1 - Pavimentação.....	41
--------------------------------	----

Tabela 4.2 - Aterros	41
----------------------------	----

Tabela 4.3 - Fundações	42
------------------------------	----

Tabela 4.4 – Taludes reforçados e estruturas de contenção	42
---	----

Capítulo 5 – EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

Tabela 5.1- Parâmetros do modelo Drucker-Prager Modificado	81
--	----

Tabela 5.2 – Resistência à compressão	82
---	----

Tabela 5.3 – Fator de capacidade de carga (N_c) - Sapata corrida.....	89
---	----

Tabela 5.4 – Fator de capacidade de carga (N_c) - Sapata circular	89
---	----

Tabela 5.5 – Comparações com outros trabalhos – Fundação corrida flexível	90
---	----

Tabela 5.6 – Comparações com outros trabalhos – Fundação circular flexível	90
--	----

Tabela 5.7. Tensões nos elementos de reforço (kPa)	92
--	----

Tabela 5.8. Deslocamentos radiais nos elementos de reforço, u (mm)	92
--	----

Tabela 5.9 – Dados do problema: Bloco elástico longo	103
--	-----

Tabela 5.10 – Dados do problema: Ensaio de arrancamento	105
---	-----

Tabela 5.11 – Convergência da solução - Variação do nº de elementos J4 <i>versus</i> k_s	109
--	-----

Capítulo 6 – ANÁLISES DE FUNDAÇÕES EM SOLO PURAMENTE COESIVO REFORÇADO

Tabela 6.1 – Fator de capacidade de carga das fundações rígidas rugosas	115
---	-----

Lista de Quadros

página

Capítulo 4 – FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA PROBLEMAS EM SOLOS REFORÇADOS

Quadro 4.1 - Algoritmo Pégasus	69
Quadro 4.2 - Algoritmo Calc_alfas	70
Quadro 4.3 - Esquema de Euler modificado (Sloan et al, 2001)	73
Quadro 4.4 – Algoritmo Corrige_tensão	76
Quadro 4.5 - Algoritmo de integração de tensão para os elementos da interface	77

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

O reforço de solo é uma técnica que consiste na melhoria das propriedades mecânicas pela inclusão de elementos resistentes à tração na massa de solo. A associação do solo com o reforço resulta num material composto mais resistente e menos deformável. As aplicações desta técnica são diversas e pode-se destacar, dentre outras, a construção de obras de contenção, aterros, fundações, encontros de pontes e obras viárias (Figura 1.1).

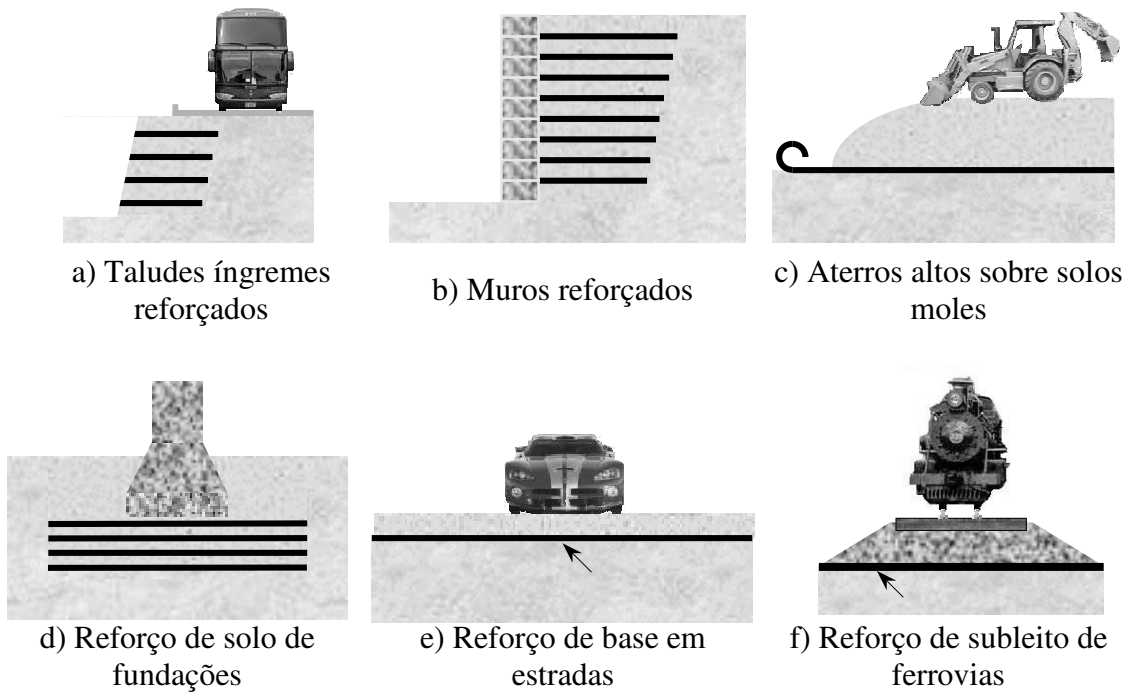


Figura 1.1- Algumas aplicações de geossintéticos em reforço de solo

Grande parte das metodologias de análise de solo reforçado disponíveis é aplicável somente a situações específicas de geometria, tipo de reforço e de solo. Estas limitações decorrem do fato da maioria das metodologias ser fundamentada no método do equilíbrio limite e em formulações semi-empíricas, nas quais as relações constitutivas dos materiais do sistema reforçado são normalmente ignoradas.

Os estudos paramétricos, através do Método dos Elementos Finitos (MEF), são um exemplo de metodologia que leva em consideração as relações constitutivas (idealizadas) dos materiais e são aplicáveis a qualquer tipo de solo e de reforço, e a geometrias mais complexas.

Numa análise, via MEF, a representação de estruturas de solos reforçados (ESR) pode ser feita de forma contínua ou discreta.

Na representação contínua, conhecida como técnica do contínuo equivalente, utiliza-se um único elemento finito para representar o solo reforçado, o qual é tratado como um meio único, anisotrópico e homogêneo. Esta técnica torna a malha de elementos finitos bem mais simplificada e, conseqüentemente, diminui o trabalho computacional (Romstad et al., 1976; Chang et al., 1977).

A representação discreta, que é a adotada neste trabalho, utiliza diferentes elementos para representar os diferentes tipos de materiais, ou seja, o solo, o reforço e a interface solo-reforço. Ela fornece diretamente informações a respeito das deformações e tensões nas interfaces, no reforço e na massa de solo.

1.2. OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação de mestrado se enquadra na linha de pesquisa de Métodos Numéricos em Geotecnia do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFOP e visa dar continuidade aos trabalhos já desenvolvidos na área de modelagem numérica de estruturas de solos reforçados via MEF (Costa e Nogueira, 1998; Salgado e Nogueira 1998; Pereira e Nogueira, 1999; Pereira e Nogueira, 2000; Pereira, 2003; Oliveira, 2004; Zambrana, 2005).

A formulação do problema mecânico de equilíbrio estático envolvido numa análise tensão-deformação de uma ESR deve levar em conta características como a não linearidade constitutiva do solo, do reforço e da interface solo-reforço, tendo-se como exemplos os trabalhos de Duncan e Chang (1970); Duncan (1980); Nogueira (1998); Chalaturnyk et al.

(1990); Karpurapu e Bathurst (1992 e 1995); Rowe e Soderman (1987). Dentro deste prisma, o objetivo desta dissertação é apresentar um modelo numérico, via MEF, para análise tensão-deformação sob condição de deformação plana e axissimétrica de ESR, considerando-se a não-linearidade física das relações constitutivas dos materiais.

Dois modelos constitutivos do tipo elastoplástico perfeito foram implementados para a modelagem do comportamento tensão-deformação do solo: Mohr-Coulomb modificado e Drucker-Prager modificado. Para a interface, foi implementado um modelo constitutivo elastoplástico perfeito com critério de plastificação de Coulomb.

Para a integração das relações constitutivas dos modelos Mohr-Coulomb modificado e Drucker-Prager modificado, foi implementado um algoritmo de integração explícita do tipo Euler modificado, com controle automático de erro, proposto por Sloan et al. (2001). Já para a interface, um algoritmo adaptado de Brocklehurst (1993) foi implementado para a integração da sua relação constitutiva.

Com relação aos tipos de elementos finitos, a contribuição deste trabalho foi a implementação dos elementos de reforço R2 e R3 para as análises axissimétricas.

As implementações computacionais foram realizadas no programa ANLOG - *Análise Não Linear de Obras Geotécnicas* (Zornberg, 1989; Nogueira, 1992 e 1998; Pereira, 2003).

Os materiais de reforço considerados neste trabalho são os geossintéticos (geotêxtil e geogrelha). Assim, no Capítulo 2, serão apresentados os principais tipos de geossintéticos (ênfatizando os geotêxteis e as geogrelhas), as propriedades desses materiais relacionadas à função de reforço e, por fim, os mecanismos de interação solo-reforço numa ESR.

O Capítulo 3 apresenta as equações constitutivas que descrevem de forma idealizada o comportamento tensão-deformação de cada componente do sistema reforçado (solo, reforço e interface solo-reforço).

A formulação em deslocamento do MEF é apresentada no Capítulo 4. Inicialmente descreve-se a modelagem numérica do problema mecânico de equilíbrio estático e as estratégias de solução do problema não linear físico. Em seguida, apresentam-se os elementos finitos utilizados para representar cada componente de uma ESR. Por fim, serão apresentados os algoritmos de integração de tensão dos modelos constitutivos implementados.

No Capítulo 5 são apresentados alguns exemplos de verificação das implementações computacionais realizadas.

Já no Capítulo 6, um estudo paramétrico de fundações superficiais (corrida e circular) em solo puramente coesivo reforçado, será apresentado. Neste estudo, procurou-se avaliar a influência de diversas configurações de reforço do solo de fundação.

Finalmente, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

ESTRUTURAS DE SOLOS REFORÇADOS COM GEOSSINTÉTICOS

Uma ESR é o resultado da associação do solo com um material capaz de resistir a esforços de tração. Os principais objetivos desta técnica são o aumento da resistência e a diminuição da deformabilidade do maciço, resultando assim no aumento da estabilidade e da capacidade de carga e na redução dos recalques e dos deslocamentos laterais (Pereira, 2003). A Figura 2.1 ilustra o princípio básico do reforço de solo

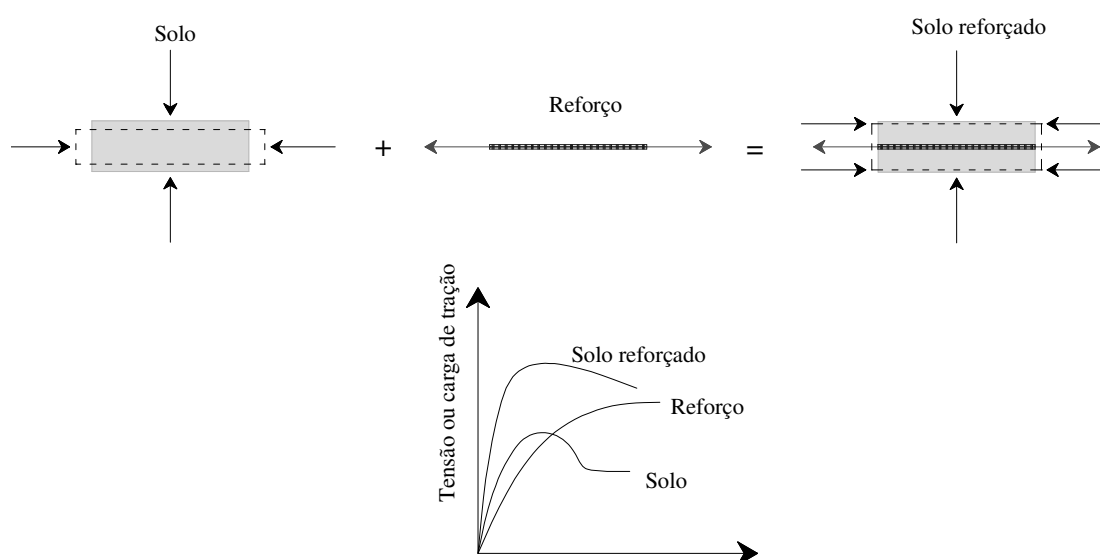


Figura 2.1 – Princípio básico do reforço de solo (Huesker, 2000)

O material de reforço considerado neste trabalho é o geossintético. Portanto, serão apresentados, neste capítulo, os principais tipos de geossintéticos (enfatizando os geotêxteis e as geogrelhas), as propriedades dos geossintéticos relacionadas à função de reforço e, por fim, os mecanismos de interação solo-reforço numa ESR.

2.1. GEOSSINTÉTICOS

Geossintético é a denominação genérica de um produto polimérico (sintético ou natural), industrializado, cujas propriedades contribuem para melhoria de obras geotécnicas, hidráulicas e de proteção ambiental, desempenhando uma ou mais das seguintes funções: reforço, filtração, drenagem, proteção, separação, impermeabilização e controle de erosão superficial.

A grande versatilidade destes produtos, associada ao desenvolvimento tecnológico das últimas décadas, os torna grandes aliados dos engenheiros na solução ou na prevenção de problemas geotécnicos. Além disto, o desenvolvimento de produtos com elevada rigidez, resistência e durabilidade vem permitindo adotar soluções inovadoras para problemas de difícil solução face aos custos exagerados de uma proposta convencional ou pela amplitude das solicitações ou das restrições impostas.

Os geossintéticos podem desempenhar diversas funções em obras geotécnicas, como pode ser visto na Tabela 2.1. Dentre estas funções, pode-se citar:

Reforço: Utilização das propriedades mecânicas de um geossintético para a melhoria do comportamento mecânico de uma estrutura geotécnica;

Filtração: Retenção do solo ou de outras partículas, permitindo a passagem livre do fluido em movimento;

Drenagem: Coleta e condução de um fluido pelo corpo de um geossintético;

Proteção: Limitação ou prevenção de danos a elementos de obras geotécnicas;

Separação: Ação de impedir a mistura ou interação de sistemas adjacentes;

Controle de fluxo (impermeabilização): Controle ou desvio de fluxo;

Controle de erosão superficial: Prevenção da remoção superficial de partículas do solo devido às forças do vento ou escoamento superficial.

Normalmente, além da função principal, os geossintéticos podem exercer, simultaneamente, várias outras funções identificadas como secundárias.

Tabela 2.1- Principais geossintéticos e funções que desempenham

	reforço	filtração	drenagem	proteção	separação	bloqueio de fluxo	controle de erosão	confinamento
geotêxteis								
geomembranas								
geogrelhas geotiras e geobarras								
georedes geotubos e geoespaçadores								
geomantas								
geocélulas								

Conforme Terminologia definida na revisão da NBR 12553/91(2000), os geossintéticos, mais frequentemente empregados, são:

Geotêxtil: Produto em forma de manta têxtil, bidimensional e permeável. É composto de fibras cortadas, filamentos contínuos, monofilamentos, laminetes ou fios, formando estruturas tecidas, não tecidas ou tricotadas, cujas propriedades mecânicas e hidráulicas permitem que desempenhe várias funções numa obra geotécnica;

Geogrelha: Produto com estrutura em forma de grelha com função predominante de reforço, constituído por elementos resistentes à tração;

Geobarra: Produto em forma de barra com função de reforço;

Geotira: Produto em forma de tira com função predominante de reforço;

Geocélula: Produto com estruturas tridimensionais abertas, constituídas de células interligadas que confinam mecanicamente os materiais nelas inseridos. Tem função predominante de reforço e controle de erosão;

Geoexpandido: Produto fabricado a partir de um polímero expandido formando uma estrutura tridimensional leve, com finalidade de alívio de cargas;

Geomembrana: Produto bidimensional, de baixíssima permeabilidade, composto predominantemente por asfaltos, elastômeros ou plastômeros, utilizado para controle de fluxo e separação, nas condições de solicitação;

Geoespaçador: Produto com estrutura tridimensional constituída de tal forma a apresentar grandes volumes de vazios. É utilizado como meio drenante;

Geomanta: Produto com estrutura tridimensional permeável. É usado para controle de erosão superficial do solo, e quando biodegradável, é também conhecida como biomanta;

Georrede: Produto com estrutura em forma de grelha, com função de drenagem. Conforme indica a primeira versão da norma brasileira de terminologia, este tipo de produto foi chamado inicialmente de geomalha. Mas, nos outros países da América Latina, foram as geogrelhas que ficaram conhecidas como geomalhas. Portanto, para evitar-se possíveis enganos, foi decidido alterar esta denominação;

Geotubo: Produto de forma tubular com função drenante;

Geoforma: Estrutura realizada a partir de geossintéticos com a finalidade de conter materiais de modo permanente ou provisório;

Geocomposto: Produto industrializado formado pela superposição ou associação de um ou mais geossintéticos entre si ou com outros produtos, geralmente concebido para desempenhar uma função específica, por exemplo:

Geocomposto argiloso para impermeabilização: Estrutura formada pela associação de geossintéticos a um material argiloso de baixa condutividade, especialmente desenvolvida para a função de impermeabilização;

Geocomposto para drenagem: Produto especialmente desenvolvido para a função drenagem, composto de um geotêxtil atuando como elemento de filtro e de uma georrede ou um geoespaçador;

Geocomposto de reforço: Estrutura formada pela associação de geossintéticos não similares, desenvolvidos para reforço.

Os geossintéticos, quando usados como reforço, estão sujeitos a solicitações mecânicas e nesta função, a principal propriedade requerida é a resistência à tração. No entanto, os benefícios associados à utilização desses materiais, não estão ligados apenas a esta propriedade mecânica, mas também, à interação solo-reforço (resistência ao deslizamento e ao arrancamento).

Os geotêxteis e as geogrelhas são os geossintéticos mais comumente usados como reforço e portanto serão descritos mais detalhadamente a seguir.

i) Geotêxteis

Como dito anteriormente, os geotêxteis são produtos têxteis bidimensionais e permeáveis, compostos por fibras cortadas, filamentos contínuos, monofilamentos, laminetes ou fios, formando estruturas tecidas, não tecidas ou tricotadas (Figura 2.2, Figura 2.3 e Figura 2.4). Suas propriedades mecânicas e hidráulicas permitem que desempenhe várias funções numa obra geotécnica.

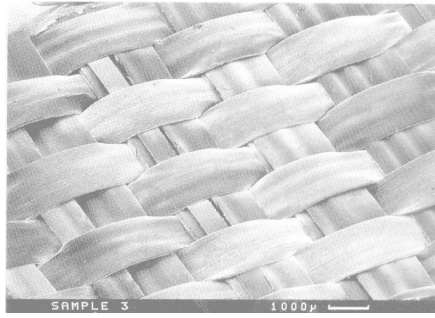
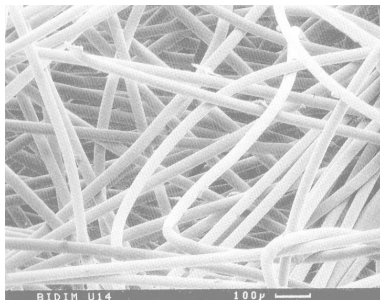
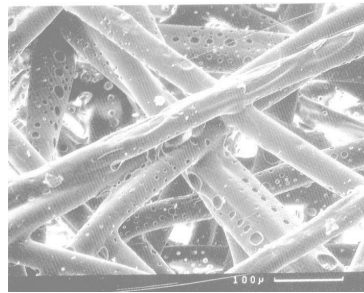


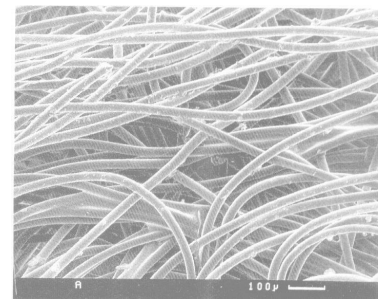
Figura 2.2 - Geotêxtil tecido composto por fitas extrudadas (Ingold e Miller, 1988)



a) Geotêxtil não-tecido
agulhado

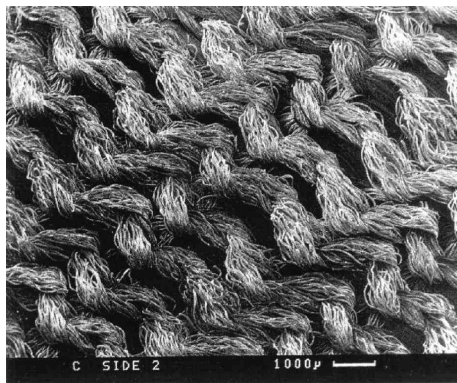


b) Geotêxtil não-tecido
termoligado

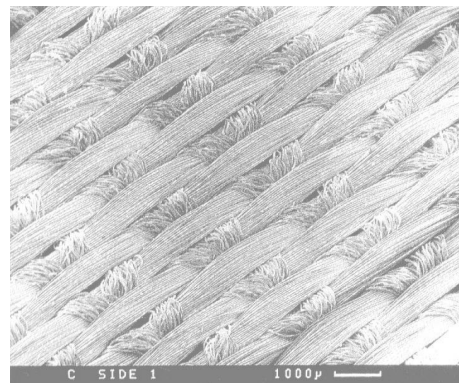


c) Geotêxtil não-tecido
resinado

Figura 2.3 - Geotêxteis não-tecidos (Ingold e Miller, 1988)



a) Base tricotada



b) Superfície superior

Figura 2.4 – Geotêxteis tricotados (Ingold e Miller, 1988)

As primeiras aplicações dos geotêxteis estavam apenas relacionadas ao controle de erosão. Somente na década de 60 é que os geotêxteis começaram a ser utilizados em aplicações de reforço, tais como, estradas não pavimentadas; sob lastro de ferrovias, na base de aterros sobre solos moles, etc.

ii) Geogrelhas

Geogrelhas são estruturas planas em forma de grelhas, com grandes aberturas que promovem o embricamento do solo através das mesmas. As geogrelhas são muito mais rígidas que os geotêxteis e, portanto, seu emprego é indicado quase que exclusivamente como reforço.

Os polímeros normalmente empregados na fabricação de geogrelhas são o polietileno de alta densidade (PEAD), o poliéster (PET) e o polipropileno (PP). As geogrelhas podem ser extrudadas mono-orientadas (Figura 2.5.a), extrudadas bi-orientadas (Figura 2.5.b) ou soldadas (Figura 2.5.c).

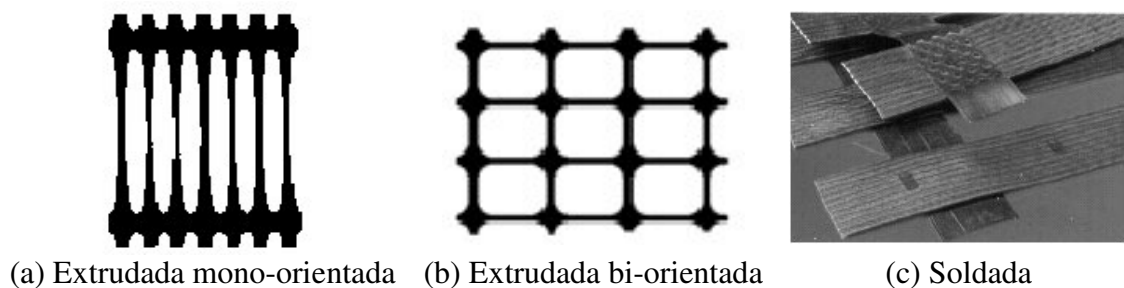


Figura 2.5 - Tipos de geogrelhas empregadas em reforço de solo (Castro, 1999)

2.2. PROPRIEDADES DOS GEOSSINTÉTICOS

A combinação das propriedades do solo e do reforço e a interação entre eles podem resultar num material com propriedades de engenharia adequados para o bom desempenho em diversos tipos de obras. Nos tópicos seguintes serão apresentadas as principais propriedades dos geossintéticos e como elas podem ser obtidas.

2.2.1. Propriedades físicas

As propriedades físicas dos geossintéticos estão intimamente ligadas às propriedades dos polímeros componentes, ao modo de fabricação das fibras/ filamentos, do tipo de extrusão e da estrutura do produto. Para os geotêxteis e produtos correlatos podem ser citados:

a) Espessura nominal [t] (mm)

É a espessura do geossintético, submetido a uma pressão confinante de 2kPa, aplicada numa área de 2500mm², por placas rígidas paralelas;

b) Gramatura [M_A] (g/m²)

Massa por unidade de área, obtida a partir de corpos de prova de 100 x 100mm;

c) Porosidade [n] (%)

Determinada em função da gramatura M_A e espessura nominal t do geotêxtil, da densidade ρ_f da fibra/ filamento e da massa específica da água γ_a à 4°C. Pode ser obtida pela expressão:

$$n = 1 - \frac{M_A}{t \rho_f \gamma_a} \quad (2.1)$$

2.2.2. Propriedades mecânicas

Os geossintéticos, de uma forma geral, estão sujeitos a solicitações mecânicas, seja na fase de instalação e construção ou seja durante a vida útil da obra em que for aplicado, mesmo que a sua função principal não seja a de reforço.

As principais propriedades associadas às solicitações mecânicas na fase de instalação e construção são: resistência à tração, resistência à penetração ou à perfuração, resistência aos danos de instalação e resistência à abrasão (Pereira, 2003).

Neste trabalho será dada ênfase as principais propriedades, associadas às solicitações mecânicas de uma obra em condições de trabalho.

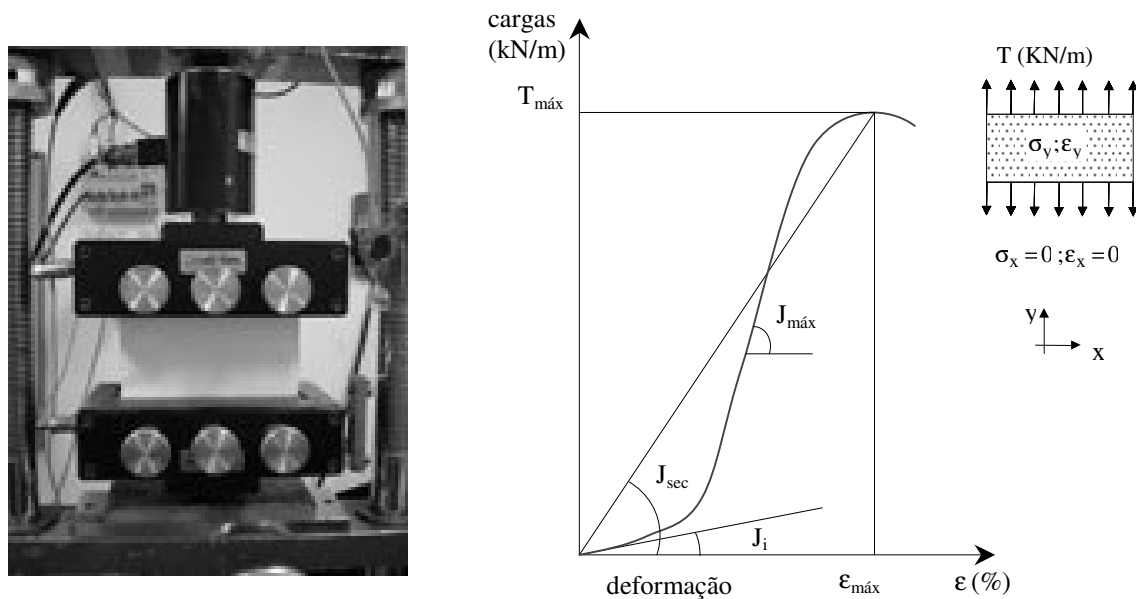
i) Propriedades mecânicas relacionadas ao reforço

a) Resistência à tração

A resistência à tração de um geossintético está diretamente relacionada a fatores como a temperatura e velocidade de ensaio, cujos efeitos estão intimamente ligados às propriedades da estrutura dos polímeros e com o processo de fabricação do produto. Como é necessária a sistematização do ensaio, devido a esta quantidade de variáveis, a resistência à tração unidirecional não confinada é determinada em ensaios normalizados pela

ISO/EN10319(1913) e NBR12824(1993), com corpos de prova de 20cm de largura, 10cm de altura livre (ensaio de faixa larga) e sob velocidade de 20mm/min.

Este ensaio consiste em aplicar à amostra de geossintético forças de tração crescentes e unidirecionais, registrando-se suas deformações até a ruptura. A curva do ensaio relaciona as deformações $\epsilon(\%)$ com as respectivas forças T (kN/m), conforme mostrado na Figura 2.6. A resistência à tração corresponde à força máxima de tração $T_{\text{máx}}$ aplicada durante o ensaio.



$T_{\text{máx}}$ - resistência à tração; $\epsilon_{\text{máx}}$ - deformação máxima; J_i - módulo de rigidez inicial
 J_{sec} - módulo de rigidez secante; $J_{\text{máx}}$ - módulo de rigidez máximo.

Figura 2.6 – Ensaio de tração não confinado de faixa larga em geotêxtil (Martins, 2000)

b) Rigidez

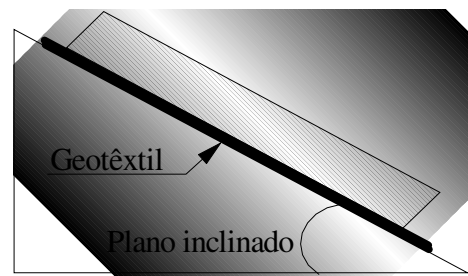
Tanto a norma ISO/EN quanto a NBR definem os módulos de rigidez (Figura 2.6) obtidos a partir dos ensaios não confinados de resistência à tração.

ii) Propriedades mecânicas relacionadas à interface solo-reforço

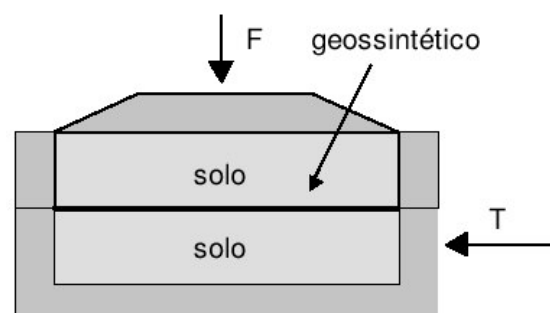
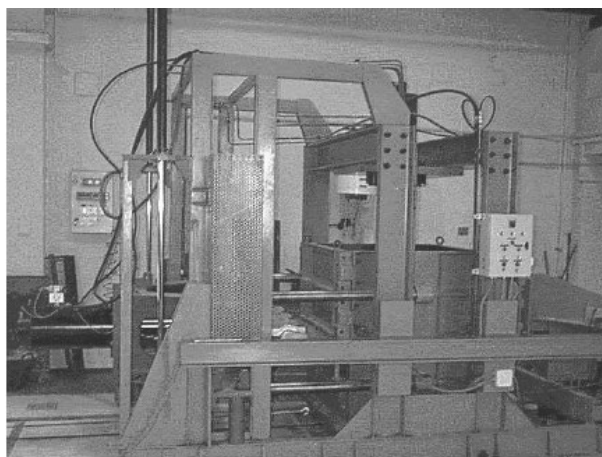
a) Resistência ao deslizamento

A resistência ao deslizamento na interface solo-reforço pode ser obtida através de ensaio de plano inclinado (para baixos níveis de confinamento) ou em caixas de cisalhamento de grande porte (para elevados níveis de confinamento).

Estes ensaios foram normalizados pela ISO12957 (1999) e são ilustrados na Figura 2.7.



a) – Ensaio de plano inclinado (Mello, 2001)



b) – Ensaio de cisalhamento direto (Sieira, 2003)

Figura 2.7 – Ensaios para determinação dos parâmetros de atrito de interface

Através destes ensaios, obtêm-se o ângulo de atrito e a adesão da interface solo-reforço.

b) Resistência ao arrancamento

Os geotêxteis são materiais contínuos e possuem resistência ao arrancamento em função apenas da superfície de contato, podendo esse valor ser estimado a partir de ensaios de cisalhamento direto. Já as geogrelhas, por apresentarem grandes aberturas, possuem comportamento, no cisalhamento direto, diferente do arrancamento. Isto ocorre porque o cisalhamento na interface de uma geogrelha, durante o arrancamento, possui duas parcelas, a primeira referente ao atrito entre o solo de interface e a superfície do reforço e a segunda referente ao atrito entre o solo de interface e o solo confinado nas aberturas da malha. A Figura 2.8 mostra um esquema do equipamento de ensaio de arrancamento.

Uma completa descrição dos ensaios de cisalhamento direto e arrancamento e os procedimentos para se obter os parâmetros de resistência da interface solo-reforço podem ser encontrados em Sieira (2003).

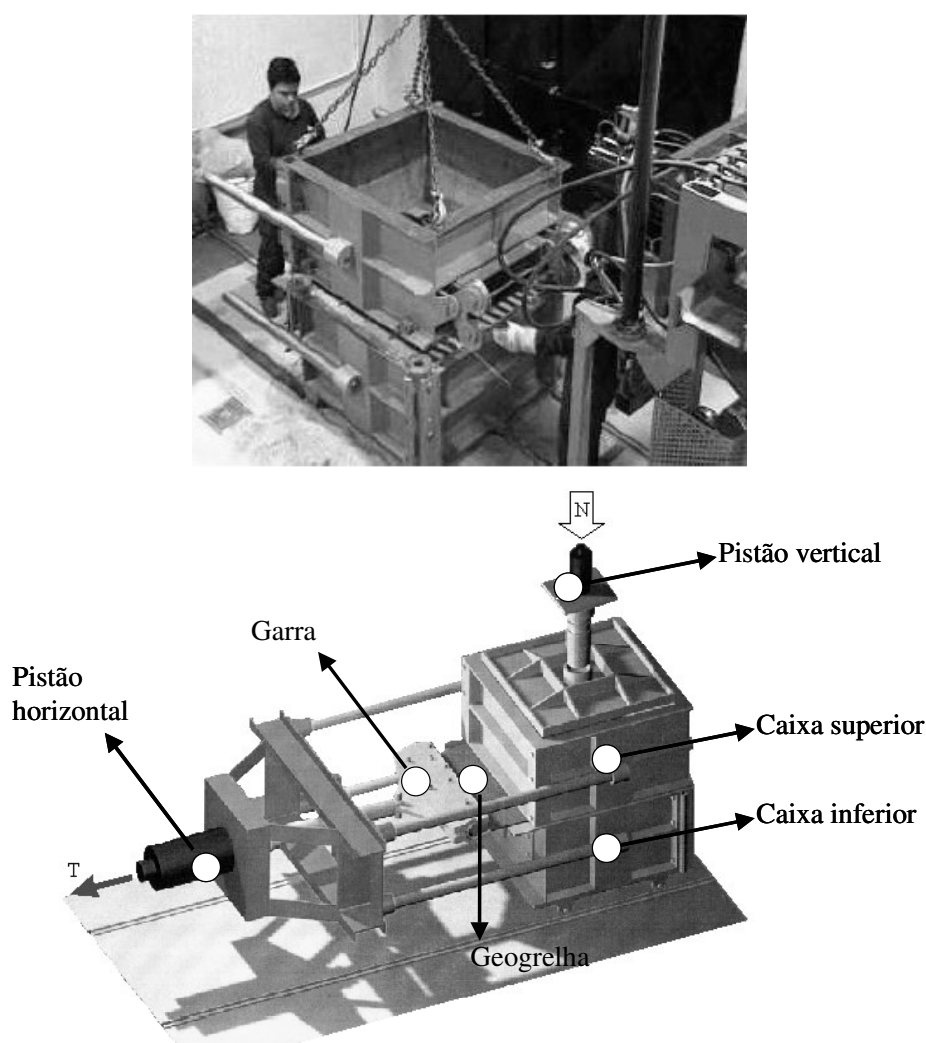


Figura 2.8 – Esquema do equipamento de arrancamento (Castro, 1999)

Para determinação da força de tração máxima T_{\max} , durante um ensaio de arrancamento, considere o elemento infinitesimal de reforço ilustrado na Figura 2.9 em estado de equilíbrio estático.

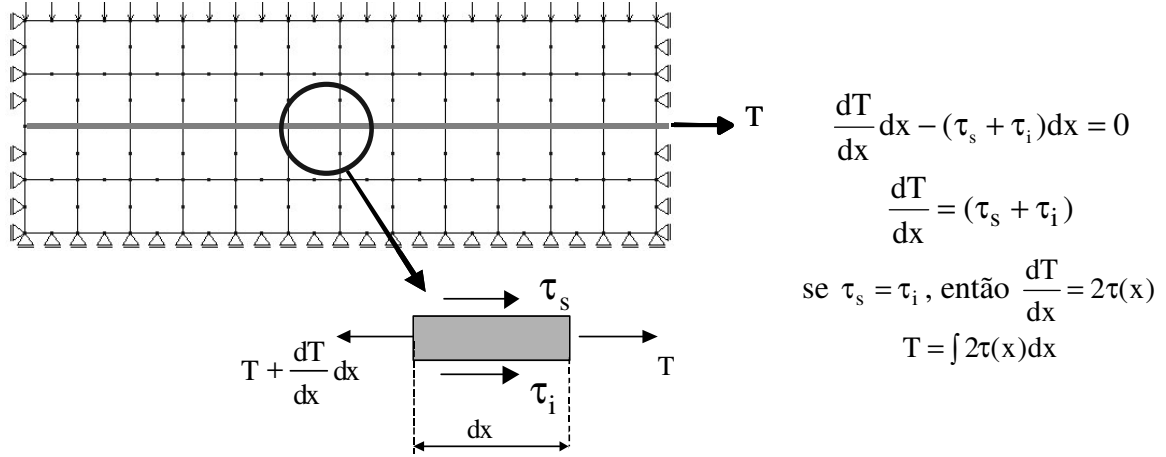


Figura 2.9 – Esquema do ensaio de arrancamento

Adotando-se o critério de resistência de Mohr-Coulomb e supondo-se que os materiais das interfaces, superior e inferior, são idênticos, pode-se obter a seguinte equação para a força de tração máxima no reforço (Pereira, 2003):

$$T_{\max} = \int 2(c + \sigma(x) \operatorname{tg} \phi) dx . \quad (2.2)$$

em que, c e ϕ são, respectivamente, a adesão e o ângulo de atrito da interface solo-reforço, e $\sigma(x)$ é a tensão normal à interface solo-reforço.

Supondo-se uma distribuição de tensão normal $\sigma(x)$ uniforme ao longo do reforço de comprimento L , chega-se à expressão abaixo:

$$T_{\max} = 2(c + \sigma \operatorname{tg} \phi) L . \quad (2.3)$$

2.3. COMPORTAMENTO MECÂNICO DE ESTRUTURAS DE SOLOS REFORÇADOS

As principais aplicações mecânicas dos geossintéticos são:

- Taludes e obras de contenção reforçados;
- Reforço de aterros sobre solos moles e aterros estacados;
- Reforço da base e do revestimento de pavimentos;
- Melhoria da capacidade de cargas de fundações;
- Proteção de áreas com risco de subsidência;
- Proteção de geomembranas e de outras obras geotécnicas;
- Reforço de subleito;

Neste item, serão abordados os mecanismos de reforço gerados pela inclusão de geossintéticos em três aplicações: reforço de aterros sobre solos moles, reforço de subleito e base de obras viárias e estruturas reforçadas (Taludes e obras de contenção).

2.3.1- Aterros sobre solos moles

Os solos moles, de uma forma geral, apresentam as seguintes características: elevada compressibilidade; baixa permeabilidade ($<10^{-8}$ m/s); baixa resistência ao cisalhamento não drenado; encontram-se saturados e são constituídos por argilas ou argilas-siltosas.

Os problemas associados à construção de aterros sobre solos moles são a ruptura da massa de solo mole e os recalques excessivos. As metodologias de solução comumente empregadas são remoção de solo e conseqüente substituição, construção de bermas de equilíbrio, pré-carregamento e drenagem vertical ou pré-aterro (Quaresma, 1992).

Uma alternativa aos métodos convencionais é a utilização de elementos de reforço na base do aterro conferindo a estabilidade global da obra e a integridade do aterro a ser construído, e distribuindo os recalques de forma mais uniforme. Nesse tipo obra, outros geossintéticos podem ser utilizados com função de separação (evitando a contaminação do material de aterro pelo solo de fundação) e de drenagem (promovendo a saída do excesso de água durante o processo de consolidação).

Segundo Jewel (1988) e Quaresma (1992), se o geossintético é relativamente inextensível, não haverá deslocamento relativo entre este e o solo de fundação, e dois mecanismos de reforço podem ser descritos:

- i) Redução das forças que causam a ruptura do solo de fundação: o reforço transmite praticamente tensões normais para a fundação, aumentando sua capacidade de suporte.
- ii) Aumento das forças que resistem à ruptura: os deslocamentos laterais são restringidos pelo reforço, aumentando o confinamento do solo de fundação do aterro.

A análise da ruptura do solo mole de fundação é comumente conduzida através do método do equilíbrio limite. A Figura 2.10 ilustra uma hipotética superfície circular de ruptura.

A verificação do deslizamento lateral ao longo da superfície do geossintético (Figura 2.11) pode ser determinada calculando-se o empuxo ativo do aterro e a força resultante das tensões cisalhantes mobilizadas na interface solo-reforço. Na condição de equilíbrio limite, o somatório dessas duas forças é nulo.

Quando a espessura da camada de solo mole é menor que a largura da base do aterro, a ruptura se manifesta na forma de extrusão do material próximo ao pé do aterro e sob grandes deslocamentos da camada de aterro (Figura 2.12). Uma solução é reforçar a base do aterro usando várias camadas de reforço ou uma matriz de geocélulas. Esta última solução é mostrada na Figura 2.13.

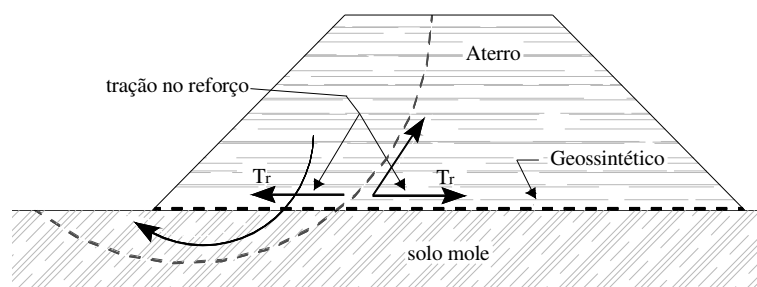


Figura 2.10 – Verificação da estabilidade rotacional

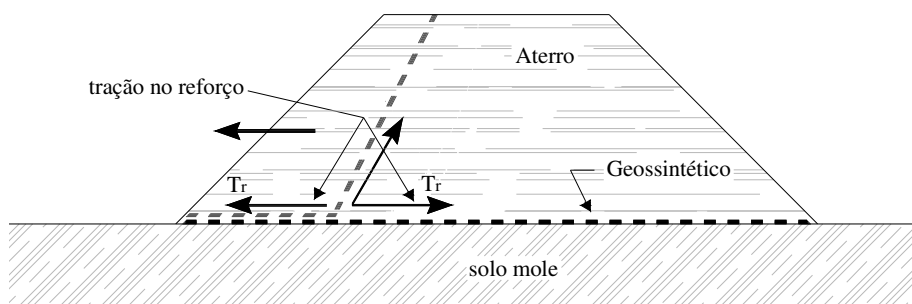


Figura 2.11 – Deslizamento lateral

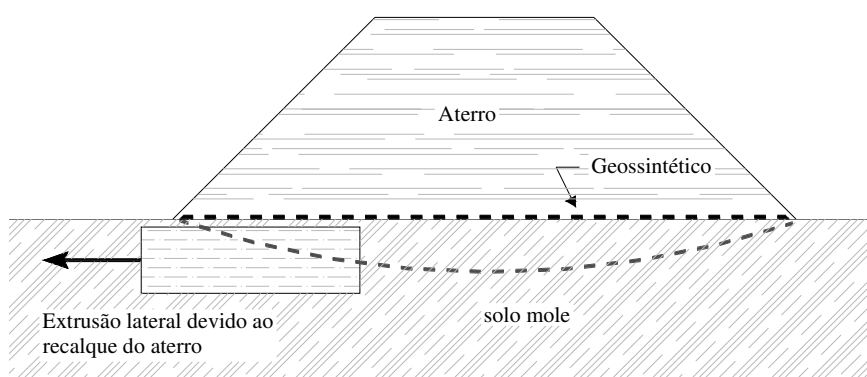


Figura 2.12 – Extrusão lateral devido ao recalque do aterro



Figura 2.13 – Matriz de geocélulas

2.3.2. Obras viárias - Estabilização de subleito e reforço de base

A estabilização de subleito consiste no emprego de geossintéticos entre o subleito e uma camada de aterro granular de pouca altura. Sua finalidade é aumentar a capacidade de suporte à carga imposta pelos equipamentos de construção aos subleitos fracos ou moles. Esta técnica é aplicada na execução de estradas temporárias e durante a implantação de canteiros de grandes obras.

O reforço da base consiste na inclusão de geossintéticos no interior da camada de base ou entre o subleito e a base. Sua finalidade é aumentar a vida útil da obra viária e/ou reduzir a quantidade de material da camada estrutural. Esta última é um recurso interessante onde materiais agregados são de difícil aquisição por não se possuir jazidas próximas à obra, ou por outro lado, se as jazidas próximas são protegidas por lei. Esse procedimento é aplicado em estradas permanentes (pavimentadas ou não), estacionamentos, pistas de aeroportos, depósitos de containeres, ferrovias.

Os possíveis mecanismos de reforço promovidos pelos geossintéticos, nas aplicações descritas acima, são o confinamento lateral e o efeito membrana (Berg, 2002).

O confinamento lateral (Figura 2.14) é induzido pela resistência ao cisalhamento da interface base-reforço através da transferência das tensões cisalhantes da camada de base para o reforço. Tal ação pode limitar os deslocamentos laterais, configurando, portanto, um aumento do confinamento da camada de base.

Quando grandes mobilizações são impostas à camada de base, a deformação vertical desta gera uma forma côncava na camada de geossintético (Figura 2.15). Nesta configuração deformada, são gerados esforços de tração no geossintético, cujas componentes verticais tendem a restringir o movimento do aterro. A este mecanismo de reforço é dado o nome de efeito membrana.

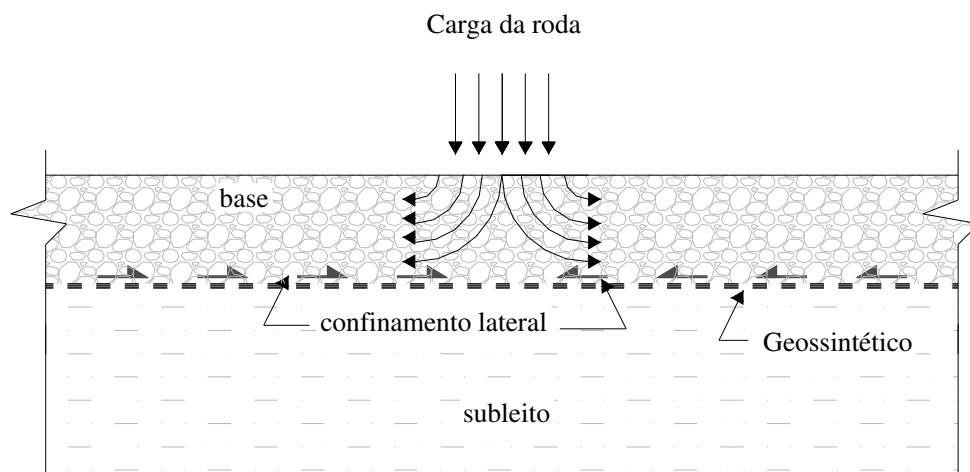


Figura 2.14 – Aumento do confinamento lateral

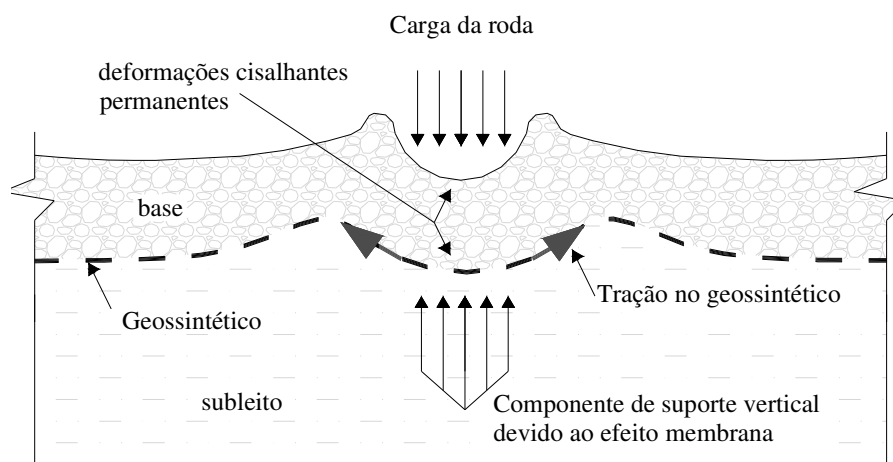


Figura 2.15 – Aumento da capacidade de suporte devido ao efeito membrana

2.3.3. Taludes reforçados e estruturas de contenção

Nos taludes e estruturas de contenção em solo compactado, o reforço com geossintéticos atua no sentido de garantir ou permitir a estabilidade da obra, com uma inclinação de talude superior àquela obtida para um solo sem reforço. Desta forma, o volume de material de aterro e a área deste são minimizados.

A vantagem das estruturas reforçadas às convencionais (concreto armado e concreto ciclópico) é que os custos podem ser minimizados face à simplicidade do método construtivo (trabalho manual e equipamentos leves), a utilização de materiais mais baratos e um menor tempo de construção. Pode-se destacar também, que o resultado final é geralmente uma estrutura visualmente mais agradável (Figuras 2.16 e 2.17) e com maior tolerância aos movimentos diferenciais.



Figura 2.16 – Muro reforçado com face em cobertura vegetal

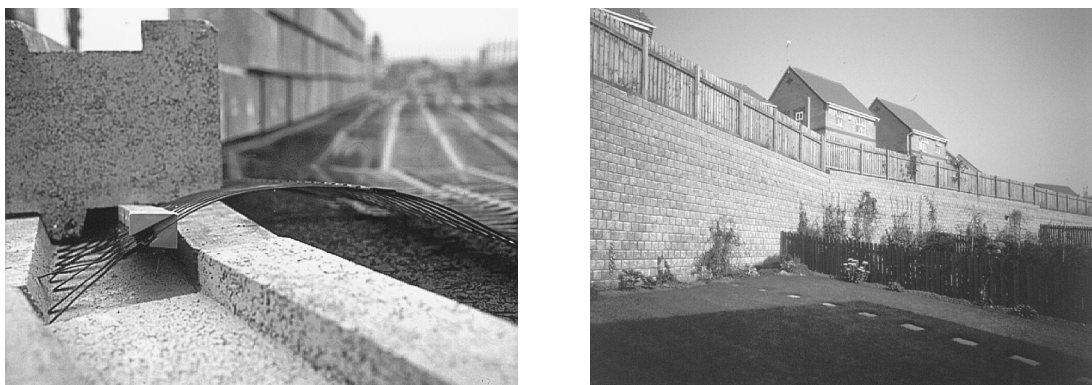


Figura 2.17 – Muros reforçados com face em blocos de concreto

A Figura 2.18 apresenta uma proposta de otimização de projetos de estabilização de taludes. A utilização do geossintético diminui o custo e o espaço requerido para a obra de estabilização.

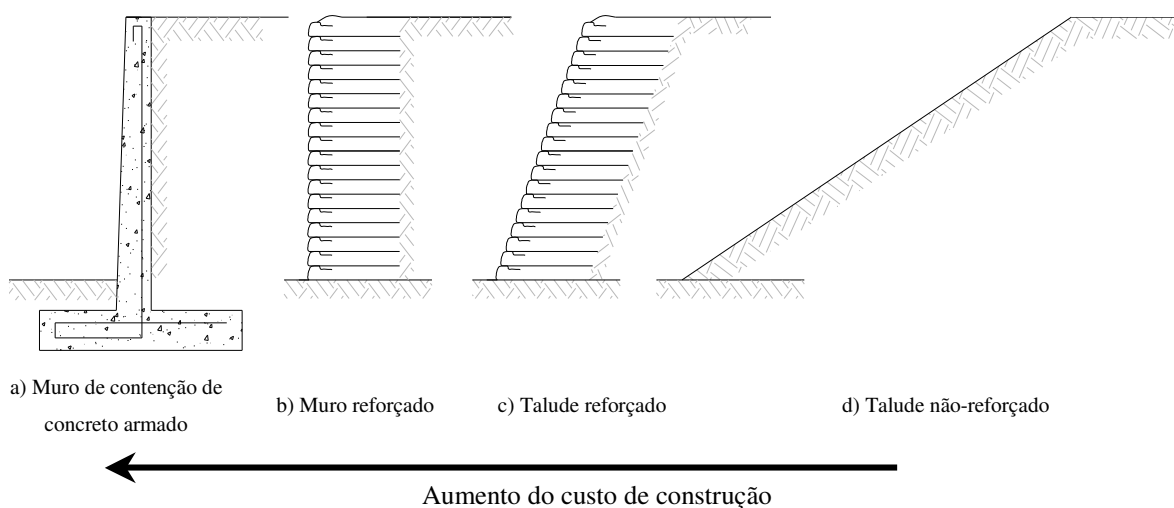


Figura 2.18 - Otimização de projetos de taludes reforçados (Zornberg, 1998)

A Figura 2.19 mostra dois dos possíveis mecanismos de ruptura em um muro reforçado com geossintéticos e o comportamento da interface em diferentes regiões do maciço. No interior da região instabilizada, o solo tende a deslizar sobre o geossintético. Entretanto, na região mais interna, além da superfície de ruptura, há uma tendência de arrancamento do reforço.

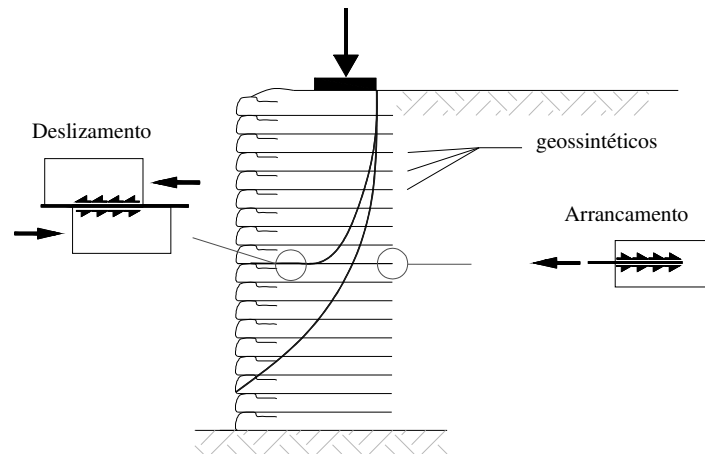


Figura 2.19 – Características de interface (Pereira 2003)

A metodologia convencional de dimensionamento de estruturas de contenção em solo reforçado é muito semelhante à metodologia adotada para estruturas de arrimo de gravidade.

Inicialmente, considerando-se o maciço reforçado como um sistema rígido, são verificadas as condições de estabilidade externa incluindo, como ilustrado na Figura 2.20, o deslizamento ao longo da base, o tombamento, a capacidade de carga do solo de fundação. A verificação da estabilidade global (Figura 2.21) é comumente analisada através de métodos de equilíbrio limite.

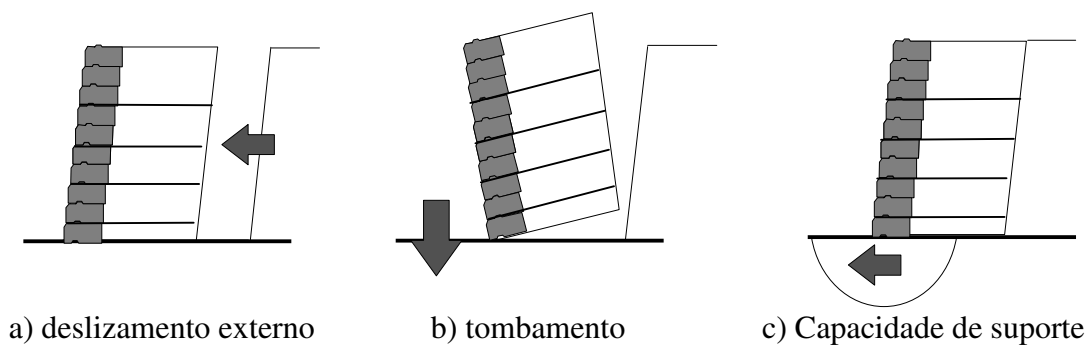


Figura 2.20 – Verificações da estabilidade externa

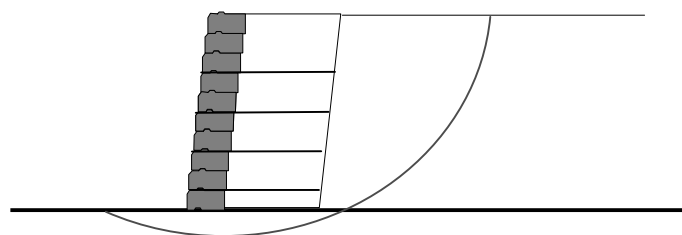


Figura 2.21 – Verificação da estabilidade global

A determinação da estabilidade interna envolve a verificação da ocorrência de ruptura do reforço, o deslizamento interno e o arrancamento do reforço, como ilustrado na Figura 2.22. O sucesso de obras reforçadas requer que o geossintético seja capaz de resistir às solicitações de tração, com deformação compatível às necessidades de projeto, durante o tempo de vida útil da obra e que o comprimento de ancoragem seja suficiente para que não haja arrancamento.

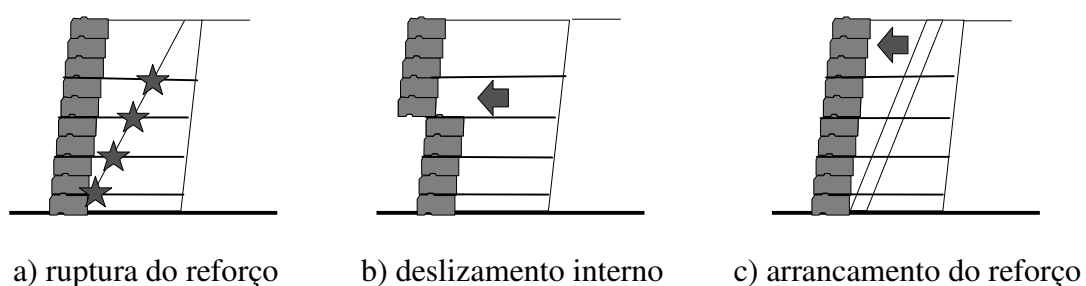


Figura 2.22 – Verificações da estabilidade interna

Capítulo 3

MODELOS CONSTITUTIVOS IMPLEMENTADOS

Neste capítulo, são apresentados os modelos constitutivos que descrevem, de forma idealizada, o comportamento tensão-deformação de cada componente de uma ESR (solo, reforço e interface solo-reforço).

3.1. EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

As equações constitutivas são utilizadas para representar, de forma ideal, o comportamento tensão-deformação dos materiais. A descrição das leis constitutivas que relacionem as tensões às deformações para os materiais que exibem comportamento elastoplástico é o objetivo da modelagem matemática da plasticidade que define três pontos relevantes (Owen e Hinton, 1980):

- Leis constitutivas para o material antes da ocorrência de deformações plásticas, ou seja, durante o comportamento elástico do material;
- Um critério de plastificação que define o nível de tensões a partir do qual as deformações plásticas iniciam;
- Leis constitutivas para o material durante a ocorrência de deformações plásticas, ou seja, durante o fluxo plástico.

a) Equação constitutiva elástica

O princípio da aditividade (Owen e Hinton, 1980) estabelece que o incremento total de as deformações sofridas por um contínuo pode ser decomposto em duas parcelas:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_e + d\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (3.1)$$

na qual $d\boldsymbol{\varepsilon}_e$ representa a parcela elástica das deformações totais e $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$ corresponde à parcela plástica.

A parcela elástica das deformações relaciona-se à variação infinitesimal das tensões $d\boldsymbol{\sigma}$ através da relação:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D}_e^{-1} d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.2)$$

em que \mathbf{D}_e é a matriz constitutiva elástica.

b) Critério de plastificação

O critério de plastificação determina o nível de tensões no qual as deformações plásticas irreversíveis se iniciam e pode ser dado pela inequação:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, h) \leq 0 \quad (3.3a)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ representa o estado de tensões e h é um parâmetro de endurecimento definido em função de alguma medida de deformação plástica a partir de dados ou observações experimentais.

Para um material elastoplástico perfeito, que será considerado neste trabalho, o critério de plastificação torna-se:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (3.3b)$$

A Equação $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ define a superfície de plastificação. No interior desta superfície, o material se comporta elasticamente ($F < 0$). Quando o estado de tensões determina um ponto sobre a superfície ($F = 0$), o material começa a plastificar. A região exterior à função de plastificação ($F > 0$) é um espaço inadmissível de tensões.

c) Função potencial plástico

A lei de fluxo plástico determina que o incremento de deformação plástica seja proporcional ao gradiente de uma função potencial plástico $G(\boldsymbol{\sigma})$. Essa relação pode ser escrita como:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\lambda \mathbf{b} \quad (3.4)$$

em que $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade maior que zero denominada parâmetro plástico e \mathbf{b} o vetor gradiente da função potencial plástico. A Equação 3.4 caracteriza a chamada lei de fluxo não associada. Quando a função potencial plástico $G(\boldsymbol{\sigma})$ coincide com a função de plastificação $F(\boldsymbol{\sigma})$ a lei de fluxo é dita associada.

d) Equação constitutiva elastoplástica (material elastoplástico perfeito)

Considerando-se o princípio da aditividade, a Equação 3.2 pode ser reescrita como:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (3.5a)$$

ou ainda,

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}_e d\lambda \mathbf{b} \quad (3.5b)$$

Ao longo de uma trajetória de deformação, a magnitude do incremento de deformação plástica deverá atender simultaneamente às seguintes restrições (conhecidas na programação matemática como as condições de Khun-Tucker):

$$F(\boldsymbol{\sigma}, h) \leq 0 \quad (3.6a)$$

$$d\lambda \geq 0 \quad (3.6b)$$

$$F d\lambda = 0 \quad (3.6c)$$

A Equação 3.6a garante que as trajetórias de tensão fiquem dentro ou, no máximo, sobre a superfície de plastificação. Durante o fluxo plástico, o multiplicador plástico é não negativo (Equação 3.6b). O valor de $d\lambda < 0$ significa a ocorrência de descarregamento elástico (Owen e Hinton, 1980). A Equação 3.6c é a restrição de complementaridade, ou seja, se $F(\boldsymbol{\sigma}, h) < 0$ então $d\lambda = 0$ e um comportamento elástico é obtido; e, se, $d\lambda > 0$ ocorre fluxo plástico e o critério de plastificação, $F(\boldsymbol{\sigma}, h) = 0$, deverá ser satisfeito.

Assim sendo, de acordo com as condições de Khun-Tucker, durante o fluxo plástico tem-se que

$$dF(\boldsymbol{\sigma}, h) = \left(\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, h)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, h)}{\partial h} \right)^T dh = \mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} + a_h^T dh = 0 \quad (3.7a)$$

na qual \mathbf{a} é gradiente da função de plastificação e a_h é uma parcela relacionada ao endurecimento, ou ainda no caso de materiais com plasticidade perfeita

$$dF(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3.7b)$$

Substituindo-se a Equação 3.5b em 3.7b, obtém-se:

$$dF(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b} d\lambda = 0 \quad (3.8)$$

da qual se obtém o valor de $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}} \quad (3.9)$$

Substituindo-se o valor de $d\lambda$ em 3.5b, obtém-se:

$$d\sigma = \left[\mathbf{D}_e - \mathbf{D}_e \frac{\mathbf{b} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}} \right] d\epsilon = \mathbf{D}_{ep} d\epsilon \quad (3.10)$$

em que \mathbf{D}_{ep} é a matriz constitutiva elastoplástica que é função do estado de tensão corrente.

3.2.1. Modelos constitutivos para o solo

O comportamento tensão-deformação dos solos depende de uma série de diferentes fatores, tais como: condição inicial de densidade e saturação do solo; estrutura do solo; condição de drenagem; tipo de problema (plano, triaxial, etc); história de tensão; condição de carregamento; etc.

Dentre as principais características do comportamento tensão-deformação dos solos destaca-se a não linearidade e a plasticidade (amolecimento, endurecimento, dilatância, etc.).

Vários modelos constitutivos têm sido propostos nos últimos anos: modelos não lineares pseudo-elástico, como o modelo hiperbólico proposto por Duncan e Chang (1970); modelos elastoplásticos como os modelos Camclay Modificado (Roscoe *et al*, 1958), Lade (Lade, 1977 e 1979) e Lade-Kim (Lade e Kim, 1988a,b,c). Entretanto, os parâmetros utilizados por alguns destes modelos são muitas vezes de difícil obtenção.

Em função de sua simplicidade, dois modelos constitutivos elastoplástico perfeito e com plasticidade não associada foram implementados no código do programa ANLOG para a elaboração deste trabalho: o modelo Mohr-Coulomb modificado e Drucker-Prager modificado.

i) Modelo Mohr-Coulomb modificado

A função de plastificação F do modelo Mohr-Coulomb pode ser escrita, em termos dos invariantes de tensão e considerando a convenção de sinal de compressão positiva (Desai e Siriwardane, 1984; Owen e Hinton, 1980), como:

$$F = \sqrt{I_{2D}} K(\theta) - \frac{1}{3} I_1 \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (3.11)$$

em que

$$K(\theta) = \left(\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) \quad (3.12)$$

e c e ϕ são, respectivamente, a coesão e o ângulo de atrito interno do material; e

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{I_{3D}}{I_{2D} \sqrt{I_{2D}}} \right) \quad \theta \in [-\pi/6; \pi/6] \quad (3.13)$$

é o ângulo de Lode;

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.14)$$

é o primeiro invariante do tensor de tensão $\boldsymbol{\sigma}$;

$$I_{2D} = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_d \boldsymbol{\sigma}_d) \quad (3.15)$$

é o segundo invariante do tensor de tensão desviadora dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I} \quad (3.16)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade e,

$$I_{3D} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_d \boldsymbol{\sigma}_d \boldsymbol{\sigma}_d) \quad (3.17)$$

é o terceiro invariante do tensor de tensão desviadora. Nestas definições J_3 significa o traço do tensor de tensão.

No espaço das tensões principais, a superfície de plastificação de Mohr-Coulomb tem a forma de uma pirâmide em que a seção normal ao eixo hidrostático em qualquer ponto é um hexágono irregular conforme o ilustrado na Figura 3.1. As arestas e o ápice (vértice) da superfície de Mohr-Coulomb formam um conjunto de pontos singulares nos quais os gradientes da função de plastificação e da função potencial plástico não possuem definição única. Dificuldades numéricas podem aparecer quando o estado de tensão se aproxima dessas regiões.

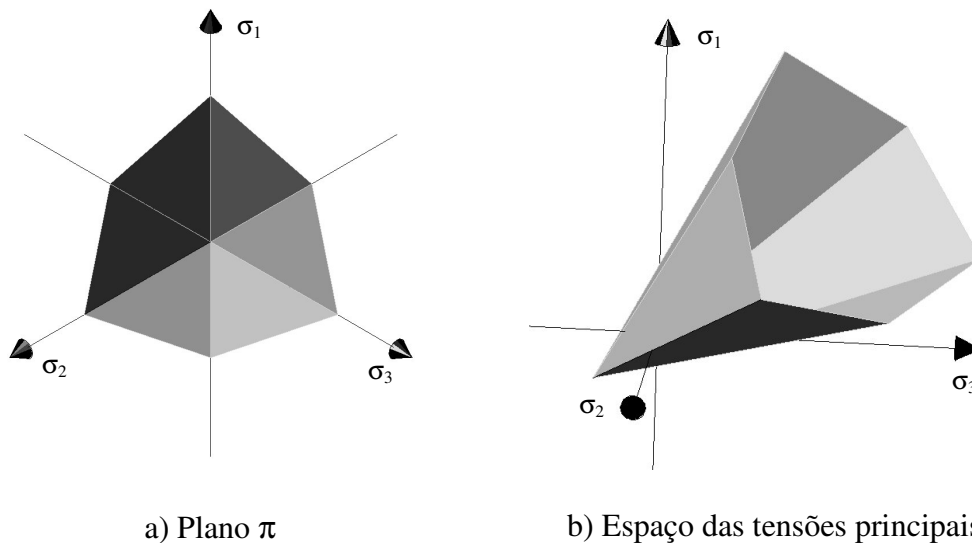


Figura 3.1 – Superfície de plastificação de Mohr-Coulomb

Para contornar estes problemas, Sloan e Booker (1986) e Abbo e Sloan (1995) propuseram uma nova versão para o modelo Mohr-Coulomb na qual as singularidades relacionadas ao ápice e às arestas são removidas. Estas modificações são descritas a seguir.

Para um dado valor de ângulo de Lode θ , verifica-se uma relação linear entre $\sqrt{I_{2D}}$ e $I_1/3$ da Equação 3.11, como é mostrado na Figura 3.2. A remoção da singularidade relacionada ao ápice do critério de Mohr-Coulomb pode ser feita determinando-se uma superfície aproximada que seja contínua e diferenciável em todos os pontos. Abbo e Sloan (1995) propuseram uma aproximação hiperbólica tal como ilustrado na Figura 3.2.

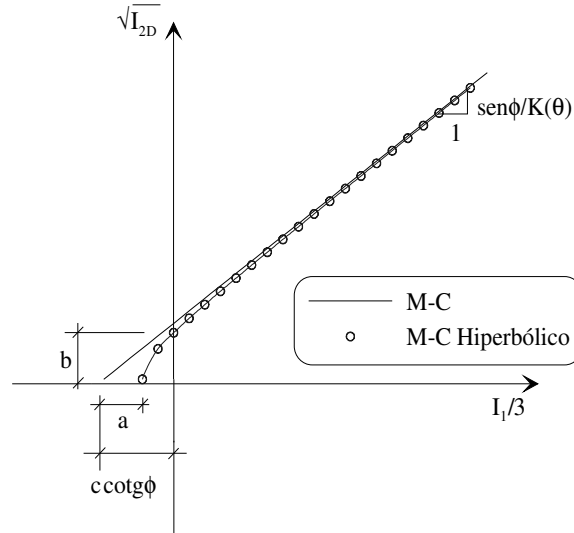


Figura 3.2 – Aproximação hiperbólica da função de plastificação de Mohr-Coulomb

A equação geral da hipérbole é

$$\frac{\left(\frac{I_1}{3} + c \cot \phi\right)^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{I_{2D}})^2}{b^2} = 1 \quad (3.18)$$

em que a e b são distâncias definidas na Figura 3.2. O trecho assintótico da hipérbole tem inclinação b/a e o seu prolongamento corta o eixo das abscissas em $-c \cot \phi$.

Igualando-se a inclinação da reta de Mohr-Coulomb com a inclinação do trecho assintótico da aproximação hiperbólica, tem-se que:

$$\frac{b}{a} = \frac{\tan \phi}{K(\theta)} \quad (3.19)$$

Substituindo-se a Equação (3.19) na Equação (3.18), obtém-se a nova expressão para a superfície de plastificação, ou seja:

$$F = \sqrt{I_{2D} (K(\theta))^2 + (a \tan \phi)^2} - \frac{I_1}{3} \tan \phi - c \cot \phi \quad (3.20)$$

Nota-se que se o parâmetro “a” for tomado como nulo, a função de plastificação (Equação 3.20) retorna a sua forma original (Equação 3.11). Abbo e Sloan (1995) recomendam para o parâmetro “a” um valor em torno de $5\% c \cot g \phi$.

Para tratar as singularidades relacionadas às arestas, ou seja, para $\theta = \pm 30^\circ$, Sloan & Booker (1986) propuseram a seguinte aproximação trigonométrica para a expressão $K(\theta)$:

$$K(\theta) = A + B \sin 3\theta \text{ para } |\theta| > \theta_T \quad (3.21)$$

em que

$$A = \frac{1}{3} \cos \theta_T \left(3 + \operatorname{tg} \theta_T \operatorname{tg} 3\theta_T + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sinal}(\theta) (3 \operatorname{tg} \theta_T - \operatorname{tg} 3\theta_T) \sin \phi \right) \quad (3.22)$$

e

$$B = \frac{1}{3 \cos 3\theta_T} \left(\operatorname{sinal}(\theta) \sin \theta_T - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_T \sin \phi \right) \quad (3.23)$$

ou

$$K(\theta) = \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \text{ para } |\theta| \leq \theta_T \quad (3.24)$$

e θ_T é o ângulo de transição que pode assumir valores de 25° a 29° (Sloan e Booker, 1986).

A Figura 3.3 ilustra o procedimento adotado para tratar as arestas do modelo Mohr-Coulomb.

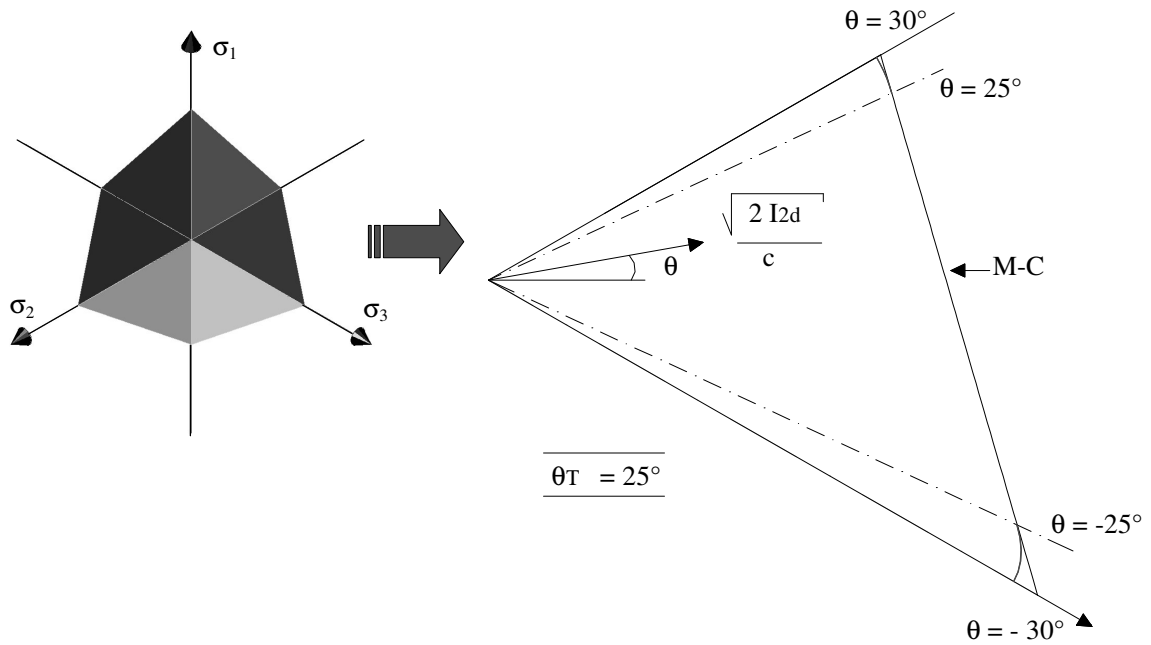


Figura 3.3 – Tratamento das arestas do modelo Mohr-Coulomb (Abbo e Sloan, 1986)

Ao critério de plastificação (Equações 3.20 a 3.24) resultante do tratamento do ápice e das arestas do modelo original deu-se o nome de modelo Mohr-Coulomb Modificado. A este modelo está associado o seguinte vetor gradiente da função de plastificação (Owen e Hinton, 1980):

$$\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial I_1} \right) \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}_{C_1} + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial I_{2D}} - \frac{\tan 3\theta}{2I_{2D}} \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \theta} \right) \frac{\partial I_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}_{C_2} + \underbrace{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta (I_{2D})^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \theta} \right) \frac{\partial I_{3D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}_{C_3} \quad (3.25)$$

As constantes C_1 , C_2 e C_3 são definidas na Tabela 3.1

O vetor \mathbf{b} que define o gradiente da função potencial plástico é definido de forma análoga ao vetor \mathbf{a} , adotando-se uma função potencial plástico similar à função de plastificação apresentada nas Equações 3.20 a 3.24, substituindo-se, no entanto, o ângulo de atrito ϕ pelo ângulo de dilatação ψ .

Tabela 3.1. Definição das constantes do vetor **a** – Modelo Mohr-Coulomb modificado

	$ \theta \leq \theta_T$	$ \theta > \theta_T$
C_1	$-\frac{1}{3} \text{sen } \phi$	$-\frac{1}{3} \text{sen } \phi$
C_2	$\frac{\zeta}{2\sqrt{I_{2D}}} \left(\left(\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen } \theta \text{sen } \phi \right) - \text{tg } 3\theta \left(-\text{sen } \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \text{sen } \phi \right) \right)$	$\zeta \frac{(A - 2B \text{sen } 3\theta)}{2\sqrt{I_{2D}}}$
C_3	$\frac{-\zeta\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta I_{2D}} \left(-\text{sen } \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \text{sen } \phi \right)$	$-\zeta \frac{3\sqrt{3} B}{2I_{2D}}$

$$\zeta = \frac{\sqrt{I_{2D}} K}{\sqrt{I_{2D}} K^2 + (a \text{sen } \phi)^2}$$

ii) Modelo Drucker-Prager modificado

O critério de plastificação de Drucker e Prager (1952) escrito em termos do primeiro invariante de tensão I_1 e do segundo invariante do tensor de tensão desviadora I_{2D} é dado pela equação (Owen e Hinton, 1980):

$$F = \sqrt{I_{2D}} - \alpha' I_1 - k = 0 \quad (3.26)$$

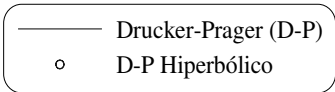
em que

$$\alpha' = \frac{2 \text{sen } \phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen } \phi)} \quad \text{e} \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen } \phi)} \quad (3.27a)$$

para o caso em que o modelo Drucker-Prager coincide com as arestas externas do modelo Mohr-Coulomb (Figura 3.4) ou

$$\alpha' = \frac{2 \text{sen } \phi}{\sqrt{3}(3 + \text{sen } \phi)} \quad \text{e} \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \text{sen } \phi)} \quad (3.27b)$$

para o caso em que coincide com as arestas internas do modelo Mohr-Coulomb.



De forma análoga àquela proposta por Abbo e Sloan (1995), propõe-se o mesmo tratamento para o ápice do modelo de Drucker-Prager. Assim sendo, utilizando-se a aproximação hiperbólica indicada na Figura 3.5, pode-se escrever a seguinte equação:

$$\frac{(I_1 + 3c \cot g\phi)^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{I_{2D}})^2}{b^2} = 1 \quad (3.28)$$

em que a e b são distâncias definidas na Figura 3.5. O trecho assintótico da hipérbole tem inclinação b/a e o seu prolongamento corta o eixo das abscissas em $-3c \cot g\phi$.

Igualando-se a inclinação da reta de Drucker-Prager com a inclinação do trecho assintótico da hipérbole, tem-se que:

$$\frac{b}{a} = \alpha' \quad (3.29)$$

Substituindo-se a Equação 3.29 na Equação 3.28, obtém-se a seguinte função de plastificação modificada:

$$F = \sqrt{I_{2D} + (a\alpha')^2} - \alpha' I_1 - k \quad (3.30)$$

Observe que se o parâmetro “ a ” na equação for igual a zero retorna-se ao critério de Drucker-Prager original.

Definida, então, a nova função de plastificação (Equação 3.30), pode-se determinar o gradiente da função de plastificação:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial I_1} \right) \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}_{C_1} + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial I_{2D}} \right) \frac{\partial I_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}_{C_2} \quad (3.31)$$

onde C_1 e C_2 são constantes indicadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2. Definição das constantes do vetor \mathbf{a} – Modelo Drucker-Prager modificado

C_1	C_2
$-\alpha'$	$\frac{1}{2\sqrt{I_{2D} + (a\alpha')^2}}$

Este modelo considera um fluxo não associado cuja função potencial plástico é idêntica à função de plastificação (Equação 3.30), substituindo-se apenas o ângulo de atrito ϕ pelo ângulo de dilatância ψ , nas Equações 3.27a ou 3.27b.

3.2.2. Modelos constitutivos para o reforço

Neste trabalho, o comportamento tensão-deformação do reforço (na tração) pode ser representado através de três modelos: o linear elástico (Figura 3.6a), o bi-linear elástico (Figura 3.6b) e o parabólico elástico proposto por Karpurapu e Bathurst (1992 e 1995) (Figura 3.6c).

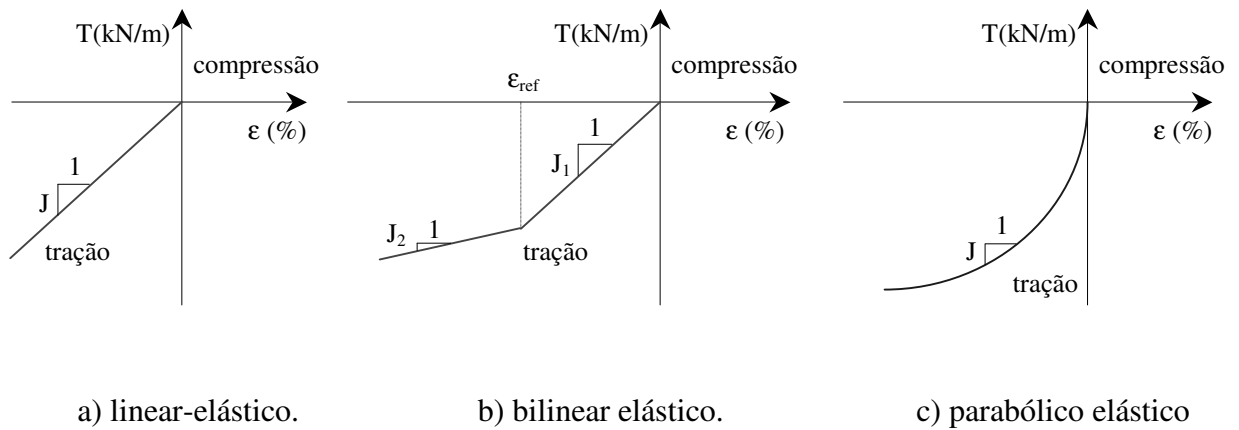


Figura 3.6 - Modelos de comportamento do reforço na tração

Esses modelos utilizam parâmetros obtidos em ensaios de tração não confinados e prevêm que o geossintético resiste apenas a esforços de tração. O modelo linear-elástico é o mais simples e não é adequado a alguns tipos de geossintéticos e a níveis altos de deformação. O modelo bilinear elástico possui dois trechos lineares, sendo o ponto de transição dado por uma deformação de referência ϵ_{ref} . A relação constitutiva do modelo parabólico elástico proposto por Karpurapu e Bathurst (1992 e 1995) e implementado no ANLOG por Pereira (2003) pode ser expressa pela seguinte equação:

$$T = a\epsilon + b\epsilon^2 \quad (3.32)$$

na qual, a e b são constantes obtidas dos ensaios de tração não confinada. A rigidez tangente deste modelo depende do nível de deformação do reforço e é definida pela equação:

$$J = \frac{dT}{d\varepsilon} = a + 2b\varepsilon \quad (3.33)$$

A relação constitutiva proposta por Karpurapu e Bathurst (Equação 3.32) apresenta uma mudança de sinal para a rigidez tangente para valores de deformação maiores que $2b$. Entretanto, sugere-se a seguinte modificação deste modelo:

$$J = a + 2b\varepsilon \quad \text{para } \varepsilon < 2b \quad (3.34a)$$

e

$$J = J_{\min} \quad \text{para } \varepsilon > 2b \quad (3.34b)$$

em que, J_{\min} é um valor mínimo a ser adotado para o valor da rigidez do reforço.

3.2.3. Modelo constitutivo para a interface solo-reforço.

O comportamento constitutivo da interface solo-reforço pode ser analisado à luz dos ensaios de cisalhamento como mencionado no capítulo anterior. A Figura 3.7 apresenta uma idealização do ensaio de cisalhamento (Goodman, 1968) onde k_s e k_n são, respectivamente, a rigidez tangente e a rigidez normal; δ'_s e δ'_n são, respectivamente, os deslocamentos relativos cisalhante e normal da interface. σ é a tensão normal e τ é tensão cisalhante atuando na interface.

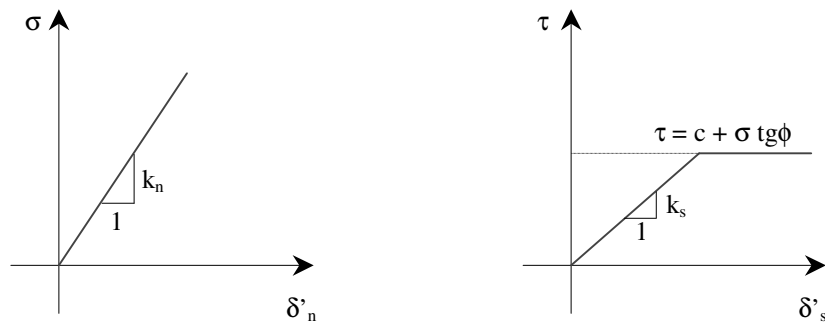


Figura 3.7 – Idealização do ensaio de cisalhamento da interface

A resistência ao deslizamento da interface é definida pelo critério de Coulomb. Assim sendo, o comportamento constitutivo da interface solo-reforço pode ser idealizada por um modelo elástico perfeitamente plástico sem endurecimento e com plasticidade não associada.

O critério de plastificação dado pela equação:

$$F = |\tau| - c - \sigma \operatorname{tg} \phi = 0 \quad (3.35)$$

e a função potencial plástico expressa por:

$$G = |\tau| - c - \sigma \operatorname{tg} \psi \quad (3.36)$$

são ilustradas na Figura 3.8, em que c é a adesão, ϕ é ângulo de atrito e ψ é o ângulo de dilatação.

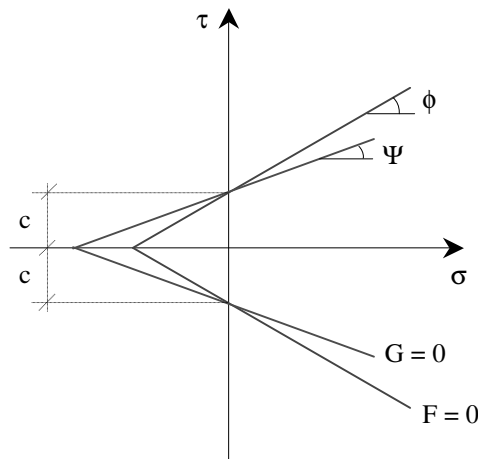


Figura 3.8 – Modelo de Coulomb para a interface solo-reforço

Capítulo 4

FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA PROBLEMAS EM SOLOS REFORÇADOS

Neste capítulo, apresenta-se a formulação, via MEF, do problema mecânico não linear de equilíbrio estático. Apresentam-se, também, as estratégias de solução numérica e os algoritmos de integração de tensão, ambos necessários para assegurar que ao longo de toda trajetória de deformação sejam atendidas, em nível global, a condição de equilíbrio, e, em nível local, a equação constitutiva.

4.1 –REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A metodologia atual de projeto e dimensionamento de ESR baseia-se na teoria de equilíbrio limite, que como se sabe, não considera explicitamente as deformações do solo e nem a interação que ocorre entre os elementos de reforço e o solo (Azevedo *et al.*, 1992). Essas limitações podem ser superadas com o emprego do MEF que possibilita melhorar o entendimento do comportamento observado em ensaios de campo e laboratório, modelar a trajetória de deformação até o colapso, observar a influência de cada elemento no comportamento da ESR e investigar mudanças nos procedimentos de construção e na natureza do sistema.

Uma ESR pode ser modelada, via MEF, através de uma representação discreta ou de uma representação contínua. Na representação discreta, diferentes tipos elementos finitos são usados para simular o comportamento do solo, do reforço e da interface solo-reforço. Este tipo de representação, portanto, fornece diretamente informações a respeito das deformações e tensões no solo, no reforço e na interface solo-reforço. Além disso, permite, não só modelar o deslocamento relativo entre o solo e o reforço, como também, modelar adequadamente o processo construtivo.

A representação contínua ou do contínuo equivalente (Chen *et al.*, 2000) considera o solo reforçado como um material único, homogêneo e anisotrópico, usando o conceito de rigidez ou resistência ponderada. Em termos de elementos finitos, um único tipo de elemento finito é usado para representar o meio reforçado.

Uma breve revisão bibliográfica foi realizada sobre a utilização do MEF em análises de solos reforçados, com o intuito de avaliar os diferentes tipos de elementos e relações constitutivas que vem sendo utilizados. O resultado desta revisão é apresentado, resumidamente, nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 em função do tipo de obra geotécnica.

Tabela 4.1 - Pavimentação

Referência	Solo		reforço		Interface solo-reforço	
	Tipo elemento	Modelo constitutivo	Tipo elemento	Modelo constitutivo	Tipo elemento	Modelo constitutivo
Raymond e Ismail (2003)	Q8	Elastoplástico	barra	?	6 nós	?
Perkins (2001)	?	Elastoplástico	Q4	Linear elástico - Anisotrópico	*	*
Burd e Houlsby (1989)	T6	Elastoplástico	barra	Linear Elástico	*	*

* = Não utilizado na modelagem

? = A informação não foi apresentada no trabalho ou não está definida de forma clara.

Tabela 4.2 - Aterros

Referência	Solo		reforço		Interface solo-reforço	
	Tipo elemento	Modelo constitutivo	Tipo elemento	Modelo constitutivo	Tipo elemento	Modelo constitutivo
Bergado et al. (2002)	T6	Elastoplástico	barra	Linear elástico	6 nós	Elastoplástico
Bergado et al. (1995)	?	Elastoplástico	?	Linear elástico	Junta	?
Sharma e Bolton (1996)	T3	Elastoplástico	barra	Bilinear elástico	Junta	Elastoplástico
Chai e Bergado (1993)	?	Elastoplástico	barra	?	?	Hiperbólico
Hird et al. (1990)	T6	Elastoplástico	?	?	GTB	Elastoplástico
Varadarajan et al. (1999)	Q8	Elastoplástico	barra	Elastoplástico	6 nós	Elastoplástico
Yoo (2001)	Q4	Hiperbólico e Linear elástico	treliça	Linear elástico	*	*
Bauer e Mowafy (1985)	Q8	Compósito Hiperbólico	*	*	*	*

Tabela 4.3 - Fundações

Referência	Solo		reforço		Interface solo-reforço	
	Tipo elemento	Modelo constitutivo	Tipo elemento	Modelo constitutivo	Tipo elemento	Modelo constitutivo
Ketchart e Wu (2001)	Q4	Hiperbólico	B2	Linear elástico	GTB	Hiperbólico
Boushehrian e Hataf (2002)	T15	Elastoplástico	barra	Linear elástico	Junta	Elastoplástico
Bergado et al. (2001)	T15	Elastoplástico	barra	Bilinear Elástico	Junta	Elastoplástico
Otani et al. (1998)	?	Compósito Elastoplástico	*	*	*	*
Bathurst e Knight (1998)	Q8	Compósito Hiperbólico	*	*	*	*
Yamamoto e Otani (2002)	?	Compósito Elastoplástico	*	*	*	*

Tabela 4.4 – Taludes reforçados e estruturas de contenção

Referência	solo		reforço		Interface solo-reforço	
	Tipo elemento	Modelo constitutivo	Tipo elemento	Modelo constitutivo	Tipo elemento	Modelo constitutivo
Ho e Rowe (1997)	Q8	Elastoplástico	barra	Linear elástico	Rowe e Soderman (1987)	Elastoplástico
Karpurapu e Bathurst (1995)	Q8	Hiperbólico Modificado	barra	Linear elástico	6 nós	Hiperbólico
Karpurapu e Bathurst (1992)	Q8	Hiperbólico Modificado	barra	Não-linear	junta Ghaboussi e outros (1973)	Elastoplástico
Pereira (2003)	Q8	Hiperbólico	barra	Parabólico	GTB	Linear elástico
Chalaturnyk et al. (1990)	?	Hiperbólico	barra	Linear elástico	*	*
Helwany et al. (1999)	Q4	Hiperbólico	treliça	Linear elástico	*	*
Chen et al. (2000)	?	Compósito Hiperbólico	*	*	*	*

Nesta revisão bibliográfica, procurou-se estudar as principais características a serem consideradas em uma análise de ESR, via MEF, e como resultados pode-se destacar:

- Dentre os modelos constitutivos para solos, os mais empregados são o modelo hiperbólico e os modelos elastoplásticos perfeitos baseados no critério de Mohr-Coulomb;
- Na grande maioria dos trabalhos investigados, o geossintético é idealizado com comportamento linear elástico;
- A interface solo-geotêxtil apresenta a mesma resistência tanto no “cisalhamento direto” quanto no arrancamento;
- A interface solo-geogrelhas apresenta uma resistência ao deslizamento diferente da resistência ao arrancamento;

- A formulação do elemento de interface deve ser tal que considere tanto a resistência ao deslizamento quanto ao arrancamento (Rowe e Soderman,1987). Esta consideração é relevante apenas nos casos em que geogrelhas são utilizadas como reforço.

A validade dos resultados de análises de uma ESR, via MEF, depende do uso correto do modelo numérico adotado. Isso envolve a escolha certa dos elementos finitos, a simulação adequada do processo construtivo, a imposição correta das condições de contorno, a lei constitutiva apropriada para o solo, reforço e interfaces, e a escolha adequada dos parâmetros de solução do sistema de equações não lineares gerado.

4.2. FORMULAÇÃO VIA MEF DO PROBLEMA MECÂNICO DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

A equação diferencial parcial que governa o problema mecânico de equilíbrio estático é dada por:

$$\nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \text{ em } V \quad (4.1)$$

e está sujeita às seguintes condições de contorno

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{q}_n \text{ em } S_q \text{ (condição de contorno natural)} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{u}_i = \boldsymbol{\delta} \text{ em } S_u \text{ (condição de contorno essencial)} \quad (4.2b)$$

na qual V é o domínio do problema, S_q e S_u são, respectivamente, os contornos do domínio com força e deslocamentos prescritos. ∇ é um operador diferencial de 1ª ordem que depende do tipo de problema (plano, axissimétrico, etc). Este operador será definido, adiante, para cada situação e componente da ESR. $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor das componentes de tensão, \mathbf{c} é o vetor de forças de corpo (peso próprio), \mathbf{q}_n é o vetor de forças de superfície, \mathbf{u}_i é o vetor dos deslocamentos prescritos e $\boldsymbol{\delta}$ é o vetor que contém os valores dos deslocamentos prescritos nulos ou não.

A obtenção da solução exata da Equação 4.1 não é trivial e muitas vezes só se torna possível para condições geométricas, de contorno e carregamento muito simples. Desta

forma, a utilização de um procedimento numérico para obtenção de uma solução aproximada é uma saída para obtenção de soluções mais gerais. Assim, a equação de equilíbrio representada pela Equação 4.1 pode ser escrita de forma aproximada pelo MEF (Cook *et al*, 1989) como:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.3)$$

em que \mathbf{F}_{int} é o vetor de força interna que representa o arranjo global dos vetores de força interna nodal equivalente ao estado de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ de cada elemento, $\mathbf{F}_{\text{int}}^e$, definido como:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV_e \quad (4.4)$$

\mathbf{F}_{ext} é o vetor de força externa que representa o arranjo global dos vetores de força externa em cada elemento, $\mathbf{F}_{\text{ext}}^e$, definido como:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}^e = \mathbf{F}_s^e + \mathbf{F}_c^e + \mathbf{F}_\delta^e \quad (4.5)$$

e que possui três parcelas, uma devido às forças de superfícies

$$\mathbf{F}_s^e = \int_{S_{qe}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_n dS_{qe} \quad (4.6)$$

outra devido às forças de corpo (peso próprio)

$$\mathbf{F}_c^e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{c} dV_e \quad (4.7)$$

e, outra, devido ao deslocamento prescrito $\boldsymbol{\delta}$

$$\mathbf{F}_\delta^e = -\mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta} \quad (4.8)$$

\mathbf{N} é a matriz que contém as funções de interpolação N_i que depende do elemento finito adotado, \mathbf{K}^e é a matriz de rigidez do elemento (que será apresentada adiante), e \mathbf{B} é a matriz cinemática definida como:

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} \quad (4.9)$$

4.3. SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

A equação de equilíbrio representada pela Equação 4.3 define um sistema de equações não lineares devido a não linearidade da parcela de força interna. Assim sendo, uma estratégia de solução deve ser adotada de modo a garantir a condição de equilíbrio global (Rocha, 2000). Neste item são apresentadas as formulações das estratégias de solução: puramente incremental (Método de Euler e Método de Euler com correção de carga), incremental-iterativo de Newton-Raphson e rigidez inicial .

Em todas as estratégias, a solução do problema é obtida atualizando-se o vetor de deslocamento nodal $\hat{\mathbf{u}}_{n+1}$ no final de cada incremento de carga $\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}}$, ou seja, de acordo com a expressão:

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = \hat{\mathbf{u}}_n + \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.10)$$

em que $\hat{\mathbf{u}}_n$ é o vetor de deslocamento nodal no início de um dado incremento de carga e $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ é o vetor de incremento de deslocamento nodal associado ao incremento de carga. Da mesma forma, os vetores de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ e tensão $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, no final de cada incremento de carga, podem ser atualizados de acordo com as seguintes expressões:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (4.12)$$

em que $\boldsymbol{\epsilon}_n$ e $\boldsymbol{\sigma}_n$ são, respectivamente, os vetores de deformação e tensão numa dada configuração de equilíbrio n , e

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.13)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_t \Delta \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.14)$$

são, respectivamente, os vetores de incrementos de deformação e tensão no passo de carga corrente. O sinal negativo na Equação 4.13 define a convenção de sinal de compressão positiva. \mathbf{D}_t é a matriz constitutiva que depende do modelo constitutivo adotado para representar a relação tensão-deformação.

4.3.1 - Método de Euler – Processo puramente incremental

O método mais simples para resolver o sistema de equações não lineares é o esquema puramente incremental (Método de Euler). No MEF com formulação em deslocamento, o sistema de equações não lineares pode ser resolvido para cada incremento de carga como:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_t^{-1} \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.15)$$

em que \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez global que representa o arranjo das matrizes de rigidez de cada elemento, \mathbf{K}^e , que depende da matriz constitutiva tangente \mathbf{D}_t a qual é avaliada em função do estado de tensão $\boldsymbol{\sigma}_n$ no início do incremento e em cada elemento

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} dV_e \quad (4.16)$$

e,

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} = \Delta \lambda_i \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.17)$$

é o vetor de incremento de força externa em que $\Delta \lambda_i$ é fator de incremento de carga.

Desde que a matriz de rigidez global permanece bem condicionada, o esquema de Euler é muito robusto e raramente falha em fornecer a solução. Embora robusto, esse

método pode ser pouco acurado para grandes passos de carga, principalmente quando algoritmos de integração de tensão de baixa ordem são utilizados (Sheng e Sloan, 2001).

4.3.2 - Método de Euler com correção de carga – puramente incremental.

A precisão do Método de Euler pode ser melhorada acrescentando o vetor de forças desequilibradas calculado no final de cada incremento de carga ao vetor de carga externa do incremento seguinte, de acordo com a seguinte expressão (Abbo e Sloan, 1996):

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_t^{-1} [\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} + (\mathbf{F}_{\text{ext},n} - \mathbf{F}_{\text{int},n})] \quad (4.18)$$

em que $\mathbf{F}_{\text{ext},n}$ e $\mathbf{F}_{\text{int},n}$ são os vetores de forças externas e internas, respectivamente, no início do incremento corrente.

4.3.3 – Método de Newton-Raphson – Processo incremental iterativo

Partindo-se de uma dada configuração de equilíbrio onde são conhecidos os deslocamento, os estados de deformação e tensão ($\hat{\mathbf{u}}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ e $\boldsymbol{\sigma}_n$), uma solução incremental inicial $\Delta \hat{\mathbf{u}}^0$ ou predita pode ser obtida e corrigida por iterações sucessivas, do tipo Newton-Raphson, até ser atingido uma nova configuração de equilíbrio de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \Delta \hat{\mathbf{u}}^0 + \sum_{k=1}^{\text{iter}} \delta \Delta \hat{\mathbf{u}}^k \quad (4.19)$$

na qual iter é o número de iterações necessário para atingir-se a convergência dentro do passo de carga corrente.

a) Obtenção da solução predita

A solução predita pode ser obtida resolvendo o sistema de equação:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{K}_t^{-1} \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.20)$$

Para problemas fortemente não-lineares o tamanho do passo pode inviabilizar a convergência do processo iterativo e por outro lado, a utilização de passos muito pequenos pode tornar o processo de solução muito lento.

Desta forma, a seleção automática do tamanho do incremento de carga é fator importante para o sucesso do processo de solução do sistema de equação (Nogueira, 1998). Uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve fornecer grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear e conduzir a pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear.

Crisfield (1981) adotou o seguinte procedimento para calcular o fator de incremento de carga:

$$\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_{i-1} \left(\frac{I_d}{I_{i-1}} \right)^\alpha \quad (4.21a)$$

em que, $\Delta\lambda_{i-1}$ é o fator de carga no passo anterior, I_d é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, que é especificado pelo usuário e I_{i-1} é o número de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior e α é um expoente cujo valor encontra-se usualmente entre 0.5 e 2.0. Em Crisfield (1991), seguindo sugestão de Ramm (1982), passou-se a adotar $\alpha = 0.5$.

Para o primeiro incremento de carga o valor do fator de incremento de carga é definido como:

$$\Delta\lambda_0 = \frac{1}{ninc} \quad (4.21b)$$

em que, $ninc$ é um número inteiro que define o tamanho do incremento de carga definido pelo usuário.

O processo incremental é controlado através do fator de carga λ . Este fator varia de zero à unidade ao longo da trajetória de carregamento.

Os fatores de incrementos de carga calculados automaticamente não poderão ser maiores ou menores que valores máximos e mínimos ($\Delta\lambda_{\max}$ e $\Delta\lambda_{\min}$) fornecidos pelo usuário para que o programa não entre num “loop” infinito.

Se a convergência não é verificada para um número máximo de iterações num dado passo, uma simples estratégia de corte do tamanho do passo é utilizada. Este corte é definido pela relação abaixo também sugerida por Crisfield (1981):

$$\Delta\lambda_i = \left(\frac{\text{TOLER}}{\text{ratio}} \right) \Delta\lambda_{i-1} \quad (4.22)$$

onde TOLER é a tolerância adotada e ratio é um adimensional definido em função do critério de convergência adotado.

b) Obtenção da correção iterativa

A Equação 4.3 pode ser escrita na forma residual incremental do Método de Newton-Raphson como:

$$\boldsymbol{\psi}(\Delta\hat{\mathbf{u}}) = \Delta\mathbf{F}_{\text{int}}(\Delta\hat{\mathbf{u}}) - \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.23)$$

em que, $\Delta\mathbf{F}_{\text{int}}$ é o vetor global do incremento de força interna.

Através da expansão em série de Taylor e desprezando-se os termos de ordem igual ou superior à segunda, pode-se obter a seguinte forma linearizada da Equação 4.23 na vizinhança de $\Delta\hat{\mathbf{u}}^k$, da k-ésima iteração:

$$\boldsymbol{\psi}^{k+1} = \boldsymbol{\psi}^k + \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \Delta\hat{\mathbf{u}}} \right\}^k \delta\Delta\hat{\mathbf{u}}^k = 0 \quad (4.24)$$

ou ainda,

$$\mathbf{K}_t^k \delta\Delta\hat{\mathbf{u}}^k = -\boldsymbol{\psi}^k \quad (4.25)$$

em que

$$\boldsymbol{\psi}^k = \Delta\mathbf{F}_{\text{int}}^k - \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.26)$$

e

$$\mathbf{K}_t^k = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \right)^k = \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \right)^k \quad (4.27)$$

é a matriz de rigidez tangente na iteração k. Quando a matriz de rigidez \mathbf{K}_t é mantida constante ao longo do ciclo iterativo tem-se o método de Newton-Raphson modificado e quando ela é reavaliada a cada iteração tem-se o método de Newton-Raphson Padrão.

Em princípio, o esquema iterativo garante que, a cada incremento, o equilíbrio global, as condições de compatibilidade, as condições de contorno e as relações constitutivas sejam satisfeitos. Isto, porém, ocorre dentro de uma tolerância pré-estabelecida, a qual não deverá ser nem muito grande, para que uma resposta imprecisa não seja obtida, nem muito pequena, para que não seja gasto esforço computacional desnecessário.

No final de cada iteração, uma verificação do estado de convergência da solução é feita através de um critério de convergência. Se um dado critério de convergência é atendido, o ciclo de iterações é interrompido.

Os seguintes critérios podem ser utilizados para avaliar a condição de convergência:

i) Força

Este critério é definido pela relação entre a norma euclidiana do vetor de forças desequilibradas na iteração corrente $\|\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}\|$ e a norma euclidiana do vetor de força externa $\|\mathbf{F}_{\text{ext}}\|$, ou seja:

$$\frac{\|\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}\|}{\|\mathbf{F}_{\text{ext}}\|} \leq \text{TOLER} . \quad (4.28)$$

Deve-se observar que este critério utiliza o valor atualizado dos vetores de força interna e externa. Sua aplicação em termos de incrementos de força interna e externa ($\Delta \mathbf{F}_{\text{int}}$ e $\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}}$) pode se tornar muito restritivo (de difícil convergência) para incrementos de carga muito pequenos.

ii) Deslocamento

Neste caso, o critério de convergência é definido pela relação entre a norma euclidiana do vetor de incrementos de deslocamentos iterativos (ou da iteração corrente), $\delta\Delta\hat{\mathbf{u}}$ e a norma euclidiana do vetor de incrementos de deslocamentos, $\Delta\hat{\mathbf{u}}$, conforme a expressão abaixo:

$$\frac{\|\delta\Delta\hat{\mathbf{u}}\|}{\|\Delta\hat{\mathbf{u}}\|} \leq \text{TOLER} \quad (4.29)$$

Este critério se torna muito restritivo (de difícil convergência) para incrementos muito pequenos (Nogueira, 1998).

iii) Energia

Este critério utiliza a relação entre a energia interna na iteração corrente, E^k , e o incremento de energia inicial, E^0 , tal como proposto por Bathe (1982) e conforme a expressão abaixo:

$$\frac{E^k}{E^0} \leq \text{TOLER} \quad (4.30)$$

em que

$$E^k = (\delta\Delta\hat{\mathbf{u}})^k \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}^k) \quad (4.31)$$

$$E^0 = \Delta\hat{\mathbf{u}}^0 \cdot \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.32)$$

O critério das forças é o mais utilizado. Entretanto, Bathe e Cimento (1980) sugerem uma combinação dos critérios de força e energia. Segundo eles, esta combinação dá origem a um critério bastante eficiente uma vez que tanto a força desequilibrada quanto os deslocamentos iterativos tendem a zero nas proximidades da solução.

Quando estáveis, os esquemas do tipo Newton-Raphson normalmente convergem rapidamente mas podem exigir um elevado custo computacional para alguns tipos de problemas (por exemplo, quando a matriz de rigidez tangente é não simétrica). A maior

desvantagem da família dos algoritmos Newton-Raphson é que as iterações podem não convergir, particularmente quando o comportamento é fortemente não linear (Sheng e Sloan, 2001).

4.3.4 – Método da rigidez inicial – Processo incremental iterativo

O método da rigidez inicial (também conhecido como método das tensões iniciais ou método da rigidez elástica) trata-se de um esquema incremental iterativo que usa a matriz de rigidez elástica para calcular a solução predita (Equação 4.20), bem como, as correções iterativas (Equação 4.25). Esta estratégia requer a montagem de uma matriz de rigidez global elástica simétrica apenas uma vez. Embora cada iteração seja rápida e o método muito estável, a taxa de convergência pode ser lenta para casos com uma zona plástica extensa. Na maioria das aplicações geotécnicas é, geralmente, preferível usar um esquema de rigidez tangente (por exemplo, o Newton-Raphson padrão), mas existem situações em que o esquema da rigidez inicial é muito utilizado. Estas situações incluem problemas onde uma lei de fluxo não-associada é usada ou onde a zona plástica é bem localizada (Sloan et al. 2000).

4.4. REPRESENTAÇÃO DISCRETA DE UMA ESR

Como dito anteriormente, a utilização do MEF para análise de uma ESR pode ser feita através de uma representação discreta em que cada componente da ESR (o solo, o reforço e a interface solo-reforço) é idealizada como um elemento finito distinto. Desta forma, são apresentados, a seguir, os elementos utilizados para representação de cada um destes componentes de uma ESR.

4.4.1. Representação do Solo

No caso de problemas planos, o solo pode ser representado por elementos quadrilaterais ou triangulares, lineares ou quadráticos (Figura 4.1), apresentando dois graus de liberdade por nó em termos dos deslocamentos u e v , respectivamente, nas direções x e y (ou r e y no caso axissimétrico).

Para problemas em condição de deformação plana o vetor das componentes de deformação é definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 0 \quad \gamma_{xy}] \quad (4.33)$$

e para problemas em condição de deformação axissimétrica este vetor é definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_\theta \quad \gamma_{ry}] \quad (4.34)$$

Associado a esse vetor de deformações tem-se o vetor das componentes de tensão que para a condição de deformação plana é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy}] \quad (4.35)$$

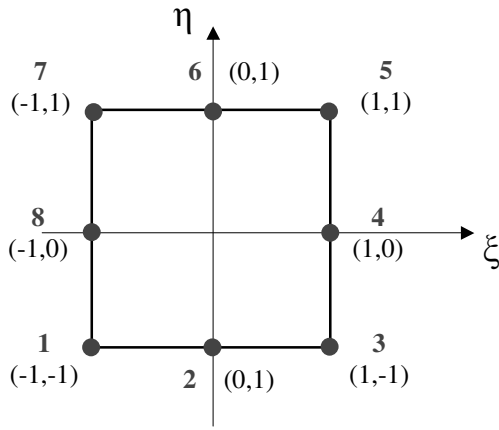
e para a condição de deformação axissimétrica é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_r \quad \sigma_y \quad \sigma_\theta \quad \tau_{ry}] \quad (4.36)$$

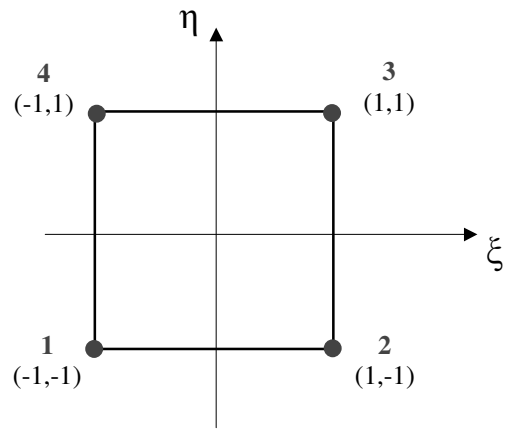
Estes dois vetores $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ se relacionam a través da matriz constitutiva \mathbf{D}_t cuja parcela elástica \mathbf{D}_e é dada por:

$$\mathbf{D}_e = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

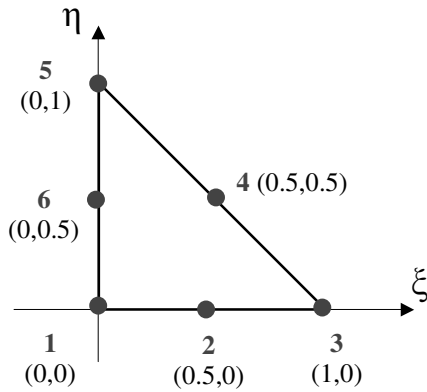
em que E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson do solo.



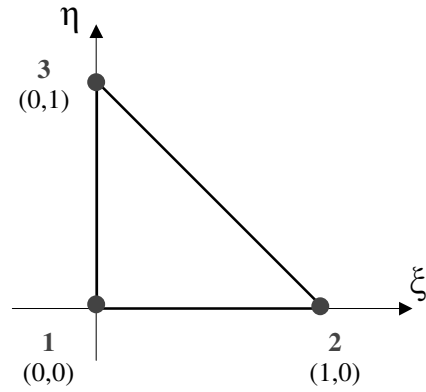
a) Elemento Q8



b) Elemento Q4



c) Elemento T6



d) Elemento T3

Figura 4.1 – Elementos finitos para a representação do solo

A relação cinemática para estes elementos é definida aplicando-se o operador diferencial ∇ ao vetor dos deslocamentos, ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\nabla \mathbf{u} \quad (4.38)$$

em que para deformação plana tem-se

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

e para deformação axissimétrica

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

A relação cinemática da Equação 4.38 pode ser escrita, matricialmente, como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (4.41)$$

em que $\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad \cdots \quad u_{\text{nnoel}} \quad v_{\text{nnoel}}]$ é o vetor de deslocamento nodal do elemento com nnoel pontos nodais e

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_{\text{nnoel}}] \quad (4.42)$$

em que, para o estado de deformação plana:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

e para o caso de deformação axissimétrica:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

N_i é a função de interpolação do nó i de um dado elemento com nnoel pontos nodais (Cook et al, 1989). O sinal negativo na Equação 4.38 indica a convenção de sinal de compressão positiva.

Através do conceito de elemento isoparamétrico, pode-se definir a matriz de rigidez dos elementos planos para o caso de deformação plana como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (4.45)$$

e para problemas axissimétricos como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_l \mathbf{B} 2\pi(\mathbf{N}\hat{\mathbf{r}}) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (4.46)$$

em que $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor de coordenadas nodais na direção radial. Nas definições das matrizes de rigidez, \mathbf{J} é a matriz jacobiana (Cook et al, 1989) que relaciona os sistemas de coordenadas natural (ξ, η) e global (x, y) .

4.4.2. Representação do reforço

O reforço pode ser modelado com elementos unidimensionais com um grau de liberdade por nó em termos do deslocamento u' na sua direção longitudinal x' (ou r' no caso de deformação axissimétrica) como ilustrado na Figura 4.2. Os elementos podem ser lineares ou quadráticos (Figura 4.3).

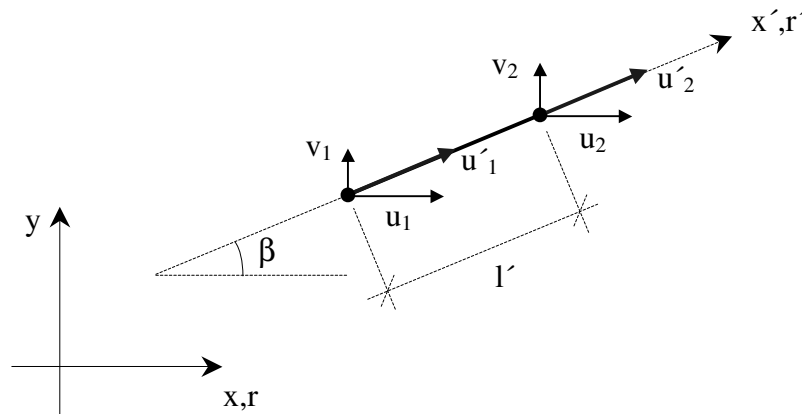
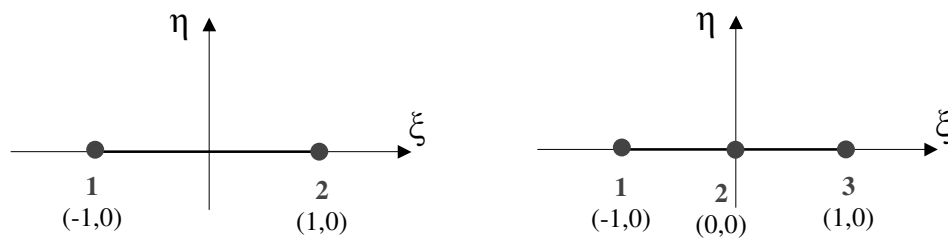


Figura 4.2. Elemento de reforço



a) Elemento B2 ou R2

b) Elemento B3 ou R3

Figura 4.3 – Elementos unidimensionais

De acordo com a Figura 4.2 e conforme o conceito de elemento isoparamétrico, tem-se que a posição de um ponto sobre o elemento em relação ao sistema de coordenada local x', r' é dada por:

$$x' = \mathbf{N}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} \quad (4.47)$$

em que

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

$$\cos \beta = \frac{dx/d\xi}{\det \mathbf{J}} \quad (4.49)$$

$$\sin \beta = \frac{dy/d\xi}{\det \mathbf{J}} \quad (4.50)$$

e

$$\det \mathbf{J} = \frac{dx'}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (4.51)$$

com

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} \\ \frac{dy}{d\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_{\text{nnoel}}}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_{\text{nnoel}}}{\partial \xi} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.52)$$

\mathbf{T} é matriz de transformação do sistema de coordenada, \mathbf{N} é a matriz das funções de interpolação N_i do elemento com nnoel pontos nodais (Oliveira, 2004; Pereira, 2003) e $\hat{\mathbf{x}}^T = [x_1 \quad y_1 \quad \cdots \quad x_{\text{nnoel}} \quad y_{\text{nnoel}}]$ é o vetor das coordenadas globais nodais do elemento.

Para estes elementos o vetor das componentes de deformação é definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{x'}] \text{ (deformação plana)} \quad (4.53)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{r'} \quad \varepsilon_{\theta'}] \text{ (deformação axissimétrica)}. \quad (4.54)$$

Associado a esse vetor de deformações tem-se o vetor das componentes de tensão:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{x'}] \text{ (deformação plana)} \quad (4.55)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{r'} \quad \sigma_{\theta'}] \text{ (deformação axissimétrica)}. \quad (4.56)$$

Estes vetores se relacionam através da matriz constitutiva:

$$\mathbf{D} = [J/t] \text{ (deformação plana)} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{D} = \frac{(J/t)}{(1-v^2)} \begin{bmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{bmatrix} \text{ (deformação axissimétrica)}. \quad (4.58)$$

em que J é a rigidez, t é a espessura e v é o coeficiente de Poisson do reforço.

A relação cinemática para este elemento é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}' = -\mathbf{B}\mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} \quad (4.59)$$

em que $\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad \dots \quad u_{\text{nnoel}} \quad v_{\text{nnoel}}]$ é o vetor de deslocamento nodal do elemento com nnoel pontos nodais e

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_{\text{nnoel}}] \quad (4.60)$$

é a matriz deformação-deslocamento definida como

$$\mathbf{B}_i = \nabla N_i \quad (4.61)$$

na qual,

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x'} \right] \quad (4.62a)$$

é o operador diferencial para o estado de deformação plana,

$$\nabla = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial r'} \\ \frac{1}{r'} \end{array} \right] \quad (4.62b)$$

é o operador diferencial para o caso de deformação axissimétrica e N_i é a função de interpolação do nó i de um dado elemento com n_{noel} pontos nodais (Cook et al, 1989).

O sinal negativo na Equação 4.50 indica a convenção de sinal de compressão positiva.

A matriz de rigidez do elemento de reforço é obtida pela expressão abaixo:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{+1} [(\mathbf{B}\mathbf{T})^T \mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{T}) t \det \mathbf{J}] d\xi \quad (4.63a)$$

para problemas de deformação plana e

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{+1} [(\mathbf{B}\mathbf{T})^T \mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{T}) (2\pi t (\mathbf{N}\hat{\mathbf{r}}) \det \mathbf{J})] d\xi \quad (4.63b)$$

para problemas axissimétricos, em que, $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor de coordenadas nodais na direção radial.

4.4.3. Representação da interface solo-reforço

Para representar a interface solo-reforço foi adotado o elemento de interface ilustrado na Figura 4.5 adaptado do elemento de interface de espessura nula proposto por Goodman et al. (1968). A Figura 4.6 apresenta os elementos finitos isoparamétricos J6 e J4.

Este elemento apresenta dois graus de liberdade por nó em termos dos deslocamentos u' e v' na sua direção longitudinal x' e transversal y' . O vetor de deslocamento relativo δ' em qualquer ponto de um elemento é definido em termos dos deslocamentos relativos cisalhante δ'_s e normal δ'_n como:

$$\delta' = \begin{Bmatrix} \delta'_s \\ \delta'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_{\text{base}} - u'_{\text{topo}} \\ v'_{\text{base}} - v'_{\text{topo}} \end{Bmatrix} = -\mathbf{N}\mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} \quad (4.64)$$

em que \mathbf{T} é a matriz de transformação do sistema de coordenada, $\hat{\mathbf{u}}$ é o vetor de deslocamentos globais nodais e

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & \cdots & -N_{\text{nnoel}/2} & 0 & N_{\text{nnoel}/2} & 0 & \cdots & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & \cdots & 0 & -N_{\text{nnoel}/2} & 0 & N_{\text{nnoel}/2} & \cdots & 0 & N_1 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

é a matriz que contém as funções de interpolação N_i do elemento (Oliveira et al, 2005).

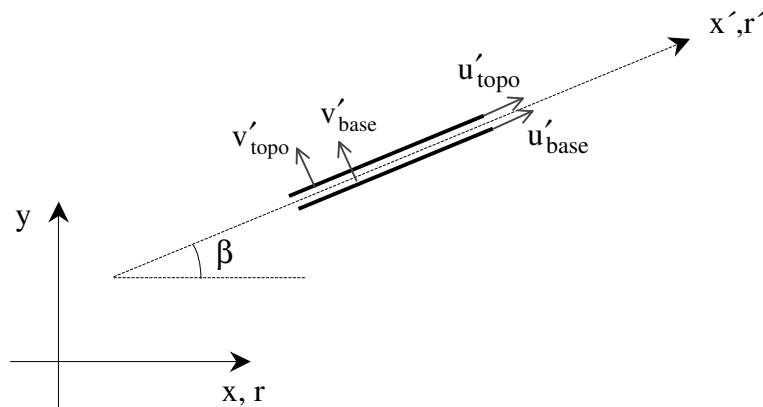


Figura 4.5 Representação da interface

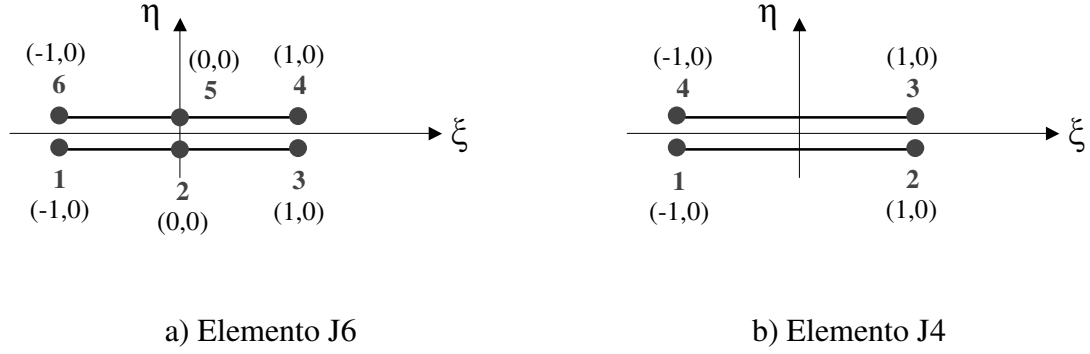


Figura 4.6 – Elementos de interface

Associado ao vetor de deslocamento relativo δ' tem-se o vetor das componentes de tensão:

$$\sigma' = [\tau \quad \sigma] \quad (4.66)$$

A relação constitutiva para o elemento de interface é dada por:

$$d\sigma' = \begin{Bmatrix} d\tau \\ d\sigma \end{Bmatrix} = \mathbf{D} d\delta' \quad (4.67)$$

em que \mathbf{D} é matriz constitutiva. A parcela elástica da matriz constitutiva é dada por:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

em que k_s e k_n são, respectivamente, a rigidez cisalhante e normal por unidade de área e são ilustradas na Figura 3.7. A matriz constitutiva elastoplástica \mathbf{D}_{ep} é obtida considerando-se um modelo elástico perfeitamente plástico sem endurecimento e com plasticidade não associada baseado no critério de Coulomb, Figura 3.8. Desta forma tem-se a relação abaixo (Brocklehurst, 1993):

$$\mathbf{D}_{ep} = \frac{1}{k_s + k_n \tan\theta \tan\psi} \begin{bmatrix} k_s^2 & k_n k_s \sin(\tau) \tan\phi \\ k_n k_s \sin(\tau) \tan\psi & k_n^2 \tan\phi \tan\psi \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

em que ψ e ϕ são, respectivamente, os ângulos de dilatação e de atrito da interface.

A matriz de rigidez do elemento de interface é obtida pela expressão:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{+1} [(\mathbf{NT})^T \mathbf{D}(\mathbf{NT}) \det \mathbf{J}] d\xi \quad (4.70a)$$

para problemas planos de deformação e

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{+1} [(\mathbf{NT})^T \mathbf{D}(\mathbf{NT}) (2\pi(\mathbf{N}\hat{\mathbf{r}}) \det \mathbf{J})] d\xi \quad (4.70b)$$

para problemas axissimétricos, em que $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor de coordenadas nodais na direção radial.

4.5. ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.

Um passo chave na análise não linear via MEF está relacionado à integração das relações constitutivas. Estas relações definem um conjunto de equações diferenciais ordinárias e métodos para integrá-las são usualmente classificados como explícito ou implícito (Ortiz e Popov, 1985; Nogueira, 1998; Sloan et al., 2001; Martins, 2001).

Considerando-se uma lei de fluxo associada, os diferentes algoritmos para integração das equações constitutivas podem ser representados através da seguinte regra:

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_A + \mathbf{D}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \boldsymbol{\sigma}_B - \mathbf{D}_e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (4.71)$$

na qual

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \Delta \lambda [(1 - \beta) \mathbf{a}_A + \beta \mathbf{a}_C], \quad \beta \in [0, 1] \quad (4.72)$$

e pode ser representada pela Figura 4.7.

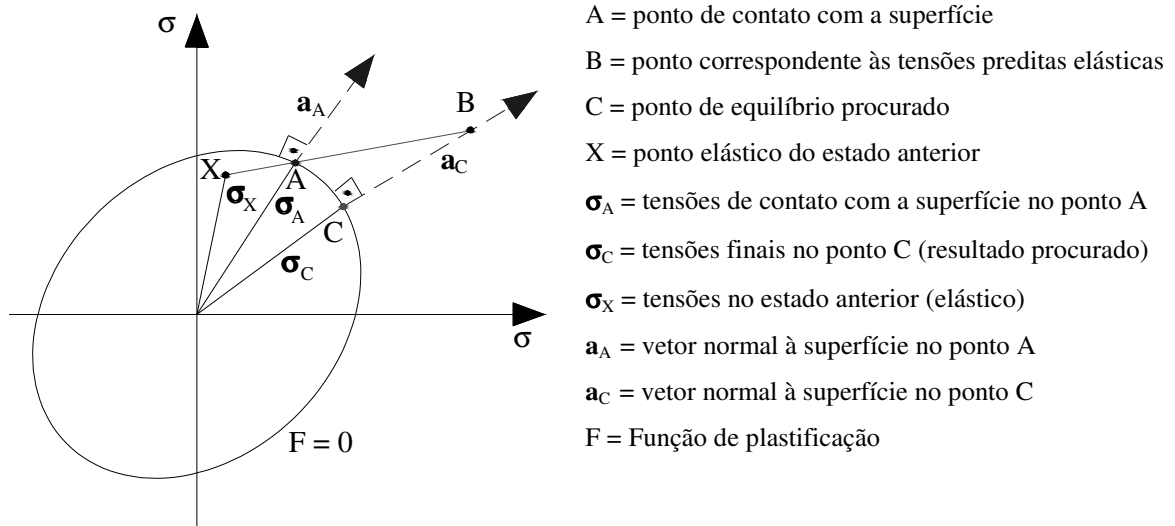


Figura 4.7 – Representação gráfica do algoritmo de integração constitutivo genérico

Quando $\beta = 0$, as equações resultam no algoritmo tipo forward Euler, também conhecido como completamente explícito. Neste caso, há a necessidade de se calcular as tensões no ponto de contato A, bem como um método de retorno à superfície no ponto procurado C.

Para $\beta = 1$, tem-se um algoritmo do tipo backward Euler (completamente implícito). Pode-se observar que, neste caso, não há a necessidade de se calcular as tensões no ponto A. Entretanto, as tensões no ponto C não são conhecidas e, portanto, este método requer um processo iterativo para se determinar as tensões.

Reescrevendo-se as Equações 4.71 e 4.72 para o caso em que $\beta = 0$, tem-se:

$$\sigma_C = \sigma_A + \mathbf{D}_e (\Delta \epsilon - \Delta \epsilon_p) = \sigma_B - \mathbf{D}_e \Delta \epsilon_p \quad (4.73)$$

$$\Delta \epsilon_p = \Delta \lambda \mathbf{a}_A \quad (4.74)$$

A Figura 4.8 ilustra o processo de integração de tensões do tipo forward Euler. Analisando-se as Equações 4.73 e 4.74 e a Figura 4.8, pode-se concluir que:

- O cálculo do vetor normal à superfície se dá no ponto A; o retorno portanto, se dá na direção paralela a do vetor \mathbf{a}_A que pode não coincidir com a direção procurada em C.

- O incremento de tensão $\Delta\sigma_{XB}$ é considerado um incremento tentativo ou predito elástico. Entretanto, considerando-se o ponto de contato com a superfície, esse preditor é dividido em duas parcelas $\Delta\sigma_{XA}$ e $\Delta\sigma_{AB}$. A primeira é relativa às deformações elásticas e a segunda parcela passa ser considerada como o preditor plástico.
- O termo $-\Delta\lambda \mathbf{D}_e \mathbf{a}_A$ é considerado como o corretor plástico.

Pode-se observar, ainda, na Figura 4.8, que após a correção plástica, o estado de tensão ficou localizado no ponto D, fora da superfície de plastificação, exigindo portanto, ainda mais correção até a determinação do ponto D', que ainda apresenta um pequeno deslocamento em relação ao ponto procurado C.

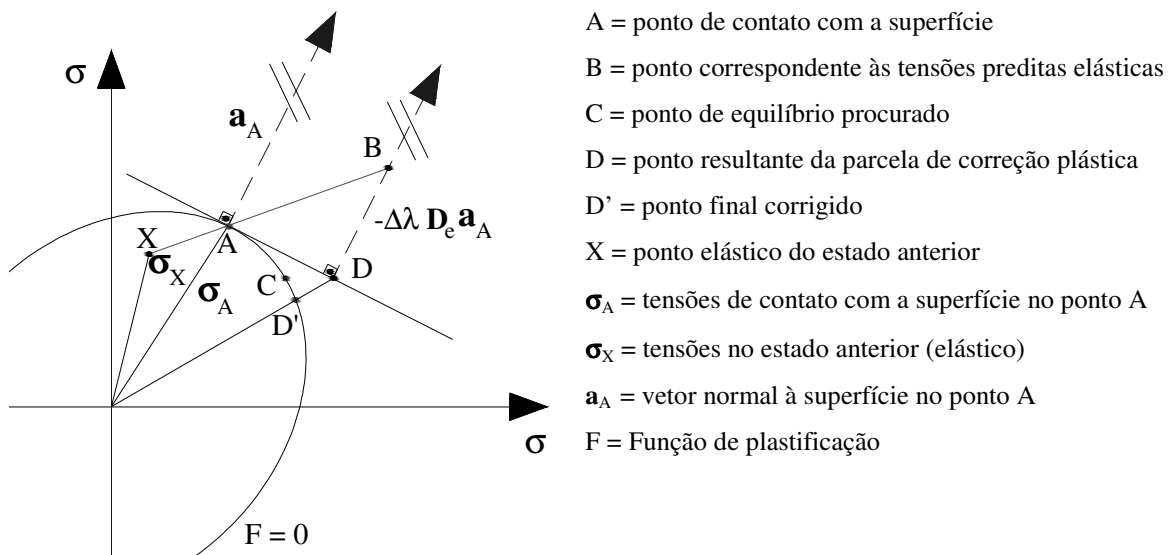


Figura 4.8 – Representação gráfica do processo de integração forward Euler

A Figura 4.9 apresenta um processo alternativo para a integração das relações constitutivas que consiste em dividir a parcela do incremento de deformação que causa fluxo plástico em pequenos subincrementos de igual tamanho (Nayak e Zienkiewicz, 1972; Martins, 2001; Owen e Hinton, 1980). Pode-se observar que o ponto D, resultante do processo subincremental, é mais próximo da superfície de plastificação que o ponto C, resultante da integração sobre toda a parcela plástica.

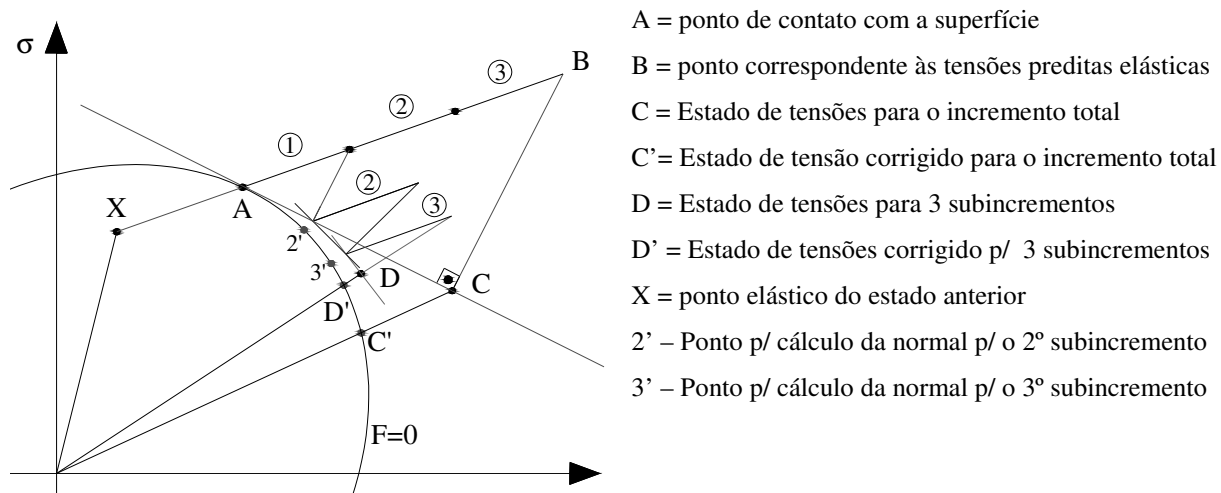


Figura 4.9 – Representação gráfica do processo subincremental de integração forward Euler

O processo de integração explícita é mais eficiente quando o número de subincrementos é calculado de forma automática, considerando-se o grau de não-linearidade do comportamento tensão-deformação e/ou o erro cometido durante o processo.

Sloan et. al. (2001) propuseram um algoritmo explícito com subincrementação e controle automático de erro das tensões, utilizando o esquema de Euler modificado. Este algoritmo foi implementado no programa ANLOG durante a elaboração deste trabalho e será apresentado no próximo item.

Para integrar as relações constitutivas da interface foi implementado um algoritmo explícito adaptado de Brocklehurst (1993) que será apresentado no item 4.5.2.

4.5.1. Esquema de integração de tensão das relações constitutivas do solo

Conhecendo-se um dado incremento de deformação $\Delta \epsilon$ pode-se determinar o incremento de tensão, supondo um comportamento do material inicialmente elástico. Desta forma tem-se que:

$$\Delta \sigma = D_e \Delta \epsilon . \quad (4.75)$$

A tensão predita elástica então é calculada por:

$$\sigma_{n+1}^* = \sigma_n + \Delta\sigma \quad (4.76)$$

em que σ_n é o estado de tensão em equilíbrio, no início do incremento.

Uma dada função de plastificação F é então utilizada para verificar se o estado de tensão é aceitável. Se $F(\sigma_{n+1}^*) \leq 0$, o comportamento é elástico e o incremento de tensão está correto. Entretanto, se $F(\sigma_{n+1}^*) > 0$, ocorreu escoamento plástico, e o incremento de tensão está incorreto. Existem três situações nas quais a tensão predita elástica estará incorreta:

Caso I - quando o estado de tensão inicial muda de elástico para plástico (Figura 4.10a);

Caso II - quando o estado de tensão inicial está no estado plástico e após o incremento elástico continua plástico (Figura 4.10b); e,

Caso III - quando o estado de tensão inicial está no estado plástico e o incremento promove um descarregamento elástico seguido de um fluxo plástico (Figura 4.10c).

Em função dos problemas associados à precisão aritmética finita, uma aproximação da condição de plastificação é então utilizada no algoritmo de integração de tensão, e pode ser dada por:

$$\left| F(\sigma_{n+1}^*) \right| \leq FTOL \quad (4.77)$$

sendo $FTOL$ uma pequena tolerância positiva. Sloan et al. (2001) sugerem valores de $FTOL$ entre 10^{-6} e 10^{-9} . Com a aproximação proposta, a transição do estado elástico para plástico ocorre se $F(\sigma_n) < -FTOL$ e $F(\sigma_{n+1}^*) > FTOL$.

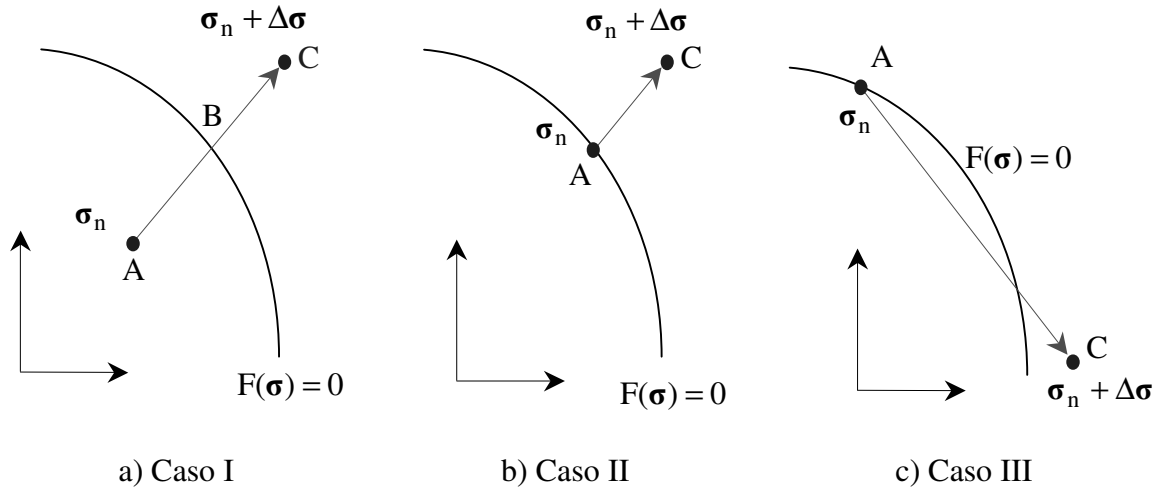


Figura 4.10 – Tensão predita elástica incorreta

Nos casos I e III, é necessário determinar a porção elástica do incremento de deformação $\Delta\epsilon$. Isto pode ser conseguido, determinando-se o valor de α que satisfaz a seguinte equação:

$$|F(\sigma_n + \alpha\Delta\sigma)| \leq \text{FTOL} \quad (4.78)$$

em que α é um escalar. Se o valor α é zero, o incremento de deformação é totalmente plástico (Caso II) e se α é 1 a deformação é totalmente elástica. O valor de α pode ser determinado por um esquema iterativo. Neste trabalho, utilizou-se o processo iterativo “Pégasus”, proposto por Sloan et. al. (2001) (Quadro 4.1).

O Caso III ocorre quando o ângulo β entre o gradiente da função de plastificação \mathbf{a}_n e o incremento de tensão $\Delta\sigma$ é maior que 90° e $F(\sigma_{n+1}^*) > \text{FTOL}$. A primeira condição pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{a}_n^T \Delta\sigma}{\|\mathbf{a}_n\| \|\Delta\sigma\|} \right) \quad (4.79)$$

Quadro 4.1 - Algoritmo Pégasus

(1) Dados de entrada: σ_n , $\Delta\epsilon$, α_0 , α_1 e MAXITER
(2) Calcule: $\Delta\sigma = D_e \Delta\epsilon$
(3) Calcule: $F_0 = F(\sigma_n + \alpha_0 \Delta\sigma)$ e $F_1 = F(\sigma_n + \alpha_1 \Delta\sigma)$
(4) Faça (5) a (8) MAXITER vezes
(5) Calcule:
$\alpha = \alpha_1 - F_1(\alpha_1 - \alpha_0)/(F_1 - F_0)$
$F_N = F(\sigma_n + \alpha \Delta\sigma)$
(6) Se $ F_N \leq FTOL$ vá para (10)
(7) Se sinal(F_N) é oposto ao sinal(F_0)
Faça $\alpha_1 = \alpha_0$ e $F_1 = F_0$
se não
Faça $F_1 = F_1 F_0 / (F_0 + F_N)$
(8) Faça $\alpha_0 = \alpha$ e $F_0 = F_N$
(9) Não houve convergência com MAXITER iterações. – Pare!
(10) Saia com o valor de α .

MAXITER ≈ 10 : número máximo de iterações;

FTOL = 10^{-6} a 10^{-9} : tolerância da condição de plastificação.

Se a tensão predita elástica recai no caso I, os valores de entrada de α_0 e α_1 , no algoritmo Pégasus, poderão ser 0 e 1, respectivamente. Entretanto, se ocorrer o caso III, haverá necessidade de se determinar valores adequados de entrada. No Quadro 4.2 apresenta-se um algoritmo para o calculo dos valores de entrada de α_0 e α_1 . Esse procedimento é necessário porque o caso III possui dois pontos de contato com a superfície de plastificação (ver Sloan et al., 2001).

Com o valor de α obtém-se as parcelas das deformações elásticas e plásticas e o valor da tensão no limite da região elástica, segundo as expressões abaixo:

$$\Delta\sigma_e = \alpha \Delta\sigma \quad (4.80a)$$

$$\Delta\epsilon_e = \alpha \Delta\epsilon \quad (4.80b)$$

$$\sigma_{int} = \sigma_n + \Delta\sigma_e \quad (4.80c)$$

O processo de integração é realizado a partir do estado de tensão σ_{int} . O método de integração utilizado neste trabalho, divide a parcela plástica das deformações, $(1 - \alpha)\Delta\epsilon$, em uma série de subincrementos, $\Delta T_k(1 - \alpha)\Delta\epsilon$ ($0 < \Delta T_k \leq 1$), e utiliza o esquema de Euler

modificado para integrar as tensões. ΔT_k é um valor obtido em função do erro cometido na avaliação das tensões e da tolerância STOL (10^{-6} a 10^{-2}) adotada para esse erro. O processo é controlado pelo pseudotempo T ($0 \leq T \leq 1$) e termina quando $\sum \Delta T = T = 1$. O Quadro 4.3, apresenta o algoritmo de Euler modificado com controle de erro. Uma apresentação detalhada sobre o processo de integração de Euler modificado poderá ser encontrada em Sloan et al. (2001).

Quadro 4.2 - Algoritmo Calc_alfas

(1) Dados de entrada: σ_n , $\Delta\sigma$, α_0 , α_1 e MAXITER, NSUB
(2) Faça: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $F_0 = F(\sigma_n)$ e $F_S = F_0$
(3) Faça (4) e (5) MAXITER vezes
(4) Calcule: $\Delta\alpha = (\alpha_1 - \alpha_0) / \text{NSUB}$
(5) Faça (6) e (7) NSUB vezes
(6) Calcule:
 $\sigma_1 = \sigma_0 + \alpha\Delta\sigma$
em que $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$
(7) Se $F(\sigma_1) > \text{FTOL}$, então
Faça $\alpha_1 = \alpha$
Se $F_0 < -\text{FTOL}$
Faça: $F_1 = F(\sigma_1)$ e vá para (9)
se não
 $\alpha_0 = 0$ e $F_0 = F_S$ e saia do loop sobre (6) e (7).
se não
Faça $\alpha_0 = \alpha$ e $F_0 = F(\sigma_1)$
(8) O processo não convergiu com MAXITER iterações. Pare!
(9) Saia com os valores de α_0 e α_1 .

NSUB ≈ 3 : número de subincrementos e MAXITER ≈ 10

Para cada subincremento de deformação, são calculadas duas estimativas de variação de tensão, $\Delta\sigma_1$ e $\Delta\sigma_2$:

$$\Delta\sigma_1 = \mathbf{D}_{ep}(\sigma_{k-1})[\Delta T_k(1-\alpha)\Delta\epsilon] \quad (4.81a)$$

$$\Delta\sigma_2 = \mathbf{D}_{ep}(\tilde{\sigma}_k)[\Delta T_k(1-\alpha)\Delta\epsilon] \quad (4.81b)$$

Para o primeiro subincremento ($T=0$), a primeira estimativa da variação de tensão, Equação 4.81a, é avaliada com o estado de tensão no limite da região elástica, ou seja, $\sigma_{k-1} = \sigma_{int}$. A segunda estimativa do subincremento de tensão é realizada utilizando-se o

estado de tensão $\tilde{\sigma}_k$ atualizado ao final do intervalo ΔT_k de acordo com o esquema explícito de Euler, ou seja:

$$\tilde{\sigma}_k = \sigma_{k-1} + \Delta\sigma_1 \quad (4.82)$$

O estado de tensão, ao final do intervalo ΔT_k , é calculado utilizando-se a média das duas estimativas anteriores (esquema de Euler modificado) e pode ser dado pela expressão abaixo:

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} + \frac{1}{2}(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2) \quad (4.83)$$

O erro local na integração das tensões pode ser definido pela diferença entre as tensões atualizadas usando o esquema Euler modificado e aquelas usando o esquema explícito Euler:

$$\sigma_k - \tilde{\sigma}_k = \frac{1}{2}(\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1) \quad (4.84)$$

Sloan et al. (2001) sugerem a seguinte expressão para o erro relativo na integração das tensões do subincremento corrente:

$$R_k = \frac{1}{2} \frac{\|\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1\|}{\|\sigma_k\|} \quad (4.85)$$

O subincremento corrente será aceito se o erro relativo calculado R_k for menor que uma tolerância prescrita STOL, do contrário será rejeitado e o processo reinicia com um novo valor de ΔT_k calculado em função do erro local e da tolerância adotada. Independentemente de o subincremento corrente ser aceito ou não, os próximos valores de ΔT são dados pela expressão:

$$\Delta T_{k+1} = q\Delta T_k \quad (4.86)$$

em que

$$q \leq 0.9\sqrt{STOL/R_k} \quad (4.87)$$

O Quadro 3 apresenta o algoritmo com o esquema de Euler modificado.

Pode-se observar que o processo de integração inicia no pseudo tempo $T=0$ com um valor de $\Delta T = 1$. Através da avaliação do erro local cometido na integração das tensões e da tolerância STOL adotada, o algoritmo determina os valores adequados para ΔT que deverão ser maiores ou iguais a $\Delta T_{\text{mínimo}}$. Esta última condição é utilizada para limitar o número máximo de subincrementos (Para $\Delta T_{\text{mínimo}} = 10^{-4}$, o número máximo de subincrementos será 10000).

Pode-se observar ainda, que um valor mínimo para q ($q_{\text{mín}}=0,1$) é determinado como mais uma forma de se evitar subincrementos muito pequenos e o elevado custo computacional. Um valor máximo para q também é utilizado. Sloan et al. (2001) sugerem ($q_{\text{máx}}=1,1$), isto significa que subincrementos subsequentes serão no máximo 10% maiores. Esse valor máximo é utilizado com a finalidade de se reduzir o número de falhas (quando o erro local R é maior que a tolerância STOL). Portanto, o processo de integração gerencia, automaticamente, o número de subincrementos que é função da magnitude da variação de deformação, da não-linearidade das relações constitutivas e da tolerância STOL adotada.

Quadro 4.3 - Esquema de Euler modificado (Sloan et al, 2001)

- (1) Dados de entrada: σ_n , $\Delta\epsilon$, STOL, FTOL, LTOL, $\Delta T_{\text{mínimo}}$
- (2) Calcule a tensão predita elástica: $\Delta\sigma = D_e \Delta\epsilon$ e $\sigma_{n+1}^* = \sigma_n + \Delta\sigma$
 se: $F(\sigma_{n+1}^*) \leq \text{FTOL}$ então atualize $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^*$ e saia !Estado de tensão final elástico
- (3) se $F(\sigma_n) < -\text{FTOL}$ e $F(\sigma_{n+1}^*) > \text{FTOL}$!Transição do estado elástico p/ plástico
 Chame a subrotina Pégasus e determine α com $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 = 1$!Quadro 4.1
- (4) Se $|F(\sigma_n)| \leq \text{FTOL}$ e $F(\sigma_{n+1}^*) > \text{FTOL}$, calcule: $\cos\beta = (\mathbf{a}_n^T \Delta\sigma) / (\|\mathbf{a}_n\| \|\Delta\sigma\|)$
 se $\cos\beta \geq -\text{LTOL}$! $\text{LTOL} \approx 10^{-6}$
 - Incremento puramente plástico. Faça $\alpha = 0$
 - senão ! Houve descarregamento elástico seguido de fluxo plástico
 - Chame a subrotina Calc_alfas e determine os valores α_0 e α_1 !Quadro 4.2
 - Chame a subrotina Pégasus e determine α com α_0 e α_1 calculados em Calc_alfas
- (5) Determine as tensões de contato com a superfície de plastificação e a parcela plástica das deformações
 Avalie: $\sigma = \sigma_n + \alpha D_e \Delta\epsilon$ e $\Delta\epsilon_p = (1 - \alpha) \Delta\epsilon$
- (6) Faça $T=0$ e $\Delta T=1$
- (7) Enquanto $T < 1$, faça (8) a (15)
 - (8) calcule as estimativas de incremento de tensão:
 avalie: $d\epsilon = \Delta T \Delta\epsilon_p$
 $d\sigma_1 = D_{ep}(\sigma) d\epsilon$
 $d\sigma_2 = D_{ep}(\sigma + d\sigma_1) d\epsilon$
 - (9) calcule o estado de tensão final temporário conforme a equação
 $\sigma_{\text{temp}} = \sigma + \frac{1}{2} (d\sigma_1 + d\sigma_2)$! Estado de tensão final temporário
 - (10) calcule o erro relativo para o corrente subincremento :
 $R = \text{máx} \left\{ \|0.5(d\sigma_2 - d\sigma_1)\| / \|\sigma_{\text{temp}}\|, \text{EPS} \right\}$! $\text{EPS} \approx 10^{-16}$
 - (11) se $R > \text{STOL}$!O subincremento falhou. Um novo ΔT será calculado em função do erro.
 - calcule : $q = \text{máx} \{ 0.9(\text{STOL} / R)^{1/2}, 0.1 \}$! $\text{STOL} \approx 10^{-6}$ a 10^{-2}
 - calcule: $\Delta T = \text{máx} \{ q \Delta T, \Delta T_{\text{mínimo}} \}$
 - retorne para a posição (8)
 - (12) O subincremento foi um sucesso, atualize as tensões : $\sigma = \sigma_{\text{temp}}$
 - (13) se $|F(\sigma)| > \text{FTOL}$! Verifica se o estado de tensão final viola a condição de plastificação
 Chame a subrotina Corrige_tensão e entre com as tensões incorretas $\sigma_0 = \sigma$
 Saia da subrotina Corrige_tensão com as tensões corrigidas σ !(Quadro 4.4)
 - (14) Calcule o tamanho do próximo subincremento
 - $q = \text{mínimo} \{ 0.9(\text{STOL} / R)^{1/2}, 1.1 \}$
 - se o subincremento anterior falhou, limite o tamanho do próximo: $q = \text{mínimo} \{ q, 1 \}$
 - calcule o tamanho do novo subincremento : $\Delta T = q \Delta T$
 - atualize $T = T + \Delta T$
 - (15) Garantir que o próximo subincremento não seja menor que o tamanho mínimo estipulado e
 checar se o processo de integração não ultrapasse $T = 1$.
 - $\Delta T = \text{máx} \{ \Delta T, \Delta T_{\text{mínimo}} \}$
 - $\Delta T = \text{mín} \{ \Delta T, 1 - T \}$
- (16) $T = 1$, saia com as tensões no final do incremento $\sigma_{n+1} = \sigma$

EPS = menor erro relativo calculado pela máquina

Ao final de cada subincremento no processo de integração explícita, as tensões podem estar fora da superfície de plastificação, como mostrado na Figura 4.9, exigindo mais correção para levar o estado de tensão para a superfície. Esse erro depende da precisão do processo de integração e da não-linearidade das relações constitutivas (Sloan et al., 2001).

Considere um ponto onde as tensões incorretas, definidas por $\boldsymbol{\sigma}_0$, viole a condição $|F(\boldsymbol{\sigma}_0)| > FTOL$. Ignorando os termos de segunda ordem e acima, F pode ser expandida numa série de Taylor sobre este ponto, resultando em

$$F = F_0 + \mathbf{a}_0^T \delta \boldsymbol{\sigma} \quad (4.88)$$

na qual, $\delta \boldsymbol{\sigma}$ é uma pequena correção, $F_0 = F(\boldsymbol{\sigma}_0)$, e \mathbf{a}_0 é gradiente da função de plastificação avaliado para o estado de tensão $\boldsymbol{\sigma}_0$. Ao retornar o estado de tensões para a superfície de plastificação, é desejável que o incremento de deformação total permaneça inalterado, assim o procedimento é tido como consistente. Para isto, a correção das tensões deverá obedecer a seguinte relação (Sloan et al., 2001):

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = -\delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b}_0 \quad (4.89)$$

em que $\delta \lambda$ é um multiplicador plástico desconhecido e \mathbf{b}_0 é o gradiente da função potencial plástico avaliado no estado de tensão $\boldsymbol{\sigma}_0$.

Combinando as Equações 4.88 e 4.89 e fazendo $F = 0$ determina-se o multiplicador plástico como:

$$\delta \lambda = \frac{F_0}{\mathbf{a}_0^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}_0} \quad (4.90)$$

A correção nas tensões será, então, dada por:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = -\frac{F_0 \mathbf{D}_e \mathbf{b}_0}{\mathbf{a}_0^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}_0}, \quad (4.91)$$

e o estado de tensão corrigido, situado sobre a superfície de plastificação será:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \delta\boldsymbol{\sigma}. \quad (4.92)$$

Este esquema é conhecido como correção consistente e pode ser aplicado repetidamente até que $|F(\boldsymbol{\sigma}_0)| \leq \text{FTOL}$.

Sloan et al. (2001) observaram que, em certas condições, esta técnica pode não convergir. Um exemplo é o caso em que o estado de tensão ocorre próximo ao ápice da superfície de Mohr-Coulomb e a lei de fluxo é não associada. Em casos como este, o esquema de correção consistente é abandonado e uma correção com retorno normal à superfície de plastificação é utilizada. O último método que será chamado de correção normal, não preserva o incremento de deformação total, mas é robusto e tem sido utilizado com sucesso por Owen e Hinton (1980), Nayak e Zienkiewics (1972). Com o esquema de correção normal, a Equação 4.89 pode ser reescrita como:

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = -\delta\lambda\mathbf{a}_0. \quad (4.93)$$

Combinando as Equações 4.88 e 4.93 e fazendo $F = 0$ determina-se o multiplicador plástico como:

$$\delta\lambda = \frac{F_0}{\mathbf{a}_0^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}_0} \quad (4.94)$$

e a correção normal será

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = -\frac{F_0 \mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_0^T \mathbf{D}_e \mathbf{a}_0}. \quad (4.95)$$

Este tipo de correção normal também pode ser aplicado iterativamente até que $|F(\boldsymbol{\sigma}_0)| \leq \text{FTOL}$. O algoritmo completo de correção das tensões está apresentado no Quadro 4.4.

Quadro 4.4 – Algoritmo Corrige_tensão

- (1) Dados de entrada: tensões incorretas σ_0 , MAXITER
- (2) Faça (3) a (6) MAXITER vezes
 - (3) Calcule:

$$\delta\lambda = F_0 / \mathbf{a}_0^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}_0$$
 Corrija as tensões: $\sigma = \sigma_0 - \delta\lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b}_0$
 - (4) Se $|F(\sigma)| > |F(\sigma_0)|$, então abandone a correção anterior e calcule:

$$\delta\lambda = F_0 / (\mathbf{a}_0^T \mathbf{a}_0)$$

$$\sigma = \sigma_0 - \delta\lambda \mathbf{a}_0$$
 - (5) Se $|F(\sigma)| \leq FTOL$, vá para (8)
 - (6) Faça $\sigma_0 = \sigma$
- (7) O processo não convergiu com MAXITER iterações. Pare!
- (8) Saia com o estado de tensão corrigido σ

4.4.2. Esquema de integração de tensão para interface

Para a integração da relação constitutiva da interface, foi utilizado um algoritmo adaptado de Brocklehurst (1993) o qual é descrito no Quadro 4.5.

Inicialmente, o incremento de tensão é considerado elástico. As tensões preditas elásticas, σ_{n+1}^* , na interface, podem então, ser calculadas como:

$$\sigma_{n+1}^* = \sigma_n + \mathbf{D}_e d\delta' \quad (4.96)$$

em que σ_n é o estado de tensão no início do incremento e $d\delta'$ é o vetor com os deslocamentos relativos normais e tangenciais.

Uma verificação da consideração de comportamento elástico é então realizada, para garantir que o estado de tensão final não viole a condição de plastificação ou a condição de perda de contato:

- i) Se $|\tau| > c + \sigma \tan \phi$, então, o estado de tensão encontra-se fora da superfície de plastificação e a atualização de tensão deverá ser refeita a luz da teoria da plasticidade.
- ii) Se $\sigma \leq -c \cot \phi$, então, houve perda do contato da interface. Neste caso, o estado de tensão real na interface é $\tau = \sigma = 0$.

Existem 5 possíveis casos de comportamento constitutivo ao se considerar que o incremento de tensões é puramente elástico (Figura 4.11).

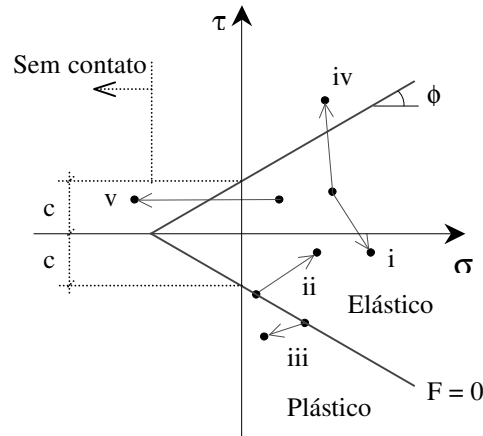


Figura 4.11 – Comportamento constitutivo - Tensão predita elástica incorreta - interface

Caso (i) : As tensões preditas elásticas estão corretas.

Caso(ii) : O estado de tensão inicial está sobre a superfície. As tensões preditas elásticas estão corretas, já que o incremento puramente elástico leva o estado de tensão para dentro da superfície.

Caso(iii): O estado de tensão inicial está sobre a superfície e o incremento considerado puramente elástico leva o estado de tensão para fora da superfície. Neste caso o incremento de tensão é puramente plástico e as tensões deverão ser recalculadas, utilizando-se a matriz elastoplástica.

Caso (iv): Ocorreu uma transição do estado elástico para o estado plástico. Neste caso deve-se determinar, o escalar α , que define a parcela elástica do incremento de deformação. O valor de α é determinado utilizando-se o mesmo processo iterativo apresentado no Algoritmo Pégasus do Quadro 4.1

Caso(v) : Neste caso, houve perda de contato da superfície, as tensões devem ser feitas $\tau = \sigma = 0$.

Quadro 4.5 - Algoritmo de integração de tensão para os elementos da interface

- (1) Dados de entrada: σ_n e $d\delta'$; ! FTOL $\approx 10^{-10}$
- (2) Calcule: $F(\sigma_n)$ e $\sigma_{n+1}^* = \sigma_n + D_e d\delta'$
- (3) Verifique se ocorre perda de contato:
Se $\sigma \leq -c \cot \phi$ então faça $\sigma = \tau = 0$ e saia !Caso v
- (4) Se: $F(\sigma_{n+1}^*) \leq FTOL$, então faça $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^*$ e saia !Casos i e ii
- (5) Se $F(\sigma_n) < -FTOL$!Caso iv
determine α tal que $|F(\sigma_n + \alpha D_e d\delta')| \leq FTOL$
avalie a parcela de tensão elástica: $\sigma = \sigma_n + \alpha D_e d\delta'$
atualize as tensões $\sigma_{n+1} = \sigma + (1 - \alpha) D_{ep}(\sigma) d\delta'$ e saia
- (6) Se $|F(\sigma_n)| \leq FTOL$ então faça $\sigma_{n+1} = \sigma_n + D_{ep}(\sigma_n) d\delta'$ e saia !Caso iii

EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

Este capítulo tem por objetivo apresentar alguns exemplos que verifiquem as implementações computacionais realizadas no programa ANLOG. Para tanto, ele é dividido em 3 itens. O primeiro refere-se às verificações relativas ao solo, o segundo refere-se ao reforço e o último refere-se à interface.

5.1. EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO RELACIONADOS AO SOLO

Os dois exemplos apresentados na Figura 5.1 têm a finalidade de verificar as implementações relativas ao solo. O primeiro exemplo (Figura 5.1a) é realizado para verificar a implementação do modelo Drucker-Prager modificado e refere-se a simulações de ensaios triaxiais. O segundo (Figura 5.1b) é utilizado para verificar as implementações do algoritmo de integração de tensões e do modelo Mohr-Coulomb modificado, e refere-se à análise da capacidade de carga de fundações superficiais (sapata circular e sapata corrida). Este último exemplo é um caso interessante para a avaliação das estratégias de integração de tensão devido às singularidades que aparecem próximas às bordas da fundação e à forte rotação das tensões principais.

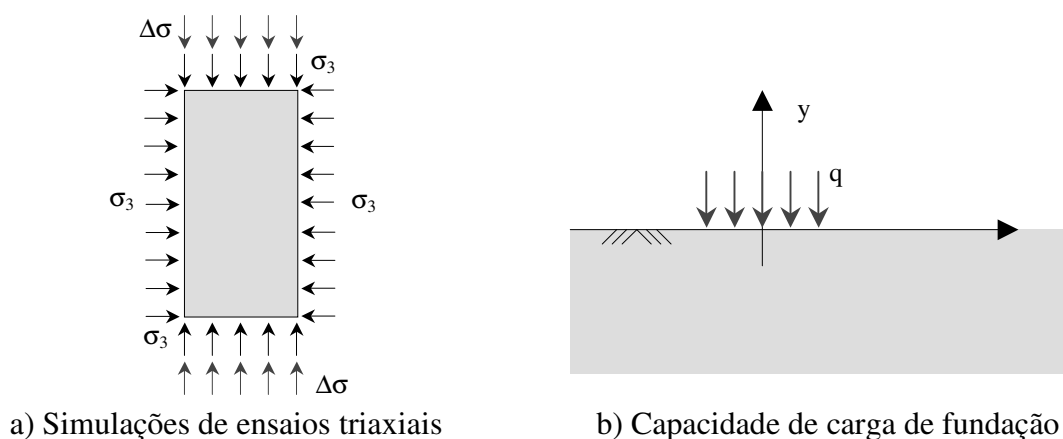


Figura 5.1 – Exemplos de verificação relacionados ao solo

5.1.1. Simulações de ensaios de compressão triaxial.

O presente exemplo trata da simulação de ensaios triaxiais axissimétricos. Três diferentes trajetórias de tensão que conduzem a um estado de compressão do solo foram analisadas: carregamento axial (CA), cisalhamento puro (CP) e descarregamento lateral (DL).

Neste exemplo, um elemento quadrilateral isoparamétrico de 8 nós (Q8) é suficiente para reproduzir os estados uniformes de tensão do problema. As condições de contorno do problema para as diferentes trajetórias estão mostradas na Figura 5.2. Para a trajetória de tensão CA, um deslocamento prescrito igual a 4 mm foi aplicado nos nós do topo da amostra (nós 2, 3 e 8), simulando o carregamento axial. O descarregamento lateral foi simulado através de um deslocamento prescrito de 2 mm nos nós 6, 7 e 8. Para a simulação do ensaio CP, um carregamento uniforme de 50.88 kPa foi aplicado no topo da mostra e, ao mesmo tempo, um descarregamento uniforme lateral de mesma intensidade.

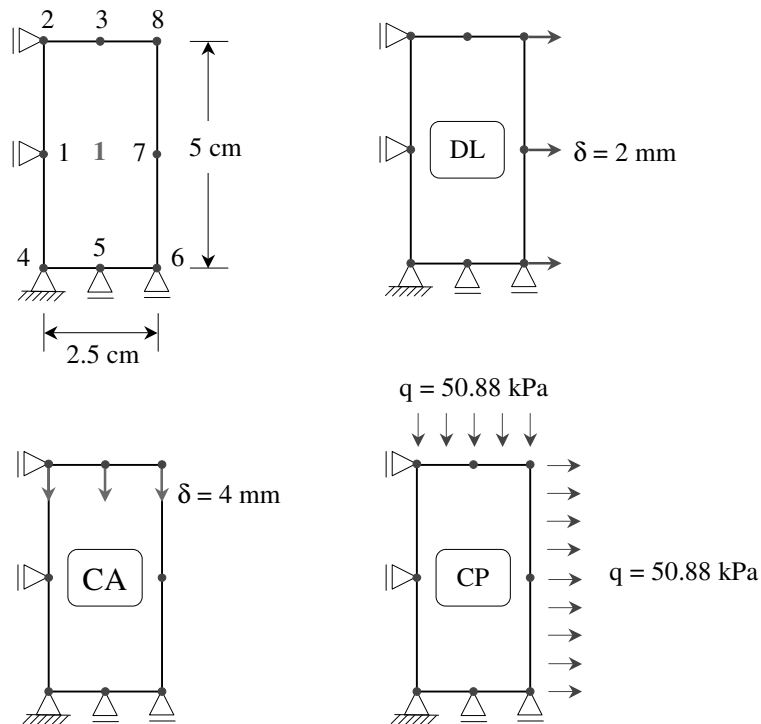


Figura 5.2 – Ensaios triaxiais axissimétricos

Para todas as trajetórias de tensão, foi aplicada, inicialmente, uma tensão de confinamento de 100 kPa.

Durante a fase de cisalhamento, as trajetórias de tensão vistas no plano π , mostrado na Figura 5.3, têm a direção definida pelo ângulo de Lode θ igual -30° . Essa direção é a mesma para as três trajetórias de tensão analisadas neste exemplo. A Figura 5.3 mostra, também, a superfície de plastificação de Drucker-Prager e a superfície de plastificação de Mohr-Coulomb. Pode-se observar que, quando o ângulo de Lode θ é igual a -30° , o estado de tensão na ruptura é o mesmo para os dois critérios de plastificação.

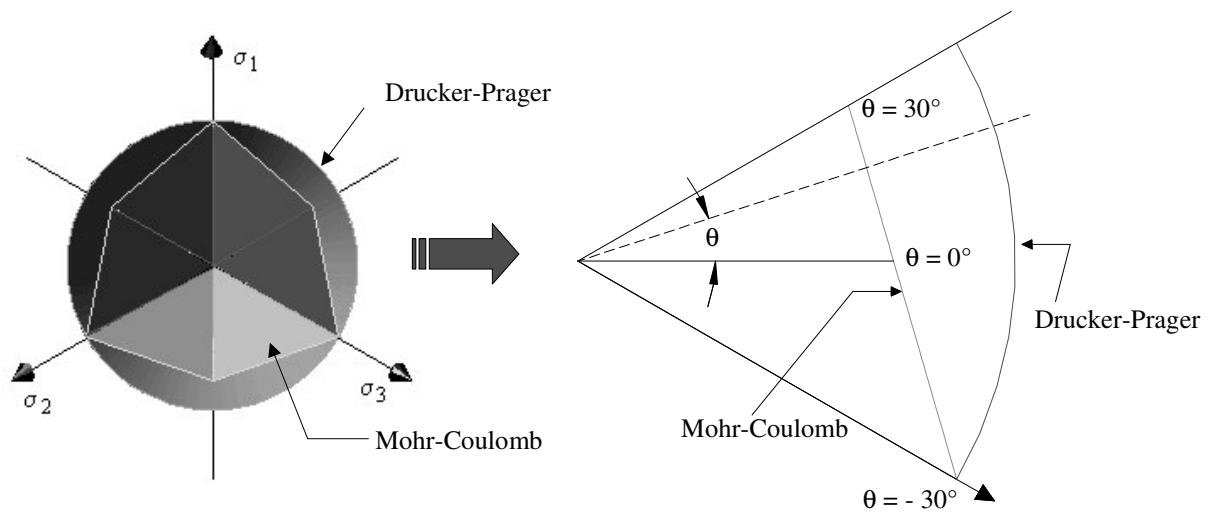


Figura 5.3 – Superfície de plastificação de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no plano π

A solução analítica do ensaio CA, de acordo com o critério de plastificação de Mohr-Coulomb e uma idealização bi-linear, é apresentada na Figura 5.4. A curva deformação volumétrica ϵ_{vol} versus deformação axial ϵ_a possui dois trechos lineares: um trecho elástico (deformações elásticas) com inclinação dada por β_e e um trecho plástico (deformações plásticas) com inclinação β_p . A deformação axial da transição entre os trechos elásticos e plásticos é chamada de deformação axial na ruptura $(\epsilon_a)_r$. Como as superfícies de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager são coincidentes para o ângulo θ igual a -30° , a solução analítica apresentada na Figura 5.4 corresponde a ambos critérios de plastificação.

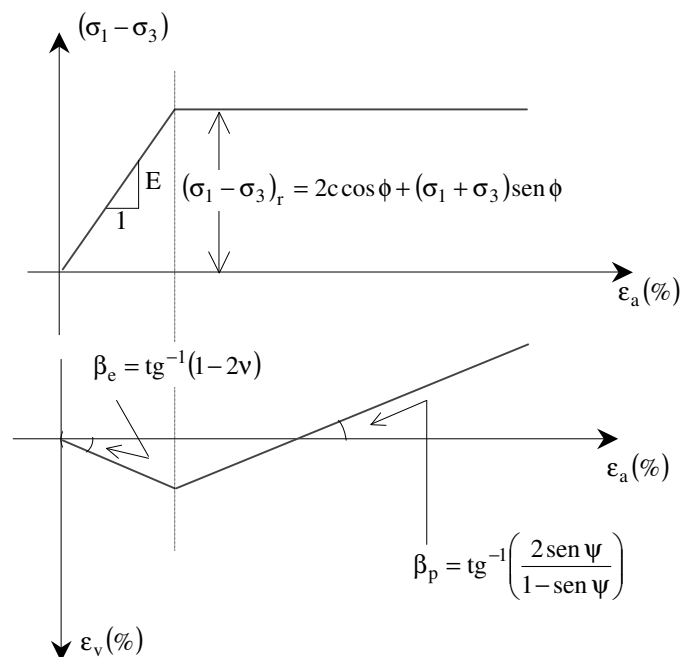


Figura 5.4 – Idealização bi-linear do ensaio CA

Os parâmetros elásticos e os parâmetros de resistência estão mostrados na Tabela 5.1. Como nestas análises não há problemas relacionados com a singularidade do ápice da superfície, ou seja, em nenhuma das trajetórias, as tensões são levadas às proximidades do ápice, a constante “a” da função de plastificação de Drucker-Prager modificado foi feita igual a zero (Capítulo 3), assim o modelo retoma sua forma original.

Tabela 5.1- Parâmetros do modelo Drucker-Prager Modificado

E	10000 kPa
v	0.25
c	1 kPa
φ	30°
ψ	variável
a	0

Um processo incremental-iterativo do tipo Newton-Raphson modificado foi utilizado para a solução do sistema de equações. O critério de convergência adotado é definido pela relação entre a norma euclidiana do vetor de forças desequilibradas na iteração corrente e a norma euclidiana do vetor de força externa. A tolerância adotada para convergência foi de 10^{-6} para as análises com controle de deslocamento e 10^{-4} para as análises com controle de carga.

O esquema de integração numérica foi do tipo Gauss-Legendre com nove pontos de integração. Para integração das tensões foi utilizado o algoritmo de Euler modificado, apresentado no Quadro 4.3, sendo os parâmetros STOL e FTOL, respectivamente, iguais a 10^{-10} e 10^{-13} .

Na Figura 5.5, são apresentadas as trajetórias de tensão seguidas em cada simulação numérica, partindo-se de um estado isotrópico de 100 kPa.

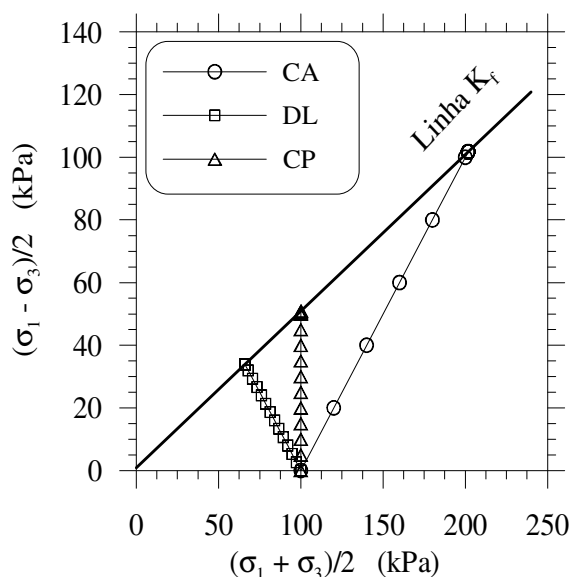


Figura 5.5– Trajetórias de tensão

A Tabela 5.2 apresenta os resultados analíticos e numéricos em termos da resistência à compressão $(\sigma_1 - \sigma_3)_r$ para as diferentes trajetórias de tensão. Pode-se observar que os resultados numéricos foram idênticos aos analíticos.

Tabela 5.2 – Resistência à compressão

TT	Analítico $(\sigma_1 - \sigma_3)_r$	Numérico $(\sigma_1 - \sigma_3)_r$
CA	203.46	203.46
CP	101.73	101.72
DL	67.82	67.82

As curvas tensão desviadora $(\sigma_1 - \sigma_3)$ versus deformação axial ϵ_a e deformação volumétrica ϵ_{vol} versus deformação axial, obtidas pelo modelo numérico do ensaio CA,

são apresentadas na Figura 5.6. Observa-se que a resistência à compressão não é afetada pelo ângulo de dilatância ψ . Entretanto, as deformações volumétricas são claramente afetadas por este parâmetro. Novamente, as soluções numéricas são idênticas às soluções analíticas

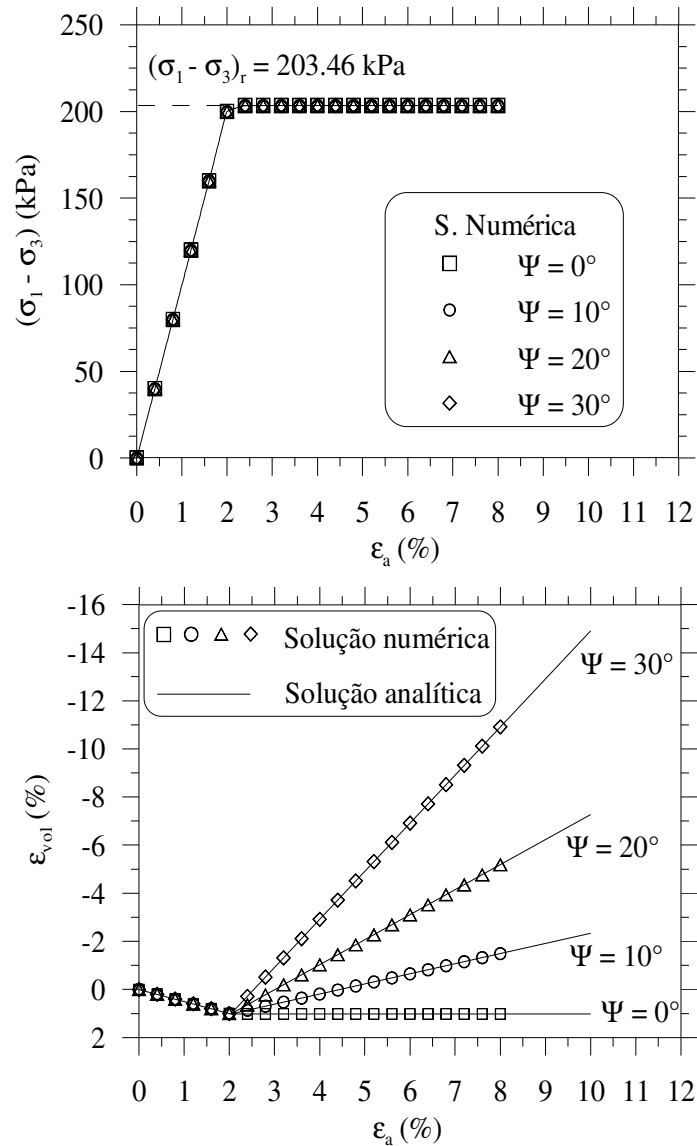


Figura 5.6 - Simulação do ensaio CA

5.1.2. Capacidade de carga de fundações

Dois casos de capacidade de carga de fundação superficial são apresentados neste item: uma fundação circular com diâmetro B de 2m (problema axissimétrico) e outra corrida com largura B de 2m (problema plano de deformação).

As fundações não apresentam embutimento e são consideradas lisas. As análises foram conduzidas por controle de carga (sapatas perfeitamente flexíveis) e por controle de deslocamento (sapatas perfeitamente rígidas).

O solo de fundação possui comportamento descrito pelo modelo constitutivo Mohr-Coulomb modificado e seu peso próprio não é levado em consideração. Cada tipo de fundação foi analisado com diferentes ângulos de atrito para o solo. A fim de verificar o desempenho do algoritmo de integração de tensões, foram realizadas análises com lei de fluxo associado e não associado com ângulo de dilatação nulo ($\psi = 0$).

A malha de elementos finitos (69 elementos Q8), as condições de contorno e as propriedades do solo são apresentadas na Figura 5.7. Esta malha foi utilizada para todas as análises e foi construída levando-se em consideração a simetria do problema.

Para solução em nível global utilizou-se o processo incremental-iterativo com incrementos automáticos de carga (Nogueira, 1998). O critério de convergência adotado é definido pela relação entre a norma euclidiana do vetor de forças desequilibradas na iteração corrente e a norma euclidiana do vetor de força externa. A tolerância na convergência do esquema de Newton-Raphson modificado foi de 10^{-4} . O processo de integração de tensões foi utilizado com uma tolerância no erro das tensões STOL de 10^{-8} e com uma tolerância na função de plastificação FTOL de 10^{-9} .

Para as análises com controle de deslocamento, um deslocamento prescrito δ foi aplicado aos nós sob a fundação, como pode ser observado na Figura 5.7. Nestes casos, a força de reação Q é avaliada como o somatório das componentes verticais da força interna equivalente ao estado de tensão dos elementos sob a fundação (Potts e Zdravković, 2001).

Os resultados obtidos pelo ANLOG estão apresentados em termos do fator κ definido pela expressão (para $c \neq 0$):

$$\kappa = Q / A_c \quad (5.1)$$

em que c é a coesão do solo e A é área da fundação (Para os problemas de deformação plana, A é área por unidade de comprimento).

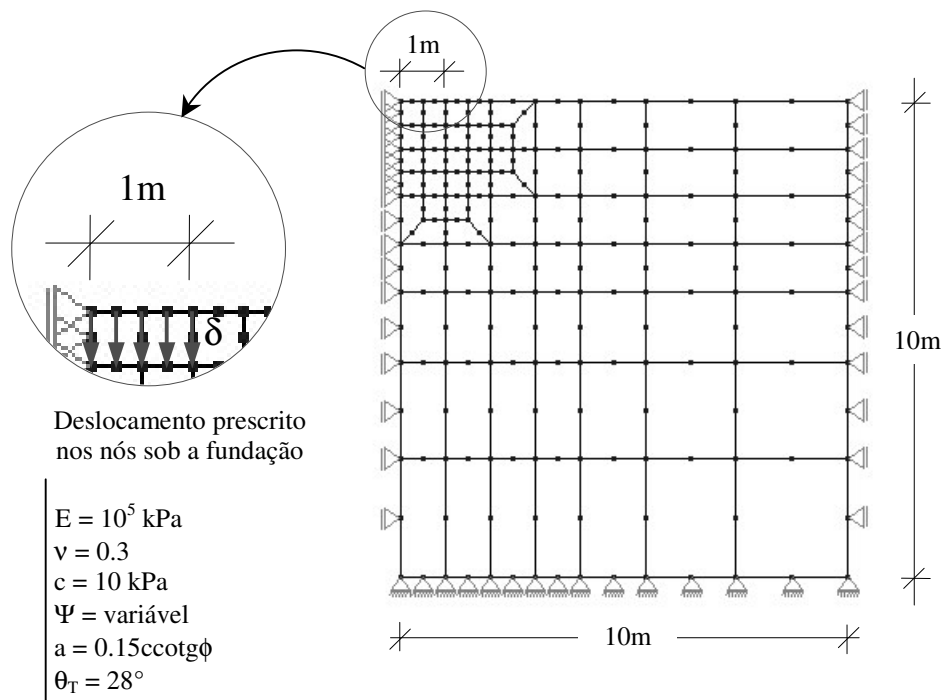


Figura 5.7 – Malha de elementos finitos– fundações superficiais

Houlsby (1991) apresentou um estudo sobre a influência da dilatância no comportamento dos solos. Nesse trabalho, Houlsby ressalta que a dilatância é um fator importante em problemas geotécnicos, nos quais, restrições cinemáticas são impostas ao movimento do solo. Em ordem crescente do confinamento do solo e de influência da dilatância, podem ser citados os seguintes problemas: estabilidade de taludes, capacidade de carga de fundações superficiais, túneis e capacidade de carga de estacas. Diversos trabalhos utilizando o MEF para a análise da influência da dilatância podem ser encontrados na literatura, dentre estes, podem ser citados, Zienkiewicz et al. (1975) e Manoharan e Dasgupta (1993).

Zienkiewicz et al. (1975) estudaram alguns problemas geotécnicos utilizando lei de fluxo associada e não associada. Eles analisaram o problema da capacidade de carga de fundações circular e corrida em um solo com ângulo de atrito de 40° . A análise não associada foi conduzida com um ângulo de dilatância de 20° . Para a sapata circular, a capacidade de carga obtida com lei de fluxo associado foi, aproximadamente, 13% maior que a obtida com lei de fluxo não associado.

Manoharan e Dasgupta (1993) apresentaram um estudo da capacidade de carga de fundações superficiais rígidas (fundações corrida e circular) utilizando o MEF com formulação viscoplástica. Análises com lei de fluxo associada e não associada foram conduzidas utilizando ângulos de atrito de 0° , 10° , 20° , 25° , 30° e 35° . Nos casos de fluxo não associado, apenas o ângulo de dilatância zero foi considerado. Para ângulos de atrito abaixo de 25° , ambas leis de fluxo deram resultados próximos. Com o aumento do ângulo de atrito, os valores do fator de capacidade de carga N_c foram maiores nas análises com uma lei de fluxo associada, tal como observado por Zienkiewics et al.(1975). Para todos os ângulos de atrito, as análises com lei de fluxo não associada determinaram recalques, na ruptura, superiores aos obtidos com uma lei de fluxo associada.

As Figuras 5.8 e 5.9 apresentam as curvas fator adimensionalizado κ *versus* deslocamentos verticais adimensionalizados δ/B obtidas neste trabalho. Pode-se observar que os recalques na ruptura são maiores para as análises considerando lei de fluxo não associado.

As Tabelas 5.3 e 5.4 apresentam os fatores de capacidade de carga N_c (Terzaghi, 1943) obtidos a partir das curvas mostradas nas Figuras 5.8 e 5.9. O fator de capacidade de suporte N_c corresponde ao valor do fator adimensionalizado κ na condição de ruptura. Para os ângulos de atrito de 10° e 20° a capacidade de carga não foi sensivelmente influenciada pelo valor do ângulo de dilatância. Entretanto, para o solo com ângulo de atrito de 30° , as análises com lei de fluxo associado determinaram valores de N_c pouco maiores comparados aos obtidos naquelas com lei de fluxo não associado.

As fundações rígidas forneceram maiores valores para a capacidade de carga em relação às fundações flexíveis. Em média, os valores de N_c das sapatas corridas rígidas foram 6% maiores que as corridas flexíveis. Para as sapatas circulares esse percentual se elevou para 10% em média.

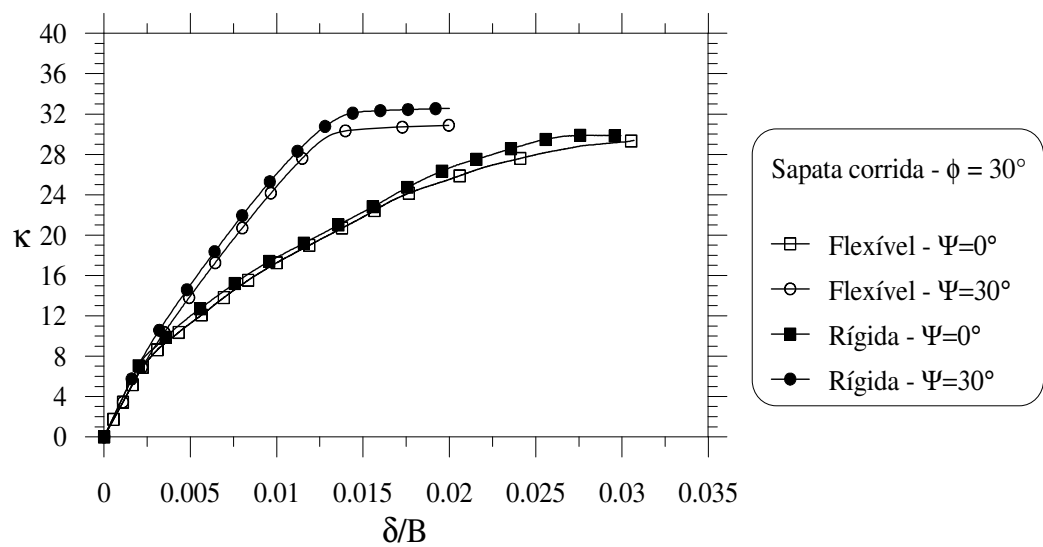
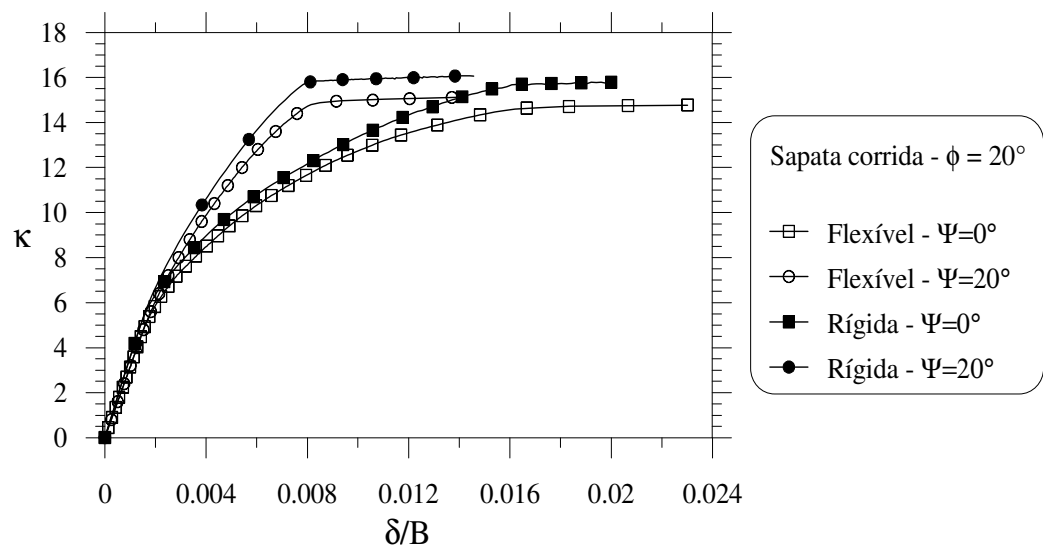
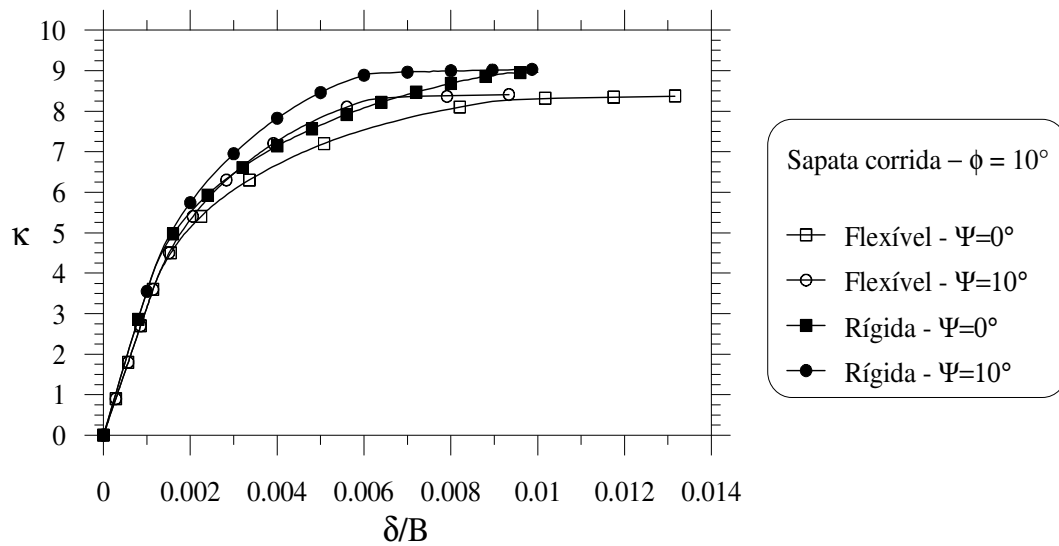


Figura 5.8- Capacidade de carga – Sapata corrida

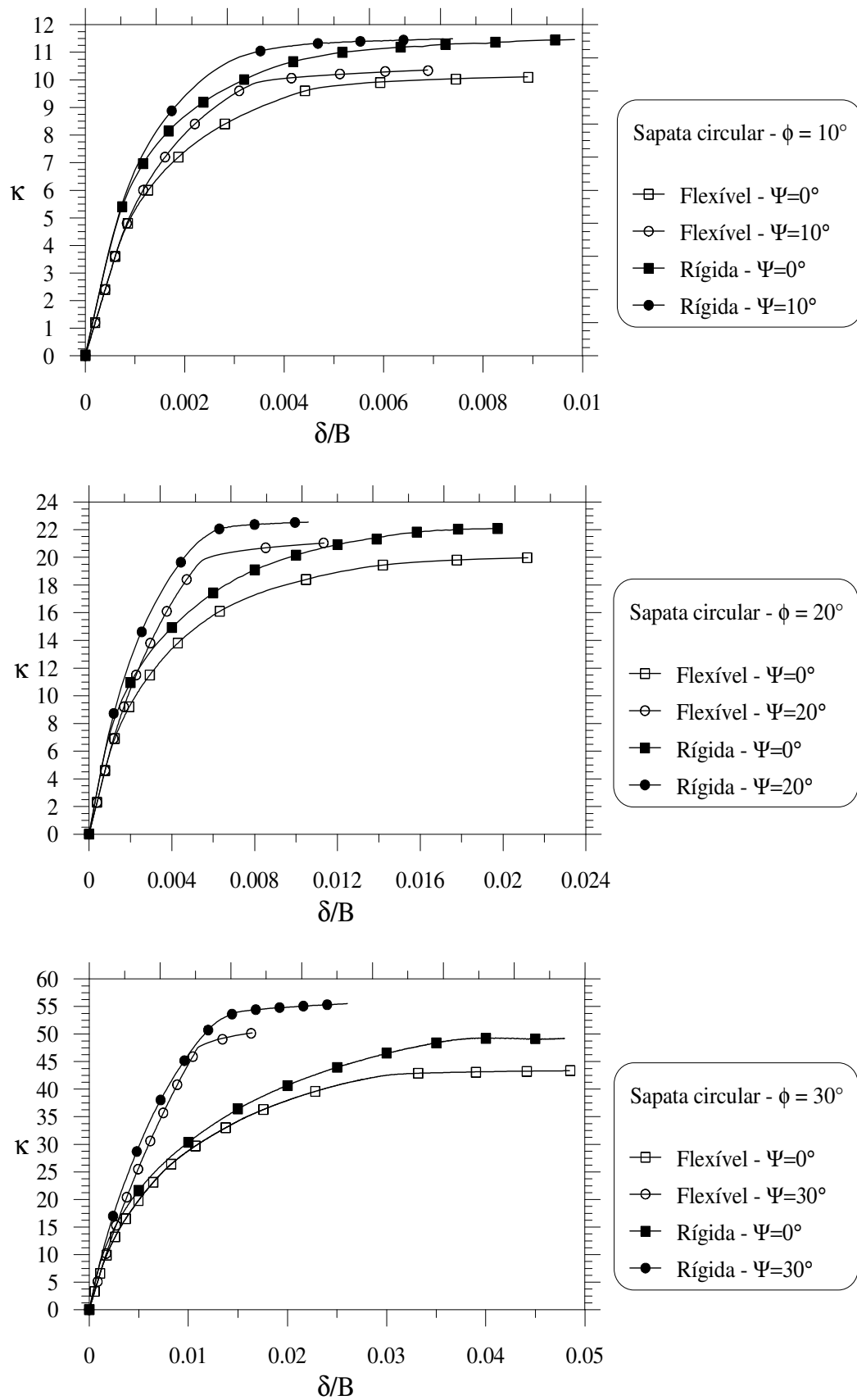


Figura 5.9- Capacidade de carga – Sapata circular

Tabela 5.3 – Fator de capacidade de carga (N_c) - Sapata corrida

ϕ	Ψ	Sapata flexível	Sapata rígida
10°	0°	8.3	8.9
	10°	8.4	9.0
20°	0°	14.7	15.7
	20°	14.9	15.8
30°	0°	29.4	30.0
	30°	30.5	32.4

Tabela 5.4 – Fator de capacidade de carga (N_c) - Sapata circular

ϕ	Ψ	Sapata flexível	Sapata rígida
10°	0°	10.1	11.4
	10°	10.4	11.4
20°	0°	19.8	22.0
	20°	20.4	22.4
30°	0°	43.4	49.5
	30°	52.3	55.3

Problemas de capacidade de carga de fundações superficiais possuem soluções analíticas e semi-analíticas que podem ser encontradas em trabalhos clássicos da literatura técnica, tais como, Terzaghi (1943), utilizando o método do equilíbrio limite e Chen (1975), utilizando a análise limite. Trabalhos mais recentes como os apresentados por Lemos (2002) e Ribeiro (2005) analisaram estes problemas através da análise limite, via MEF, utilizando uma formulação mista em que o sistema discreto satisfaz de forma aproximada à condição de equilíbrio e às condições de compatibilidade e obedece exatamente à condição de escoamento do material. Nas formulações desses autores, a análise de estabilidade é colocada como um problema de programação matemática, que pode ser linear (PL) ou não linear (PNL).

As Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam uma comparação entre os valores do fator de capacidade de carga obtidos no presente trabalho para as fundações flexíveis e os obtidos nos trabalhos citados. Pode-se observar a boa concordância entre os resultados.

Tabela 5.5 – Comparações com outros trabalhos – Fundação corrida flexível

ϕ	Presente trabalho	PL Ribeiro (2005)	PNL Ribeiro (2005)	PL Lemos (2002)	Chen (1975)	Terzaghi (1943)
10°	8.4	8.57	8.53	8.40	8.35	8.35
20°	14.9	15.40	15.26	14.95	14.8	14.84
30°	30.5	31.18	30.89	28.03	30.1	30.14

Tabela 5.6 – Comparações com outros trabalhos – Fundação circular flexível

ϕ	Presente trabalho	PNL Ribeiro (2005)	Chen (1975)	Terzaghi (1943)
10°	10.4	11.91	9.98	10.86
20°	20.4	24.87	20.1	19.29
30°	50.0	52.76	49.3	39.18

5.2. EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO RELACIONADOS AO REFORÇO

A Figura 5.10 ilustra os 3 exemplos de verificação para os elementos de reforço axissimétricos R2 e R3, implementados neste trabalho. Os resultados das análises numéricas foram comparados às soluções dadas pela teoria da elasticidade.

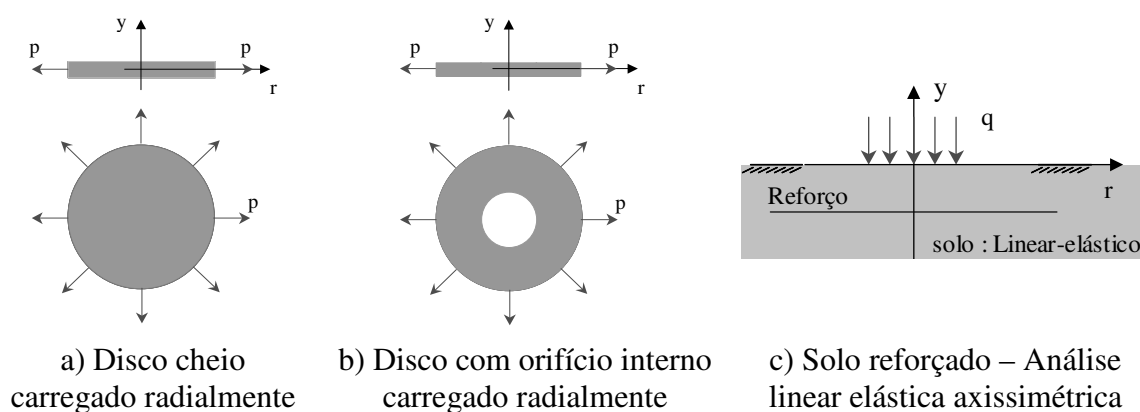


Figura 5.10 – Verificação da implementação dos elementos de reforço R2 e R3

5.2.1. Disco cheio carregado radialmente

Seja o disco de espessura t solicitado radialmente por um carregamento uniforme de intensidade p representado na Figura 5.11. Em qualquer faceta perpendicular ao plano do disco desenvolve-se um estado uniforme de tensão igual ao carregamento aplicado (Villaça e Garcia, 2000).

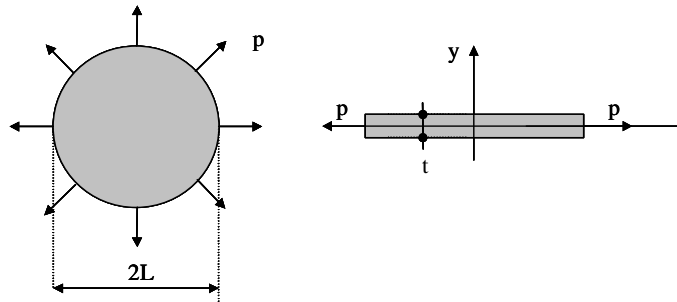
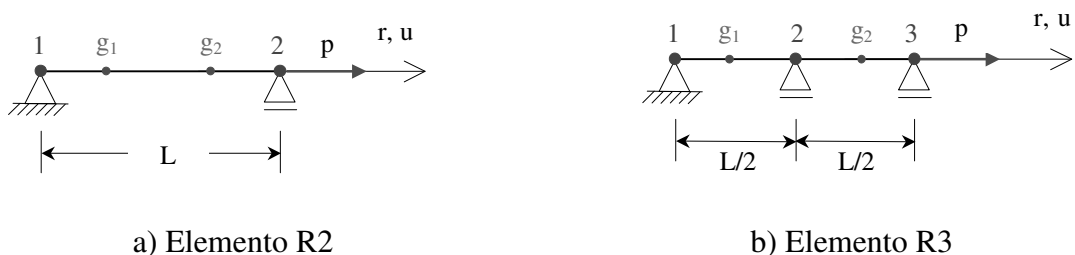


Figura 5.11 - Disco cheio com solicitação radial uniforme

Este problema axissimétrico foi simulado, via MEF, com apenas 1 elemento de reforço, R2 ou R3, como indicado na Figura 5.12. Como o estado de tensão deste exemplo é uniforme, apenas um elemento já é capaz de reproduzi-lo. Com relação às condições de contorno essenciais, é necessária a imposição das restrições de deslocamento na direção vertical de modo a se retirar a singularidade da matriz de rigidez global, para malhas de elementos finitos constituídas apenas por elementos unidimensionais e na posição horizontal.

Os parâmetros elásticos, as dimensões do disco e a intensidade do carregamento são indicados na Figura 5.12. Os resultados analíticos e numéricos em tensão são apresentados na Tabela 5.7, e em deslocamento, na Tabela 5.8, indicando que a solução numérica é exata.



$$E = 2.0 \text{ GPa}; \nu = 0.25; t = 5 \text{ cm}; L = 2 \text{ m}; p = 1591.55 \text{ kPa}$$

Figura 5.12 - Malha de elementos finitos – Disco cheio

Tabela 5.7. Tensões nos elementos de reforço (kPa)

Pontos de Gauss	Coordenadas (m)	Analítico	Numérico			
		$\sigma_r = \sigma_\theta = -p$	1Elem R2		1Elem R3	
			σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
g ₁	0.42265	-1591.55	-1591.55	-1591.55	-1591.55	-1591.55
g ₂	1.577535	-1591.55	-1591.55	-1591.55	-1591.55	-1591.55

Tabela 5.8. Deslocamentos radiais nos elementos de reforço, u (mm)

r (m)	Analítico	u(r) Numérico	
	$u(r) = -\frac{(1-\nu)pr}{E}$	1Elem R2	1Elem R3
0.0	0.000	0.000	0.000
1.0	-0.597	-	-0.597
2.0	-1.194	-1.194	-1.194

5.2.2. Disco com orifício interno carregado radialmente

Um disco de espessura t , raio interno 0.3m e raio externo 0.6m é submetido a uma pressão externa de tração p de magnitude 200kPa. Uma análise axissimétrica foi conduzida considerando-se um material com comportamento linear elástico com rigidez J de 12000kN/m e com coeficiente de Poisson ν nulo. A malha de elementos finitos (5 elementos R3), as dimensões do problema, as condições de contorno e a condição de carregamento são apresentadas na Figura 5.13.

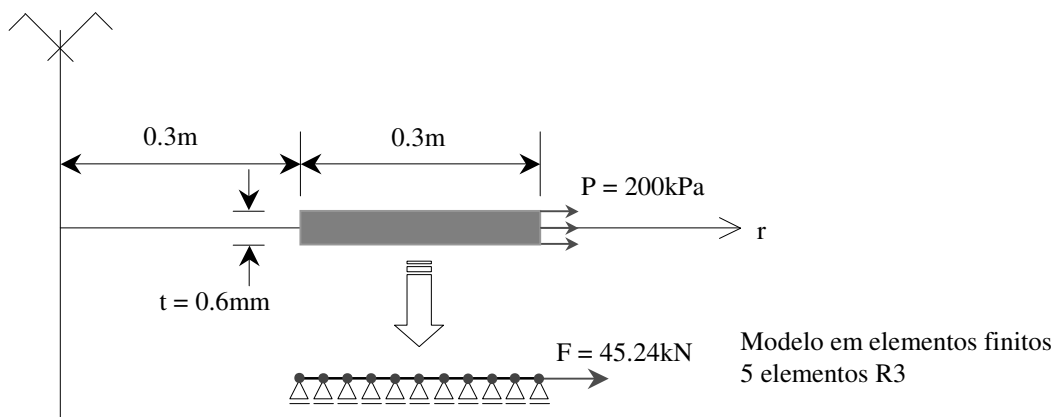


Figura 5.13 – Disco com orifício interno solicitado radialmente

A distribuição de tensão radial σ_r e circunferencial σ_θ obtidas numericamente correspondem à solução analítica baseada na teoria da elasticidade (Villaça & Garcia, 2000) e estão apresentadas na Figura 5.14.

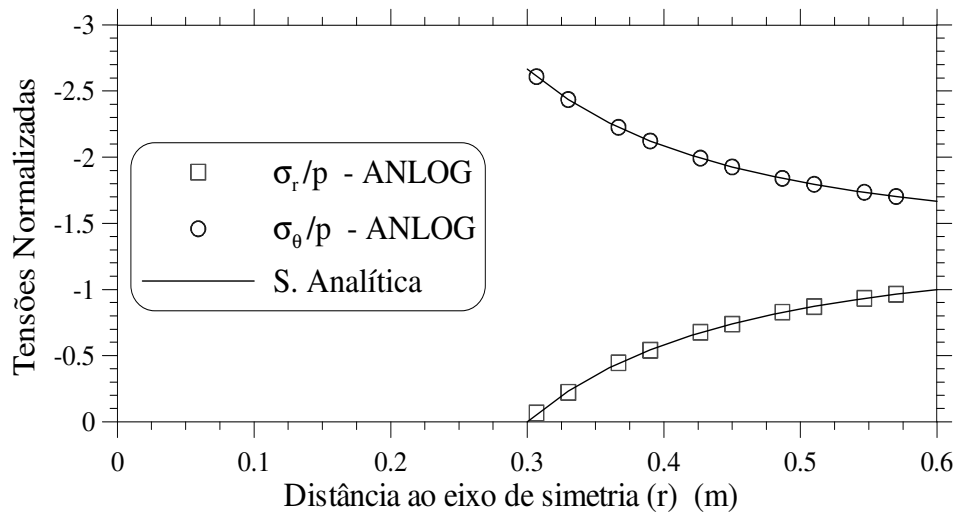


Figura 5.14 – Tensões normalizadas no disco

5.2.3. Análise linear elástica de solo reforçado

Neste exemplo, é analisada a influência de um reforço circular de raio R colocado simetricamente abaixo de uma placa circular de diâmetro B e a uma profundidade U , como indicado na Figura 5.15. A placa circular transmite ao solo uma carga uniformemente distribuída de intensidade q .

A solução analítica baseada na teoria da elasticidade, para o problema axissimétrico em questão, foi proposta por Pitchumani e Madhav (1999).

A equação de equilíbrio para o elemento de reforço na condição axissimétrica deste problema pode ser dada por (Oliveira et al., 2005):

$$\frac{dT_r}{dr} + \frac{T_r - T_\theta}{r} = \tau_s - \tau_i = \tau \quad (5.2)$$

em que T_r e T_θ correspondem às forças radial e circunferencial (por unidade de comprimento) num ponto do reforço distante r do eixo de simetria; τ_s e τ_i são, respectivamente, as tensões de cisalhamento nas faces superior e inferior do reforço e τ é a tensão de cisalhamento mobilizada nas interfaces solo-reforço.

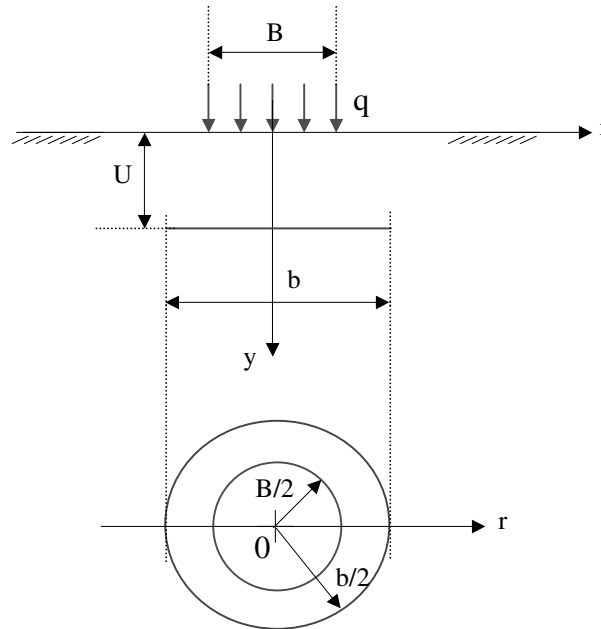


Figura 5.15 - Carregamento sob placa circular em fundação reforçada

A malha de elementos finitos é constituída por 360 elementos Q8 e 20 elementos R3 para o caso de uma placa de diâmetro B de 2m, um reforço de diâmetro b de 4m e um carregamento q de 100kPa. O solo é considerado linear elástico com módulo de elasticidade E igual a 10MPa e coeficiente de Poisson ν igual a 0.3. O reforço também é considerado linear elástico com espessura t igual a 0.10m, coeficiente de Poisson ν nulo e rigidez J variável.

O formato da malha de elementos finitos e as condições de contorno do problema estão indicados na Figura 5.16. O domínio do problema possui extensões horizontal e vertical equivalentes a 10 vezes o raio da placa (ou 5 vezes o raio do reforço).

Os resultados em termos da tensão cisalhante mobilizada ao longo do reforço na forma adimensional τ/q são apresentados nas Figuras 5.17 e 5.18 em função da rigidez relativa entre o reforço e o solo K_τ definida como:

$$K_\tau = \frac{2J}{EB}. \quad (5.3)$$

Os resultados numéricos para a tensão cisalhante mobilizada na interface solo-reforço foram obtidos de duas formas: via reforço e via solo. No primeiro caso essa tensão é obtida em função das forças no reforço, T_r e T_θ , através da Equação 5.2. No segundo caso essa tensão é obtida pela expressão $\tau_s - \tau_i$, onde τ_s e τ_i são definidas pelas tensões cisalhantes nos pontos de Gauss mais próximos da interface solo-reforço (Ver Figura 5.16). O procedimento do segundo caso se justifica em face do alto grau de refinamento da malha na região do reforço.

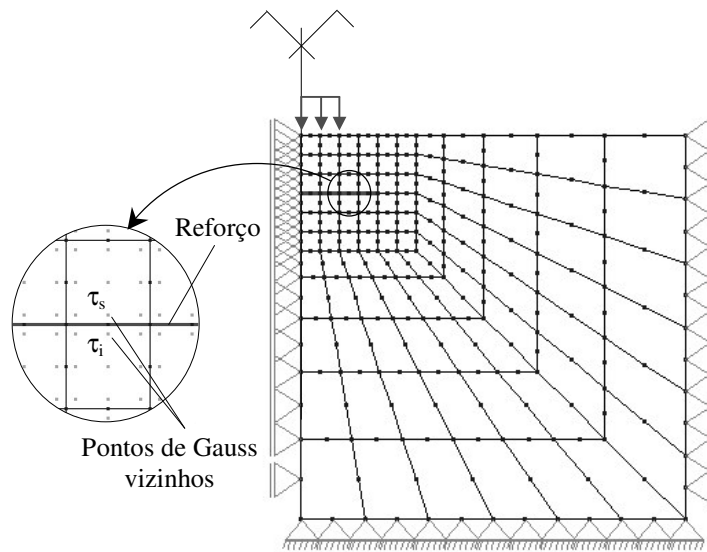


Figura 5.16 - Malha de elementos finitos esquemática – Fundação elástica reforçada

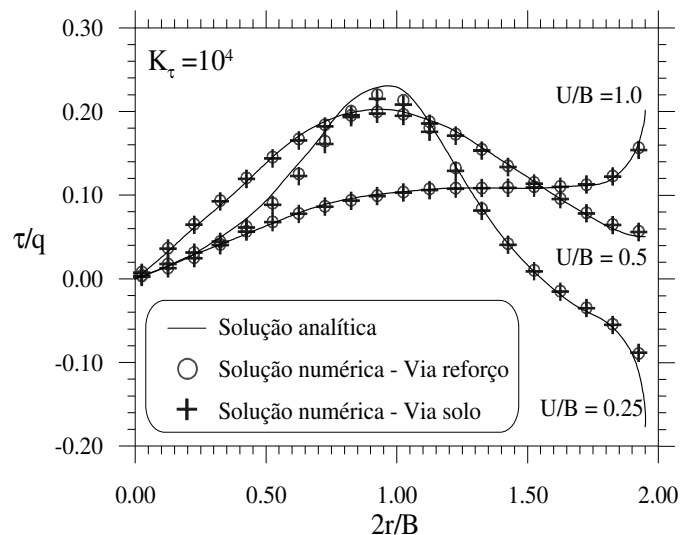


Figura 5.17 - Tensão cisalhante mobilizada na interface solo-reforço em função da profundidade U

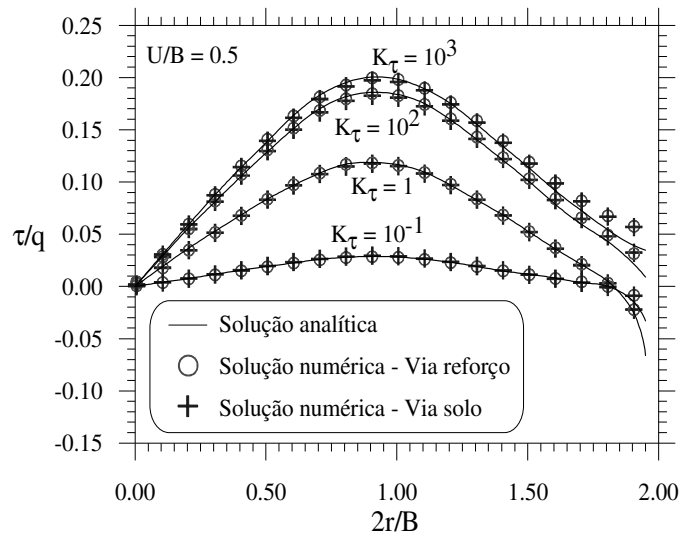


Figura 5.18 - Tensão cisalhante mobilizada na interface solo-reforço em função da rigidez do reforço

Os gráficos das Figuras 5.17 e 5.18 mostram que a equação de equilíbrio do reforço (Equação 5.2) é satisfeita ao longo do reforço e que a solução numérica fornece uma boa aproximação da solução analítica do problema.

Os resultados apresentados na Figura 5.17 mostram que existe uma região ideal de disposição do reforço, na qual, uma maior mobilização de tensões cisalhantes ocorre ao longo do elemento de inclusão. Com estes resultados, pode-se concluir que quanto mais superficial estiver o reforço, maior será a mobilização de tensões cisalhantes. Pode-se observar que uma maior concentração de tensão ocorre na região logo abaixo da extremidade da fundação.

Pode-se observar ainda, na Figura 5.18, que o aumento da rigidez do reforço é acompanhado de um aumento na mobilização de tensões cisalhantes na interface solo-reforço. Entretanto, para a configuração de reforço adotada, os resultados mostram que ao aumentar a rigidez relativa K_τ acima de 100 não se tem mais um aumento significativo na mobilização de tensões cisalhantes.

5.3. EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO RELACIONADOS À INTERFACE

Este item trata da verificação das implementações do elemento de interface e do algoritmo de integração de tensão para este elemento. A Figura 5.19 ilustra os exemplos utilizados. O primeiro (Figura 5.19a), considerando um único elemento, é utilizado para verificar a capacidade do algoritmo de integração de tensão de reproduzir as trajetórias de

deformação impostas ao elemento. No segundo (Figura 5.19b), a interface é avaliada através da análise do deslizamento de uma placa circular com um furo central localizada entre duas superfícies horizontais rígidas. O terceiro exemplo (Figura 5.19c) trata do deslizamento relativo entre dois cilindros ocos concêntricos. No quarto exemplo, um bloco longo elástico é feito deslizar sobre uma superfície rígida (Figura 5.19d). Por fim, uma simulação do ensaio de arrancamento de um material de reforço da massa de solo é realizada (Figura 5.19e). Os três primeiros exemplos foram sugeridos por Brocklehurst (1993) e os resultados numéricos desse autor foram usados como parâmetro de comparação. O quarto exemplo foi comparado à solução analítica proposta por Hird e Russell (1990). O último exemplo foi estudado por Kaliakin e Li (1995); os resultados numéricos obtidos por estes autores foram comparados aos determinados neste trabalho.

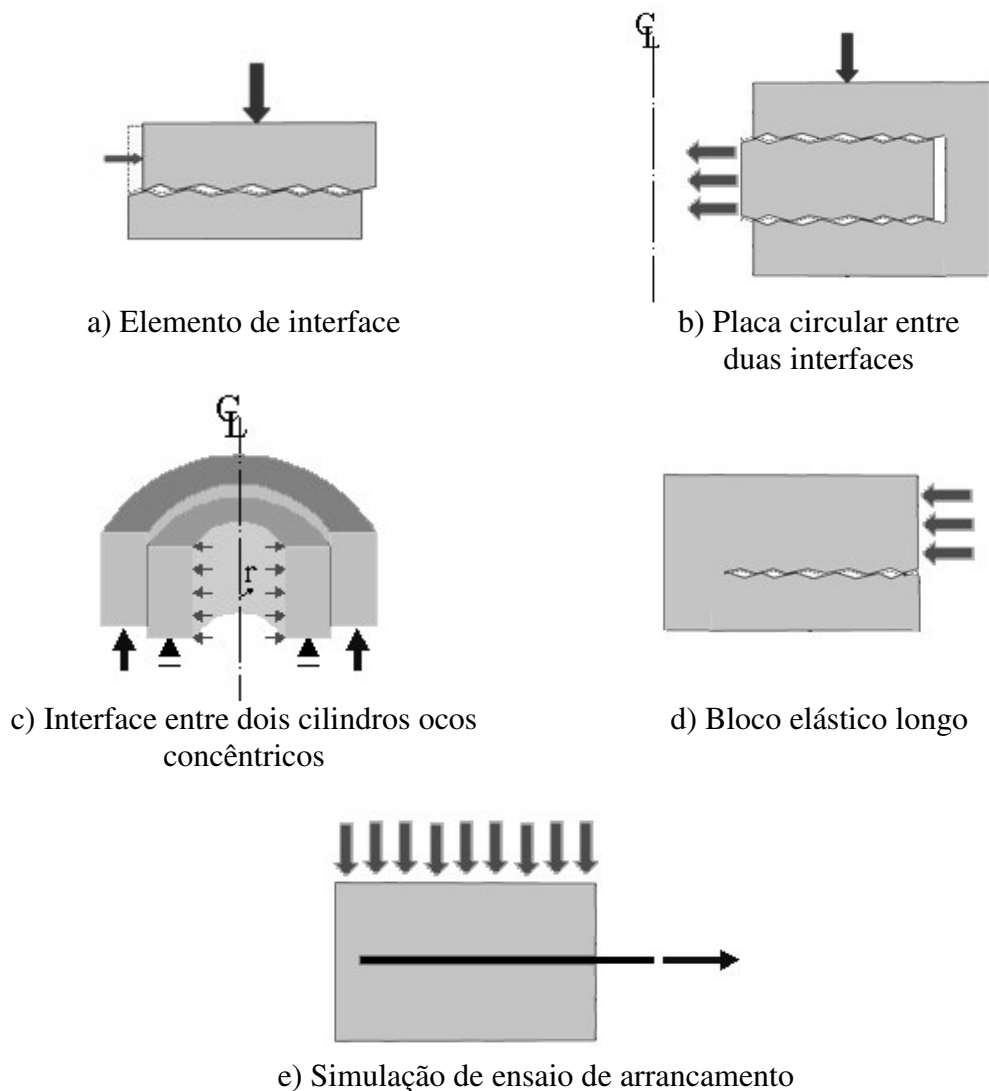
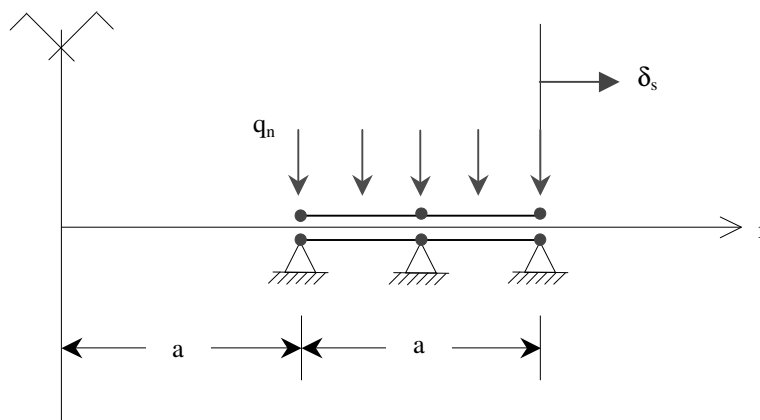


Figura 5.19 – Verificação das implementações relacionadas ao elemento de interface

5.3.1. Elemento de interface axissimétrico

O elemento de interface I6 indicado na Figura 5.20 é submetido a um carregamento normal uniformemente distribuído q_n ao longo do seu topo, de modo a induzir um estado de tensão normal de igual valor. Em seguida, este elemento é submetido às seguintes trajetórias de deslocamento cisalhante uniformemente aplicado na sua face superior: $+0.01\text{m} \Rightarrow -0.004\text{m} \Rightarrow +0.006\text{m}$. As dimensões do problema, as propriedades constitutivas e as condições de contorno são apresentadas na Figura 5.20.



$$k_s = k_n = 10^4 \text{ kN/m}^3; c = 0; \phi = 30^\circ; q_n = 100 \text{ kPa}; a = 1 \text{ m}; \psi \text{ e } \delta_s = \text{variáveis}$$

Figura 5.20 – Interface axissimétrica

A curva tensão (τ/σ) *versus* deslocamento relativo cisalhante normalizado (δ_s/a) é apresentada na Figura 5.21. Pode-se observar que o ângulo de dilatância ψ não influencia no nível máximo de tensão cisalhante na interface, como já era esperado. Pode-se notar também que a proporcionalidade entre as tensões e o deslocamento relativo cisalhante é a mesma tanto no carregamento virgem quanto no descarregamento-recarregamento. O efeito da dilatância pode ser observado na curva normalizada de deslocamento relativo normal (δ_n/a) *versus* cisalhante (δ_s/a) mostrada na Figura 5.22. Na análise com fluxo não associado considerando um ângulo de dilatância nulo não se verifica a ocorrência de deslocamentos relativos normais, como já era esperado.

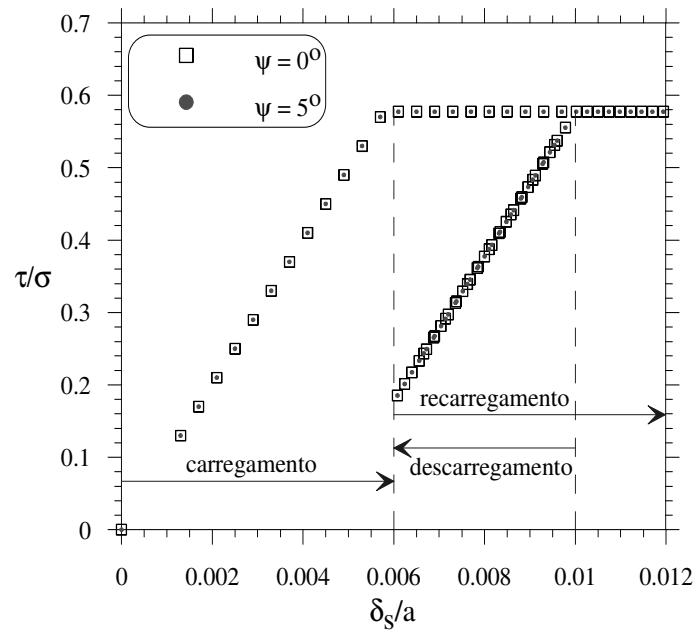


Figura 5.21 – Tensão normalizada *versus* deslocamento relativo cisalhante normalizado

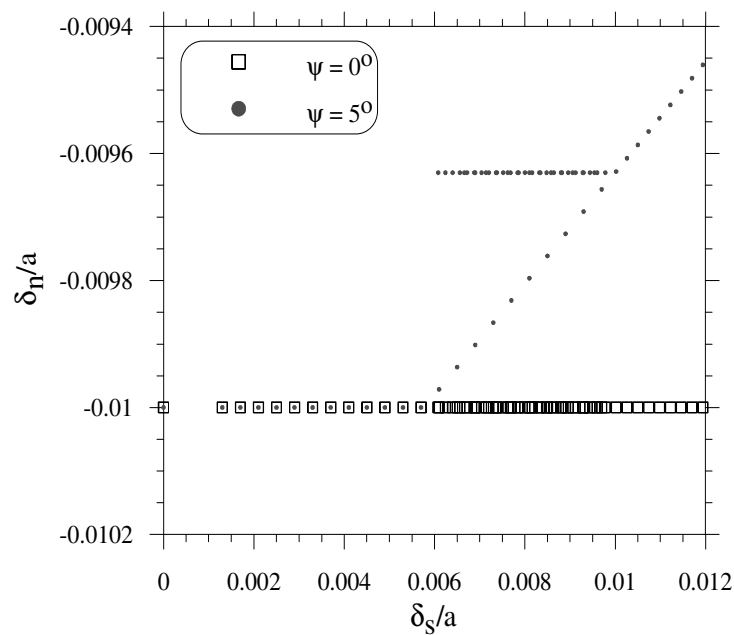


Figura 5.22 – deslocamento relativo normal *versus* deslocamento relativo cisalhante

5.3.2. Placa circular entre duas interfaces

Neste exemplo, uma placa circular com um furo central, tal como indicado na Figura 5.23, é submetida inicialmente a um carregamento q uniformemente distribuído ao longo da sua face superior e em seguida é submetida a um deslocamento uniforme δ ao longo da sua face vertical interna. A placa é modelada como linear elástica com emprego de elementos planos quadráticos (18 elementos Q8) e as interfaces, superior e inferior, da

placa com as superfícies rígidas são modeladas com elementos de interface quadráticos (18 elementos I6). A malha de elementos finitos e as propriedades dos materiais destes elementos são indicadas na Figura 5.23.

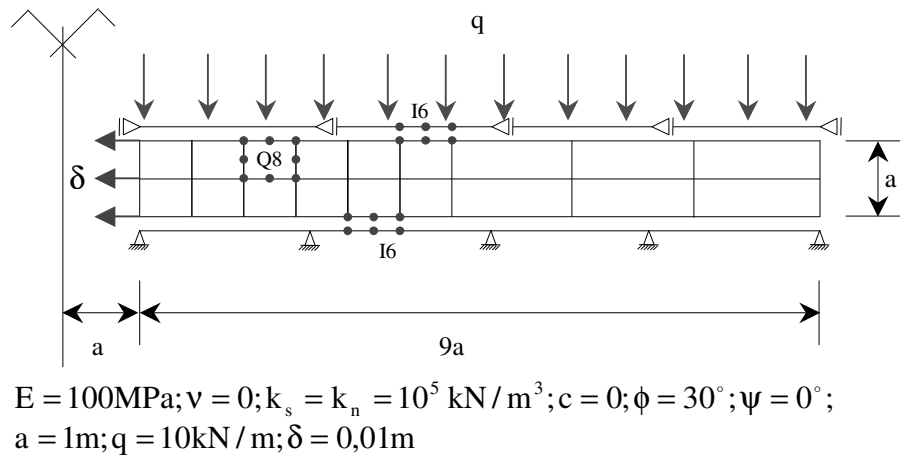


Figura 5.23 – Placa circular entre duas interfaces

Na Figura 5.24, são apresentados os resultados numéricos obtidos pelo presente trabalho em termos da distribuição de tensão de cisalhamento ao longo das interfaces superior e inferior. Estes resultados correspondem aos resultados obtidos numericamente por Brocklehurst (1993).

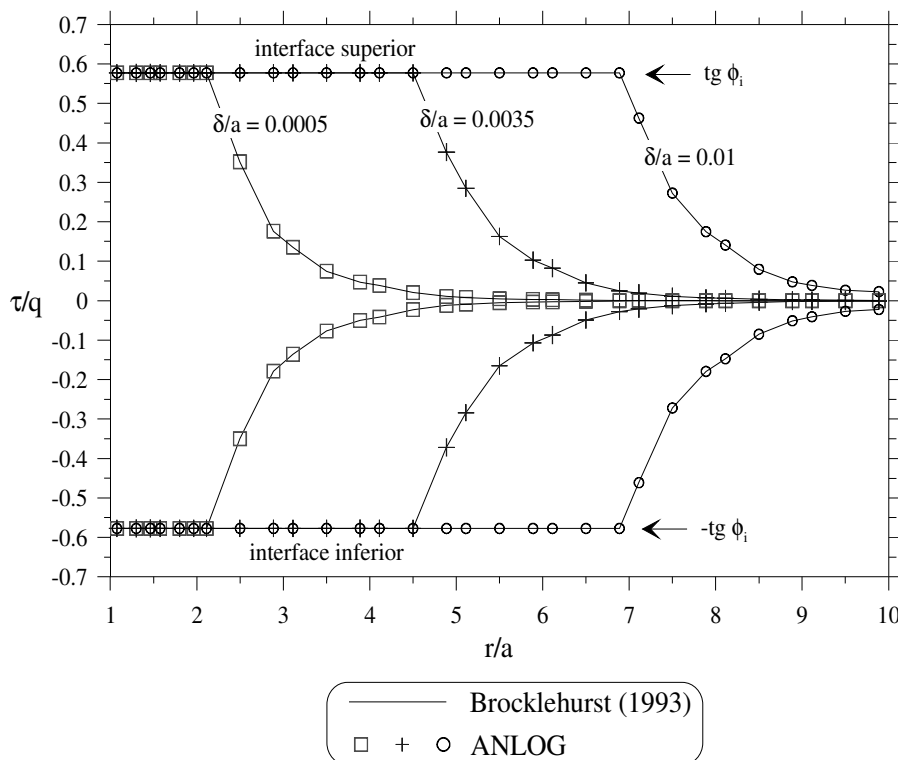
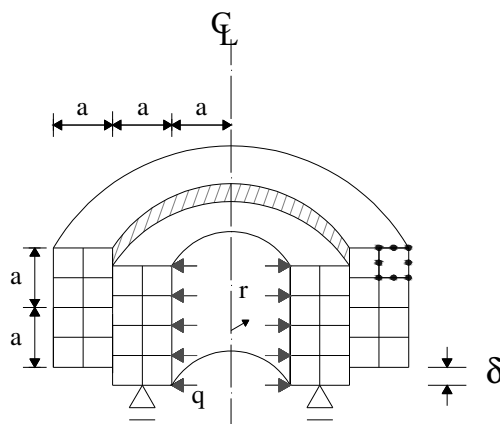


Figura 5.24 – Tensões cisalhantes nas interfaces

5.3.3. Interface entre dois cilindros ocos concêntricos

Neste exemplo, analisa-se o comportamento da interface entre dois cilindros concêntricos, tal como indicado na Figura 5.25. Os cilindros são modelados com o emprego de elementos quadráticos (16 elementos Q8) com comportamento linear elástico. A interface entre eles é modelada com o emprego de elementos de interface quadráticos (4 elementos I6). As dimensões, as condições de contorno e as propriedades dos materiais destes elementos são indicadas na Figura 5.25.



$$\begin{aligned} E &= 50\text{MPa}; \quad \nu = 0; \\ c &= 0; \quad \psi = 0^\circ \quad \text{e} \quad \phi = \text{variável}; \\ k_s &= 10^5 \text{ kN/m}^3; \quad k_n = 10^{10} \text{ kN/m}^3; \\ a &= 1\text{m}; \quad \delta = 0.004\text{m} \end{aligned}$$

Figura 5.25 – Interface entre dois cilindros concêntricos

Uma pressão interna q de 100kN/m é aplicada inicialmente com o intuito de gerar um estado de tensão normal inicial σ_i na interface. Este estado de tensão, de acordo com a teoria da elasticidade (Villaça & Garcia, 2000) e para as condições de contorno deste problema, é igual 15.625kN/m . Desta forma, pode-se calcular a carga última P_{ult} , que mobilizará toda resistência da interface, ou seja: $P_{ult} = 2a\sigma_i \tan\phi = 31.25 \tan\phi$. Duas análises foram desenvolvidas em função do ângulo de atrito: uma para $\phi = 20^\circ$ ($P_{ult} = 11.37\text{kN/m}$) e outra para $\phi = 30^\circ$ ($P_{ult} = 18.04\text{kN/m}$).

Um deslocamento prescrito δ de 0.004m é aplicado ao longo da base do cilindro externo. Ao longo desta trajetória de deformação prescrita, a força de reação P é avaliada como a resultante da força interna atuando ao longo desta base por unidade de comprimento. A Figura 5.26 apresenta a curva carga *versus* deslocamento em função do ângulo de atrito da interface, obtidas pelo ANLOG. Os resultados apresentados conferem com os resultados apresentados por Brocklehurst (1993).

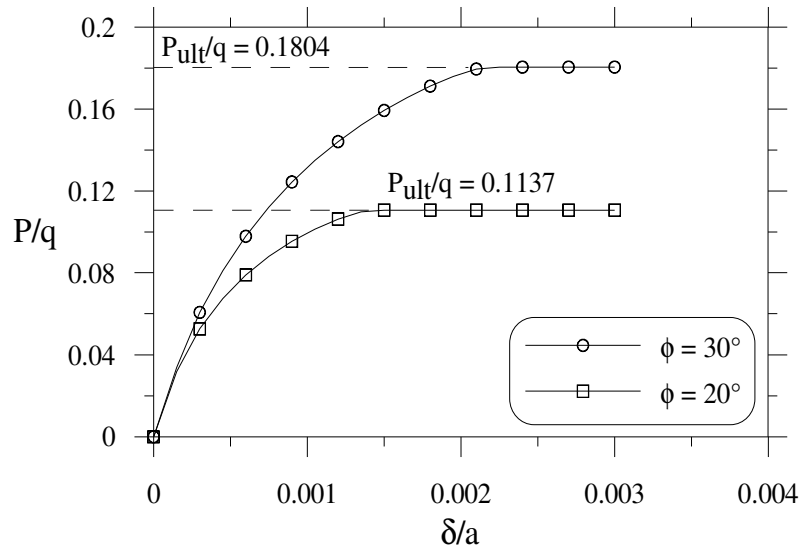


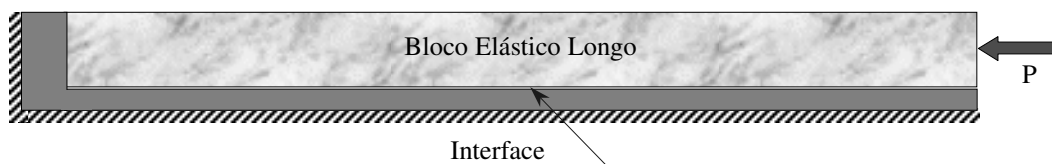
Figura 5.26 - Curva carga *versus* deslocamento

5.3.4. Bloco elástico longo

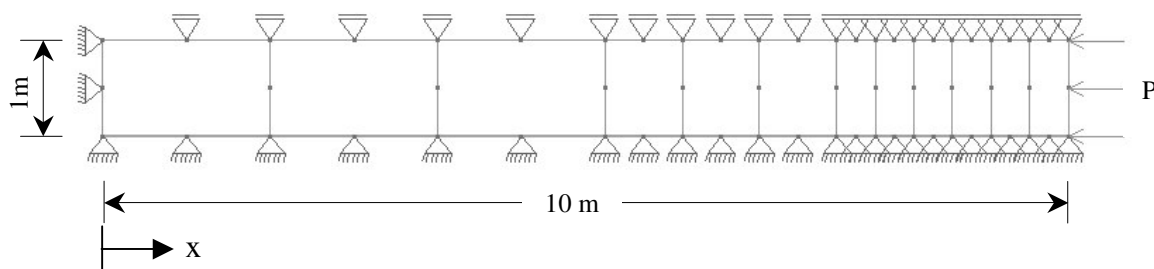
Um bloco elástico longo está assente sobre um material rígido, representado pelo elemento de interface e o seu lado superior é livre para se movimentar horizontalmente. O bloco é submetido a uma força de compressão P em um dos lados e o outro lado é totalmente restringido, como pode ser visto na Figura 5.27. Este exemplo foi apresentado por Ng et al. (1997) e sua solução analítica pode ser encontrada em Hird e Russell (1990).

A malha de elementos finitos constituída por 88 pontos nodais, 12 elementos planos Q8 e 12 elementos de interface I6 é apresentada na Figura 5.27b. Nesta figura estão indicados as dimensões do bloco, as condições de contorno em deslocamento e o carregamento aplicado.

As propriedades dos materiais estão indicados na Tabela 5.9, onde E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material; e c , ϕ , k_s e k_n são respectivamente, a coesão, o ângulo de atrito e as rigidezes cisalhante e normal da interface.



a) Problema proposto



b) Malha de elementos finitos esquemática

Figura 5.27 – Bloco elástico longo

Tabela 5.9 – Dados do problema: Bloco elástico longo

Material	Propriedades dos materiais
Bloco elástico (Q8)	$E=1.0 \times 10^5 \text{ kPa}$ $\nu=0$
Interface (I6)	$c=30 \text{ kPa}$ $\phi = 0^\circ$ $k_s=10^4 \text{ kN/m}^3$ $k_n=10^6 \text{ kN/m}^3$

Hird e Russell (1990) encontraram a seguinte solução para este problema em relação à tensão de cisalhamento na interface:

$$\tau(x) = \tau_{\max} \left(\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\alpha x_1} - e^{-\alpha x_1}} \right), \quad x \in [0, x_1] \quad (5.4a)$$

$$\tau(x) = \tau_{\max}, \quad x \in [x_1, L] \quad (5.4b)$$

em que x_1 corresponde ao ponto em que a tensão de cisalhamento na interface atinge a sua resistência máxima. Este ponto é obtido através da solução da equação abaixo usando o método iterativo de Newton:

$$\left(\frac{e^{\alpha x_1} - e^{-\alpha x_1}}{e^{\alpha x_1} + e^{-\alpha x_1}} \right) + \alpha(L - x_1) - \frac{p\alpha H}{\tau_{\max}} = 0 \quad (5.5)$$

em que

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_s(1+\nu)(1-2\nu)}{EH(1-\nu)}}$$

Uma pequena tensão normal de compressão (0.1kPa) é aplicada inicialmente nos elementos de interface, como um artifício para mantê-la inicialmente em estado compressivo. Esta tensão inicial não afetará a resposta deste problema, uma vez que o comportamento da interface é puramente coesivo ($\phi=0^\circ$).

A Figura 5.28 apresenta a comparação entre os resultados numéricos obtidos com ANLOG e o analítico apresentado por Hird e Russell (1990) em termos da distribuição da tensão cisalhante ao longo da interface para diferentes níveis de carregamento aplicado (de 100kN/m a 400kN/m). As soluções analíticas apresentadas pelas equações 5.4 e 5.5 foram obtidas neste trabalho com a aplicação do programa MAPLE(4) (Zambrana, 2005).

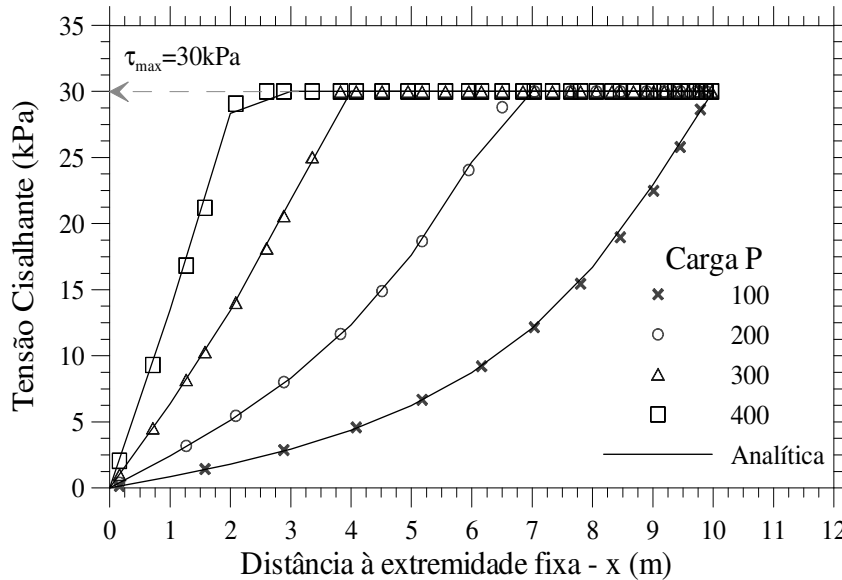


Figura 5.28 – Distribuição da tensão de cisalhamento na interface

5.3.4. Simulação de ensaio de arrancamento

Este exemplo trata da simulação de um ensaio de arrancamento considerando uma condição plana de deformação. Usando uma representação discreta deste ensaio, adotou-se elementos planos quadriláteros isoparamétricos Q4 para representar o solo. Para modelar a interface solo-reforço, foi utilizado o elemento J4, isoparamétrico de espessura nula com 4 nós. Este elemento finito, também conhecido como elemento GTB, tem sido muito utilizado nas análises via MEF de problemas geotécnicos, embora apresente certas deficiências que serão discutidas a seguir. O reforço foi representado através de elementos unidimensionais de 2 nós (B2) com apenas um grau de liberdade por nó.

O solo apresenta peso próprio desprezível e é modelado como linear elástico. O reforço é considerado como linear elástico e sem peso próprio, e a interface solo-reforço é modelada como elástica perfeitamente plástica obedecendo ao critério de Coulomb. As propriedades destes materiais estão apresentadas na Tabela 5.10.

A Figura 5.29 apresenta uma das malhas utilizadas neste exemplo. Essa malha é constituída de 288 elementos planos Q4, 48 elementos J4 na interface solo-reforço superior, 48 elementos J4 na interface inferior, e 48 elementos B2.

Tabela 5.10 – Dados do problema: Ensaio de arrancamento

Material	Propriedades do material				
Solo (Q4)	$E = 2000$	$\nu = 0.25$			
Reforço (B2)	$E = 20000$	$t = 0.10$			
Interface (J4)	$c = 0$	$\phi = 26.6^\circ$	$\psi = 0^\circ$	$k_s = \text{variável}$	$k_n = 10^{10}$

Em todas as análises realizadas, um carregamento distribuído q de intensidade 10 foi aplicado no primeiro passo. Em seguida, iniciou-se a fase de arrancamento, aplicando-se um carregamento P de intensidade 50, na extremidade livre do reforço.

Um processo incremental-iterativo do tipo Newton-Raphson modificado foi utilizado para a solução do sistema de equações. O critério de convergência adotado é definido pela relação entre a norma euclidiana do vetor de forças desequilibradas na iteração corrente e a norma euclidiana do vetor de força externa. A tolerância adotada para convergência foi de 10^{-5} .

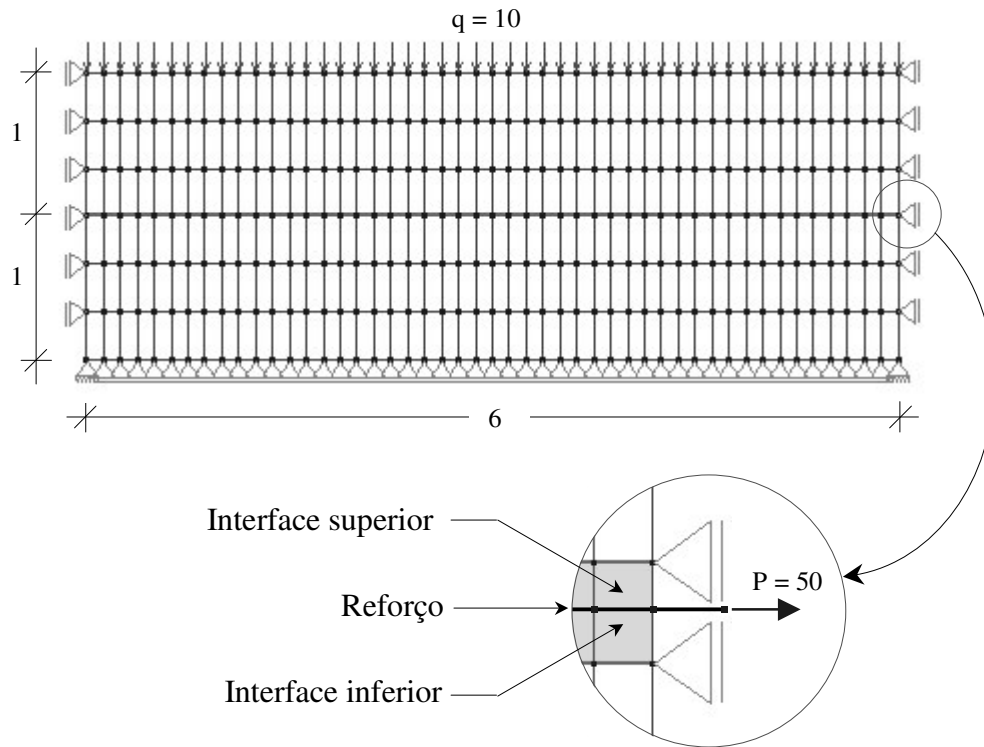


Figura 5.29 – Malha de elementos finitos – Ensaio de arrancamento

O esquema de integração numérica para os elementos planos Q4 e unidimensionais B2 foi do tipo Gauss-Legendre (4 pontos de integração para o elemento Q4 e 2 pontos de integração para o elemento B2).

Duas alternativas foram testadas para a integração numérica dos elementos de interface J4, a quadratura de Gauss-Legendre e a quadratura de Gauss-Lobatto. Em ambos os esquemas, dois pontos de integração foram utilizados.

Todos os resultados apresentados, a seguir, foram obtidos no instante em que a força de arrancamento P era igual 30. A Figura 5.30 apresenta uma comparação entre o resultado obtido no presente trabalho e o resultado obtido por Kaliakin e Li (1995). Estes autores realizaram a mesma análise, entretanto, utilizaram uma integração analítica para os elementos de interface. A rigidez cisalhante k_s e rigidez normal k_n da interface foram, respectivamente, 10^6 e 10^{10} . A quadratura de Gauss-Legendre foi adotada na integração numérica dos elementos de interface cujo resultado em termo da distribuição de tensão é apresentado na Figura 5.30. Pode-se observar que os resultados do presente trabalho apresentam oscilações nos valores das tensões cisalhantes. Em alguns pontos de integração essas oscilações ocorrem com a mudança de sinal das tensões cisalhantes que são irreais de

acordo com a condição de arrancamento. Entretanto, observa-se ainda, uma boa aproximação dos resultados do presente trabalho com os de Kaliakin e Li (1995).

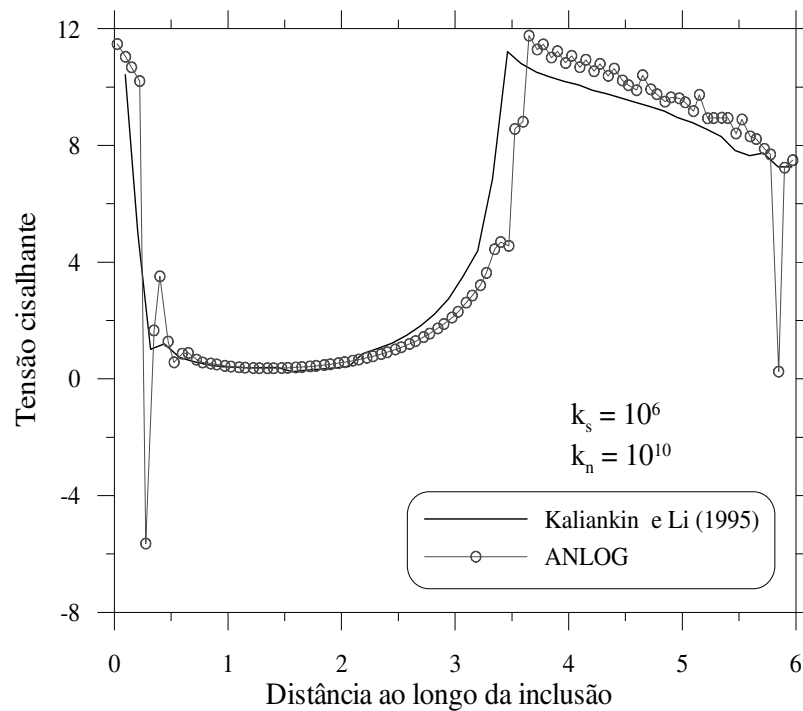


Figura 5.30 – Distribuição das tensões cisalhantes na interface ao longo da inclusão

Day e Potts (1994), Villard (1996) e Pereira (2003) investigaram os problemas relacionados com estas oscilações e perceberam que valores muito elevados da rigidez cisalhante, como k_s igual a 10^6 , podem conduzir ao mal condicionamento da matriz de rigidez.

A fim de analisar o efeito da magnitude da rigidez cisalhante, outras análises foram conduzidas com valores de k_s iguais a 10^5 e 10^4 , mantendo-se a malha de elementos finitos da Figura 5.29 e o esquema de integração numérica do elemento de interface. Pode-se observar, pela Figura 5.31, que as oscilações reduzem com a diminuição do valor de k_s .

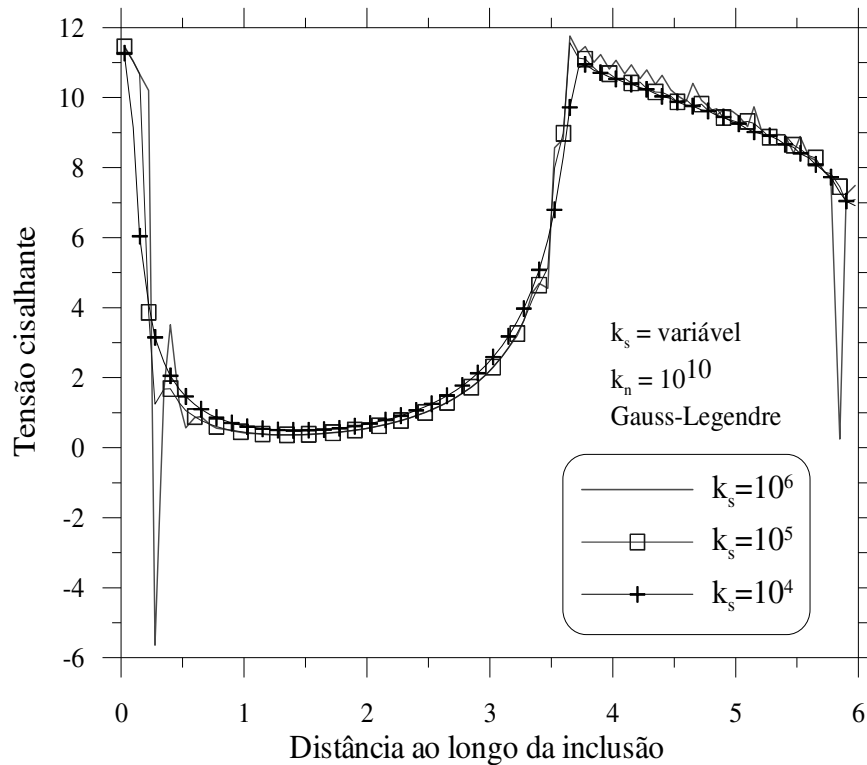


Figura 5.31 - Distribuição das tensões cisalhantes para diferentes valores de k_s

Uma outra questão levantada, na tentativa de esclarecer melhor o problema das oscilações nas tensões cisalhantes, é o grau de discretização do problema. Outras análises foram conduzidas variando-se o número de elementos de interface ao longo de cada face do reforço (6, 12, 24 e 48 elementos em cada face). A magnitude da rigidez cisalhante também foi variada (10^6 , 10^5 e 10^4). Para estas análises, o esquema de integração numérica de Gauss-Legendre com apenas 2 pontos de integração também foi utilizado para os elementos de interface.

A Tabela 5.11 apresenta os resultados quanto à convergência do processo de solução. Pode-se observar que malhas pouco refinadas aliadas a um elevado valor de rigidez cisalhante geram dificuldades numéricas e o processo de solução não converge. Este fato pode estar ligado ao mal condicionamento da matriz de rigidez global.

A Figura 5.32 apresenta as tensões cisalhantes na interface para os diferentes refinamentos de malha e diferentes valores de rigidez cisalhante. Embora haja a convergência da solução, em alguns casos, ainda ocorrem algumas oscilações nas tensões cisalhantes.

Através dos resultados apresentados pelas Figuras 5.31 e 5.32, pode-se concluir que o valor da rigidez cisalhante para o qual não existam oscilações nas tensões cisalhantes

depende do grau de refinamento da malha. Quanto mais refinada a malha, menor é a influência da rigidez cisalhante.

Tabela 5.11 – Convergência da solução - Variação do nº de elementos J4 *versus* k_s

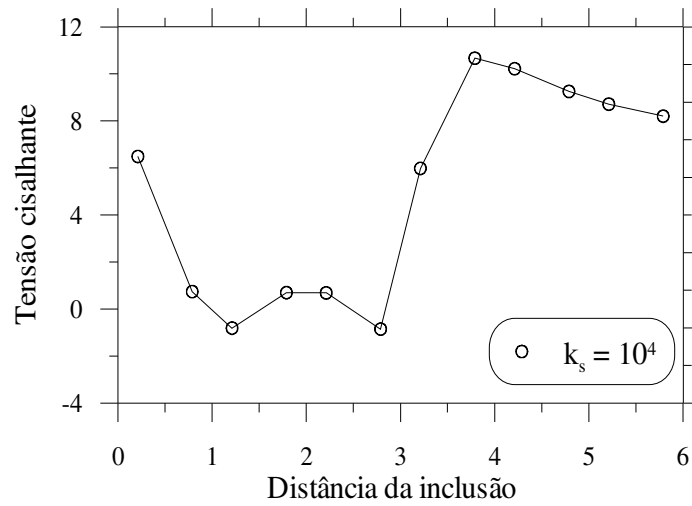
Número de elementos J4	Rigidez cisalhante - k_s		
	10^6	10^5	10^4
6	NC	NC	converge
12	NC	converge	converge
24	NC	converge	converge
48	converge	converge	converge
NC- Não converge			

Marques et al. (2003) atribuem ao esquema de integração numérica os problemas relacionados às oscilações das tensões cisalhantes. Dentro deste prisma, eles apresentaram resultados utilizando a integração numérica de Gauss-Lobatto para os elementos de interface. Este esquema foi implementado no código do programa ANLOG e novas análises foram conduzidas utilizando-se 2 pontos de integração.

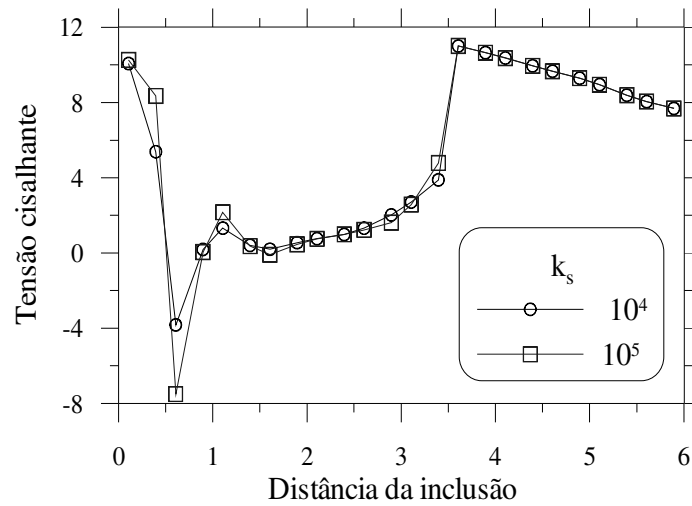
Para avaliar o desempenho desse esquema de integração numérica, foram utilizados valores de rigidez cisalhante iguais a 10^6 e 10^8 . Os resultados em termos das tensões cisalhantes ao longo da interface solo-reforço são mostrados na Figura 5.33. O esquema de integração numérica de Gauss-Lobatto mostrou-se bastante eficiente. A convergência em todas as análises foi alcançada e as oscilações nos valores das tensões cisalhantes foram superadas.

Oscilações nos valores das tensões e dificuldades numéricas podem surgir quando da utilização do processo de integração numérica de Gauss-Legendre para os elementos de interface. Esse esquema de integração requer um cuidado especial quanto a discretização do meio, sobretudo, quando o valor da rigidez cisalhante for elevado.

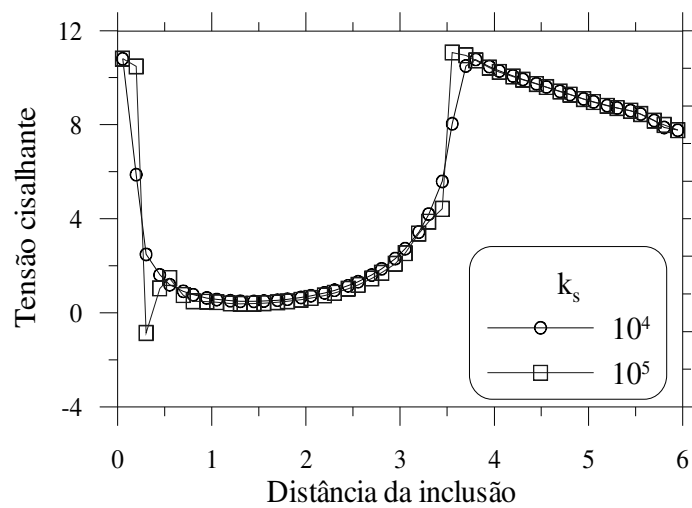
Os resultados mostraram que a quadratura de Gauss-Lobatto é a melhor alternativa para a integração numérica dos elementos de interface da família do GTB. Esse processo de integração numérica permite a utilização de elevados valores de rigidez cisalhante, sem a necessidade de um elevado refinamento da malha.



a) 6 elementos GTB/lado



b) 12 elementos GTB/lado



c) 24 elementos GTB/lado

Figura 5.32 - Distribuição das tensões cisalhantes – Influência da discretização – Gauss-Legendre – $k_n = 10^{10}$

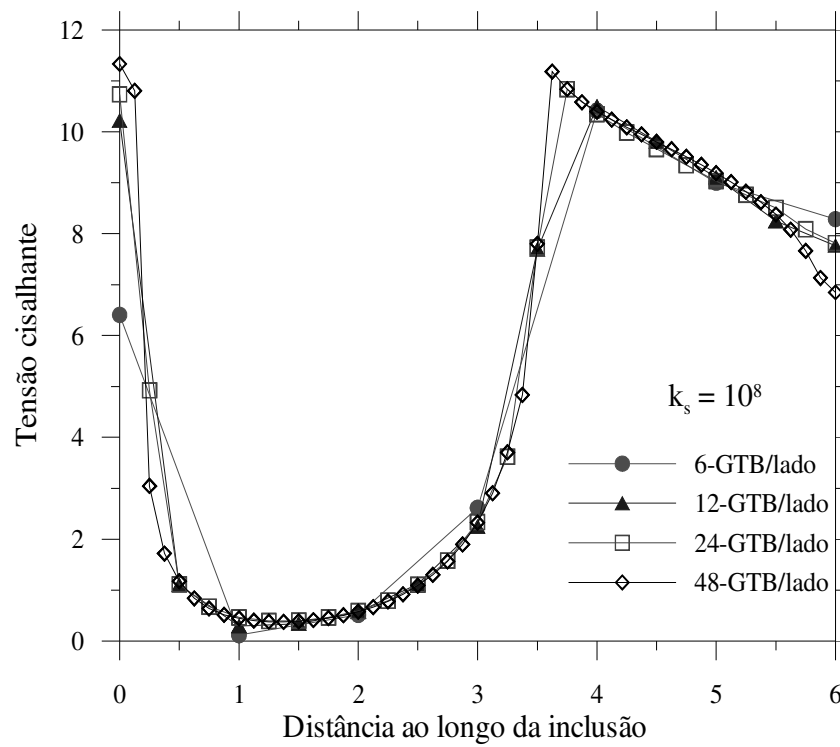
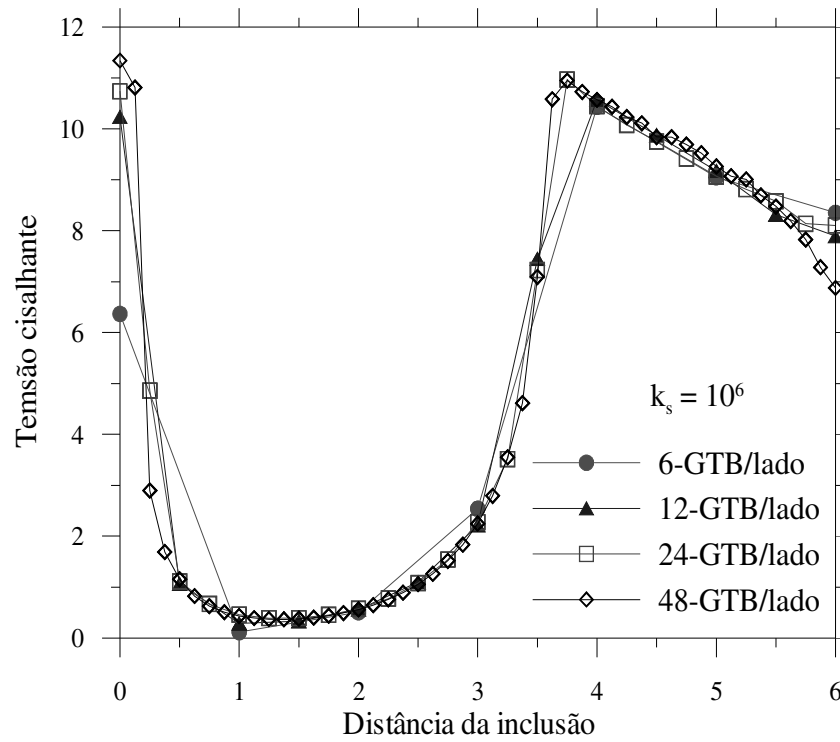


Figura 5.33 - Distribuição das tensões cisalhantes – $k_n = 10^{10}$ - Quadratura de Gauss-Lobatto

Capítulo 6

ANÁLISES DE FUNDAÇÕES EM SOLO PURAMENTE COESIVO REFORÇADO

6.1. INTRODUÇÃO

Neste exemplo, é estudada a influência do reforço no comportamento de fundações superficiais (corrida e circular) dispostas sobre solo puramente coesivo. Várias análises foram conduzidas para diferentes configurações de reforço. Os seguintes parâmetros gerais são utilizados nas análises que se seguem (Figura 6.1): B é a largura da sapata corrida ou o diâmetro da sapata circular; a primeira camada de reforço é colocada a uma profundidade U ; o espaçamento entre camadas de reforço é H ; o número de camadas de reforço é N ; o comprimento ou diâmetro do elemento de reforço é b ; a profundidade da última camada é d .

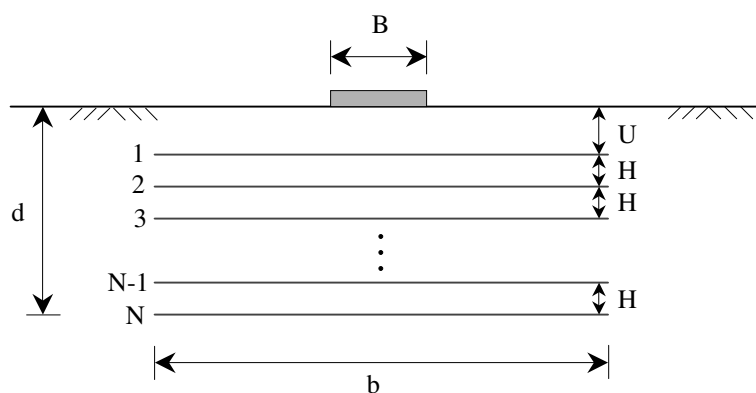


Figura 6.1 – Parâmetros gerais das análises de fundações em solo reforçado

As fundações foram consideradas rígidas e rugosas sem embutimento. O diâmetro da fundação circular ou a largura da fundação corrida são iguais a 1m ($B = 1\text{m}$).

O reforço possui espessura t igual a 2.5mm e rigidez J igual a 2500 kN/m. O valor de b (diâmetro ou largura do reforço) é igual a 4m.

O solo foi modelado sem peso e com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade igual a 10000kPa, coeficiente de Poisson igual a 0.49, coesão igual a 30kPa e ângulo de atrito igual a zero.

A malha de elementos finitos e as condições de contorno são apresentadas na Figura 6.2. Esta malha foi utilizada para os dois casos (sapata circular e sapata corrida) e foi construída levando-se em consideração a simetria do problema. Para simular o solo, foram utilizados elementos quadriláteros isoparamétricos de oito nós. O reforço foi simulado com elementos unidimensionais isoparamétricos de 3 nós. Neste exemplo, não foi considerado o deslocamento relativo entre o solo e o reforço (interface rígida) e por conseguinte não foram adotados elementos de interface.

Fundações rígidas e rugosas podem ser simuladas por controle de deslocamento ou controle de carga. Neste exemplo, o controle de deslocamento foi utilizado. Nos nós imediatamente abaixo da fundação, foram aplicados um deslocamento prescrito nulo na direção horizontal e um deslocamento prescrito δ na direção vertical (Potts e Zdravković, 2001).

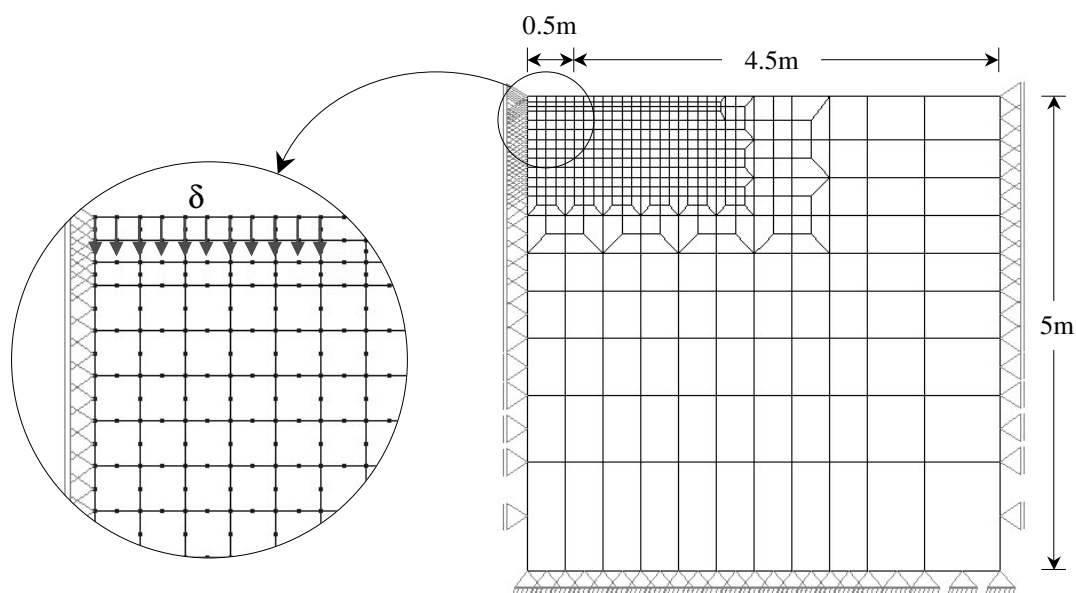


Figura 6.2 – Malha de elementos finitos – Fundação em solo reforçado

6.2. FUNDAÇÕES EM SOLO NÃO REFORÇADO

A teoria clássica da capacidade de carga determina para uma sapata corrida sem embutimento sobre um solo homogêneo puramente coesivo um fator de capacidade de carga N_c igual a 5.14, seja a sapata lisa ou rugosa. Já para a sapata circular, uma solução semi-analítica determina um fator de capacidade de carga igual a 5.69 para fundação lisa e 6.2 para fundação rugosa (Potts e Zdravković, 2001).

A Figura 6.3 apresenta a curva fator κ *versus* δ/B para as fundações não reforçadas (fundação corrida e fundação circular). A definição do fator κ está apresentada no item 5.1.2. O valor do fator de capacidade de carga N_c é determinado, via ANLOG, como o valor máximo assumido pelo fator κ durante a trajetória de equilíbrio. Os valores calculados do fator da capacidade de carga das fundações circular e corrida foram, respectivamente, 6.54 e 5.42. Potts e Zdravković (2001) analisaram o mesmo problema e obtiveram fatores de capacidade de carga para as fundações circular e corrida iguais a 6.52 e 5.39, respectivamente. A Tabela 6.1 resume os resultados obtidos para as fundações não reforçadas, bem como, o erro cometido na solução numérica.

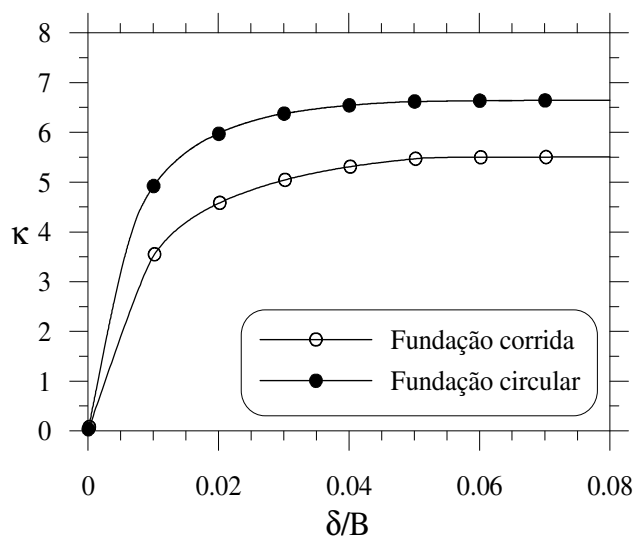


Figura 6.3 – Curva Fator κ *versus* δ/B – Fundações sem reforço

Tabela 6.1 – Fator de capacidade de carga das fundações rígidas rugosas

	Solução convencional		ANLOG		Potts e Zdravković (2001)	
	F. corrida	F. circular	F. corrida	F. circular	F. corrida	F. circular
N_c	5.14	6.20	5.42	6.54	5.39	6.52
Erro (%)			5.4	5.5	4.9	5.2

$$\text{Erro}(\%) = \frac{SN - SC}{SC} \times 100 \quad \text{SN} = \text{Solução numérica e } SC = \text{Solução convencional}$$

Para uma fundação corrida, rígida, assentada sobre um solo puramente coesivo, um mecanismo de ruptura teoricamente possível é o de Prandtl, mostrado na Figura 6.4 (Potts e Zdravković, 2001).

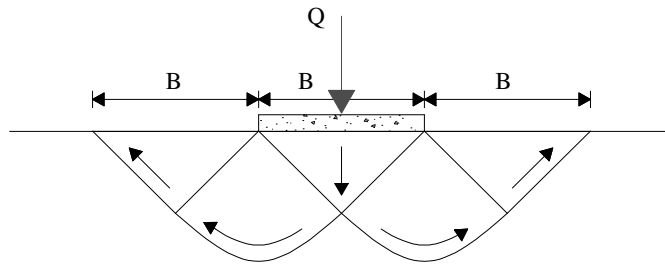


Figura 6.4 - Mecanismo de ruptura de Prandtl para sapata corrida

Os vetores de deslocamento, pós ruptura (para um recalque de 0.06m), das análises sem reforço, bem como os pontos plastificados, podem ser vistos na Figura 6.5 e 6.6. Os vetores indicam, claramente, a extensão do mecanismo de ruptura de cada análise.

Pode-se observar que o mecanismo de ruptura da sapata corrida se aproxima bem do proposto por Prandtl. A região envolvida na cunha de ruptura se estende até 1.5m, à partir do eixo de simetria, e 0.8m em profundidade.

A fundação circular apresentou um mecanismo de ruptura menos extenso, tanto lateralmente como em profundidade. Uma extensão lateral de aproximadamente 1.0m, à partir do eixo de simetria, e uma extensão em profundidade de 0.5m podem ser vistas na Figura 6.6.

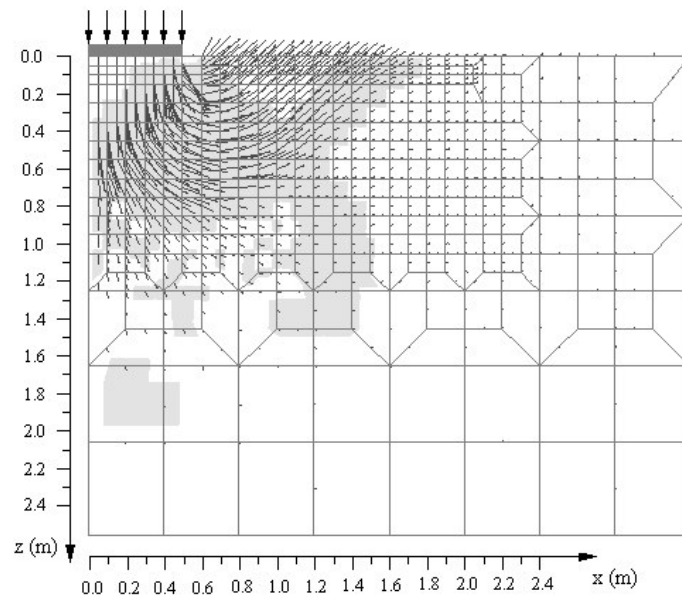


Figura 6.5 – Mecanismo de ruptura – fundação corrida

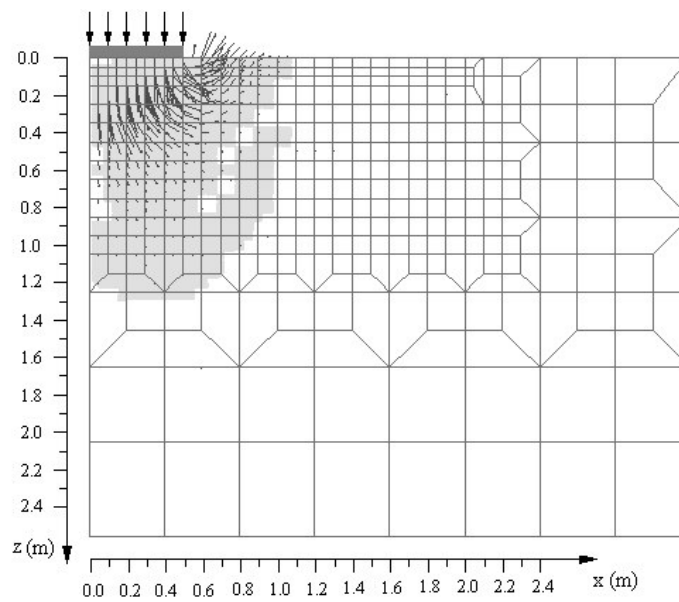


Figura 6.6– Mecanismo de ruptura – fundação circular

6.3. FUNDAÇÃO EM SOLO REFORÇADO COM UMA CAMADA DE REFORÇO

Neste item, são apresentados os resultados das análises da capacidade de carga de fundações corrida e circular em solo reforçado com uma única camada de reforço. Mantendo-se constante o comprimento ou diâmetro do reforço, variou-se a profundidade U de $0.05B$ a $0.9B$.

A melhoria na capacidade de carga será avaliada através da variável RCS_{ref} , razão de capacidade de carga, definida como:

$$RCS_{ref} = \frac{\kappa_{ref}}{N_c^0} \quad (6.1)$$

em que, N_c^0 é o fator de capacidade de carga da fundação em solo não reforçado e κ_{ref} é o valor do fator κ para um determinado recalque de referência da fundação em solo reforçado. Assim, $RCS_{0.1m}$ será avaliada utilizando-se o fator κ correspondente a um valor de recalque de $0.1m$ para a fundação reforçada.

Os benefícios associados à redução dos recalques devido à inclusão de elementos de reforço no solo serão avaliados através da variável RRR , razão de redução dos recalques, definida como:

$$RRR(\%) = \left[\frac{\delta^0 - \delta^r}{\delta^0} \right] 100 \quad (6.2)$$

em que, δ^0 é o deslocamento da fundação não reforçada correspondente à carga de ruptura, e δ^r é o deslocamento da fundação reforçada correspondente à carga de ruptura do solo não reforçado. A Figura 6.7 ilustra o conceito dos parâmetros empregados no cálculo das variáveis RRR e RCS .

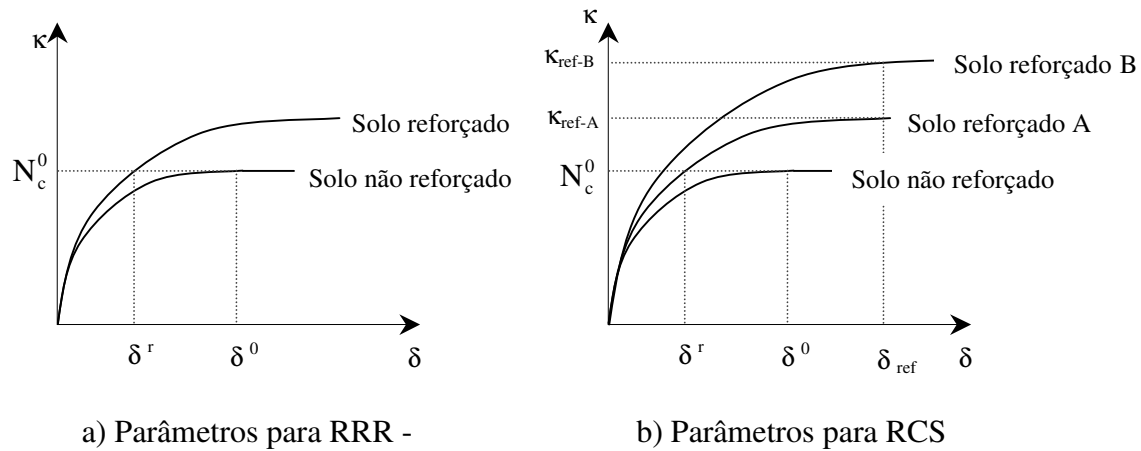


Figura 6.7 – Definição dos parâmetros para o cálculo das variáveis RRR e RCS

Através dos resultados apresentados na Figura 6.8, observa-se que a inclusão do reforço no solo ocasiona uma redução dos recalques da fundação. A redução ocorre para qualquer posição de inclusão, entretanto, pode-se definir uma região ideal, que para a sapata corrida fica entre $0.05B$ e $0.55B$ onde se verifica uma razão de redução de recalque em torno de 40%.

Para a sapata circular, a perda de RRR é mais evidente a medida em que a camada de reforço fica mais profunda. Uma RRR entre 50% e 40% é encontrada para profundidades de $0.05B$ a $0.35B$.

A Figura 6.9 apresenta a influência do reforço na capacidade de carga. Observa-se que a utilização de apenas uma camada de reforço não provê ganhos muito significativos na capacidade de carga ($RCS_{0.1m}$ de 1.08 a 1.14). Entretanto, os resultados fornecem algumas características interessantes sobre a influência da profundidade U do reforço. As curvas RCS_{ref} *versus* U/B mostram que existe uma posição ideal de inclusão e uma profundidade máxima a partir da qual nenhuma influência é observada. Para a sapata corrida, a profundidade ideal foi em torno de $0.35B$ e a profundidade máxima igual $0.75B$. A profundidade ideal no caso da sapata circular foi de $0.1B$ e a profundidade máxima aproximadamente igual a $0.5B$.

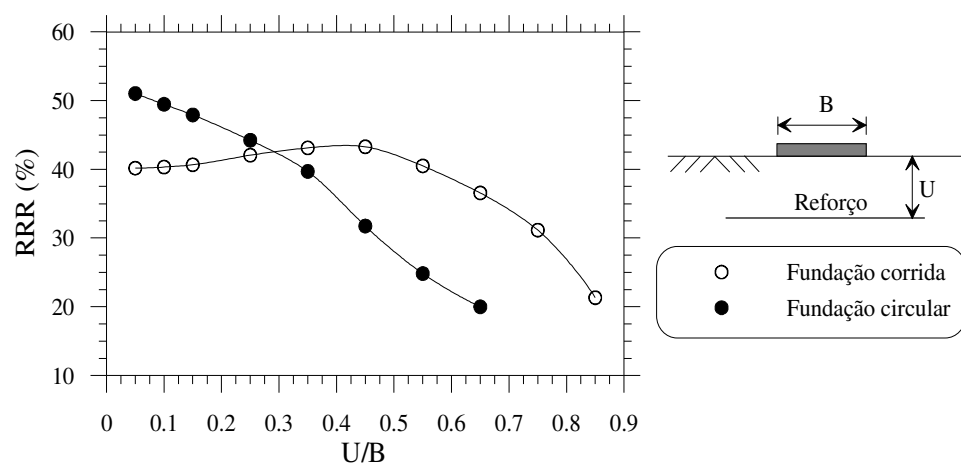


Figura 6.8 – Influência da posição do reforço na redução dos recalques

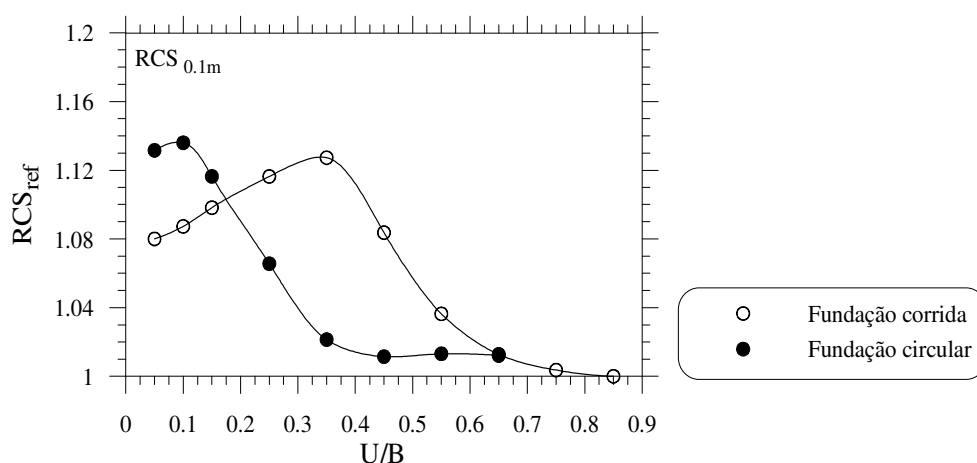


Figura 6.9 – Influência da posição do reforço na capacidade de carga

A Figura 6.10 apresenta os campos de deslocamento das fundações não reforçadas na ruptura e as posições ideais e máximas de disposição de uma camada de reforço. É interessante observar que as profundidades máximas efetivas estão aproximadamente no ponto mais baixo das superfícies potenciais de ruptura do solo. Por outro lado, as posições ideais devem estar na região de maior mobilização das tensões cisalhantes na interface solo-reforço.

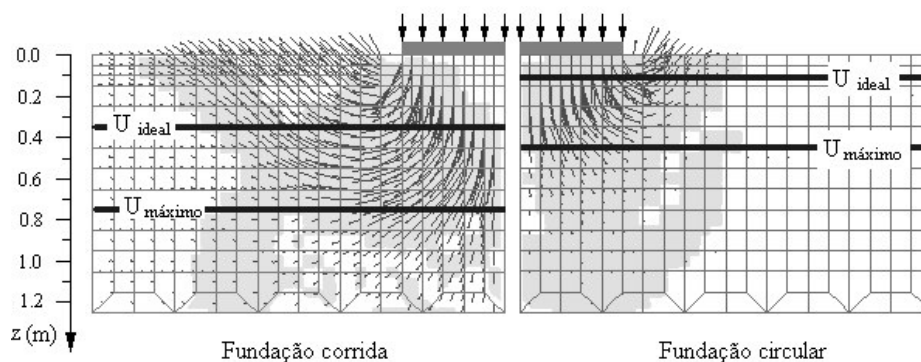


Figura 6.10 - Posições ideais e máximas de inclusão do reforço no solo

Quando um material resistente aos esforços de tração é colocado no interior do solo de fundação, o mecanismo de reforço é o aumento do confinamento no entorno do elemento de inclusão. O aumento do confinamento lateral é induzido através da transferência das tensões cisalhantes do solo para o reforço. Para que o mecanismo inicie é necessário que o solo comece a se deformar. Um fato interessante encontrado nas análises realizadas é que a influência do reforço começa, justamente, quando o solo se deforma plasticamente, como pode ser observado na Figura 6.11.

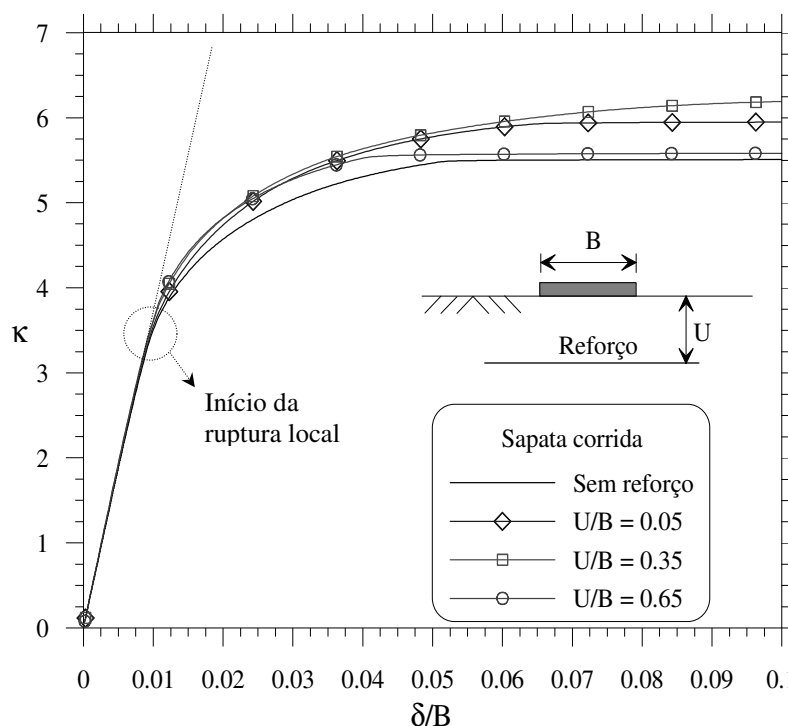


Figura 6.11 – Curva κ versus δ – Sapata corrida – 1 camada de reforço

A Figura 6.12 mostra o campo de deslocamento horizontal de duas fundações corridas, uma reforçada ($U/B = 0.25$) e outra sem reforço. Para os dois casos, os valores de deslocamento horizontal foram obtidos para uma mesma carga vertical, igual à carga de ruptura do solo não reforçado ($\kappa = 5.42$). O aumento do confinamento lateral conferido pelo reforço pode ser observado claramente.

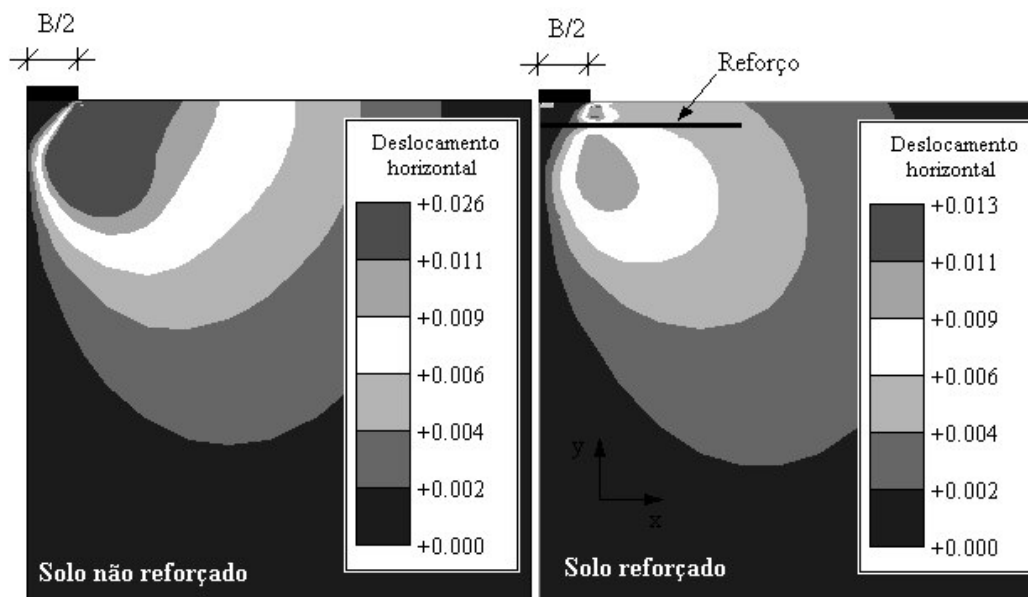


Figura 6.12 – Isofaixas de deslocamento horizontal – Fundação corrida

6.4. INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE CAMADAS DE REFORÇO

Neste item, será avaliada a influência do número de camadas N de reforço no aumento da capacidade de carga e na redução dos recalques de uma fundação superficial. A geometria básica para a condição de várias camadas foi: $B = 1\text{m}$, $U = 0.05B$, $H = 0.1B$ e $b = 4B$. O recalque da fundação, utilizado como referência para o cálculo de RCS_{ref} , foi de 0.1m .

A Figura 6.13 apresenta a curva RCS_{ref} versus N para as duas fundações, corrida e circular. Pode-se observar que, com o aumento do número de camadas de reforço, a capacidade de carga do solo também aumenta. As reduções nos recalques relacionadas ao número de camadas de reforço podem ser vistas na Figura 6.14. Um aumento na RRR pode ser observado quando o número de camadas de reforço aumenta.

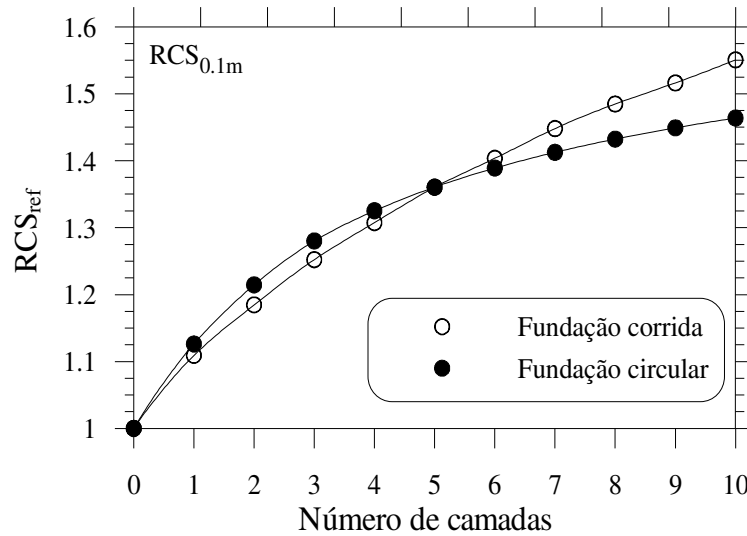


Figura 6.13 – Influência do número de camadas de reforço na capacidade de carga

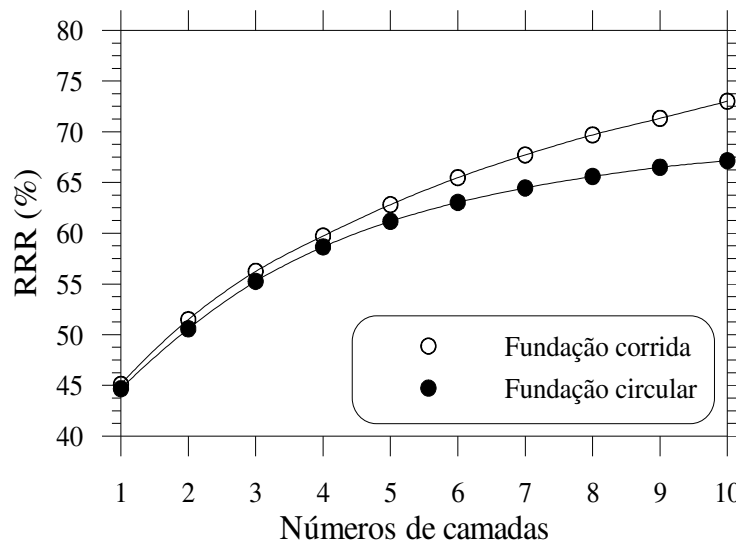


Figura 6.14 – Influência do número de camadas de reforço na redução dos recalques

Resultados, como esses, são interessantes para a avaliação do custo benefício associado ao número de camadas de reforço. Analisando o caso da sapata circular, por exemplo, a capacidade de carga aumentou 36% com a utilização de 5 camadas de reforço e, com 10 camadas, o aumento foi de 46%. Analisando a melhoria nos recalque, também para a sapata circular, 5 camadas de reforço reduzem os recalques em 61%, enquanto 10 camadas promovem uma redução de 67%. Ao dobrar o número de camadas, ou seja, de 5 para 10

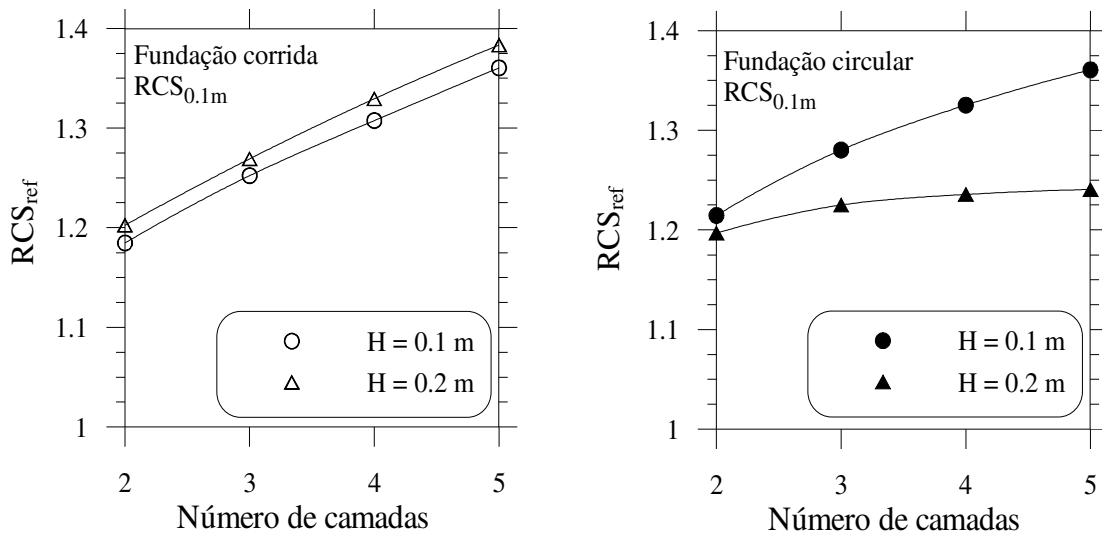
camadas de reforço, o benefício foi muito pequeno, houve um acréscimo de apenas 10% no aumento da capacidade de carga e de 6% na redução dos recalques.

6.5. INFLUÊNCIA DO ESPAÇAMENTO ENTRE AS CAMADAS DE REFORÇO

A influência do espaçamento H entre camadas de reforço será estudada neste item. Nas análises, o número de camadas variou de 2 a 5, sendo a primeira localizada a uma profundidade U igual a $0.05B$. As propriedades e dimensões do reforço e as dimensões das fundações foram as mesmas utilizadas nas análises anteriores.

A Figura 6.15 apresenta as curvas RCS_{ref} *versus* N das análises, nas quais, a relação H/B assumiu os valores de 0.1 e 0.2. O recalque da fundação, utilizado como referência para o cálculo de RCS_{ref} , foi de 0.1m. Pode-se observar que o valor do espaçamento H entre as camadas de reforço teve pouca influência no aumento da capacidade de carga da fundação corrida, entretanto, a melhor configuração para o caso da sapata circular foi com o espaçamento de $0.1B$

A Figura 6.16 mostra o campo de deslocamento horizontal para os casos de fundação circular. Na letra a, tem-se uma fundação sem reforço, na letra b, uma fundação reforçada com 5 camadas de reforço espaçadas de $0.2B$ e na letra c, uma fundação com 5 camadas espaçadas de $0.1B$. Os resultados apresentados para as três configurações de fundação foram obtidos no instante em que o recalque foi igual a $0.05m$ ($5\%B$), correspondente ao recalque na ruptura da fundação sem reforço. Pode-se observar, que um maior confinamento lateral é obtido com H igual a $0.1B$, o que pode ser uma explicação para os resultados mostrados na Figura 6.15.



a) RCSref – Fundação corrida b) RCSref – Fundação circular

Figura 6.15 – Influência do espaçamento H entre camadas na capacidade de carga

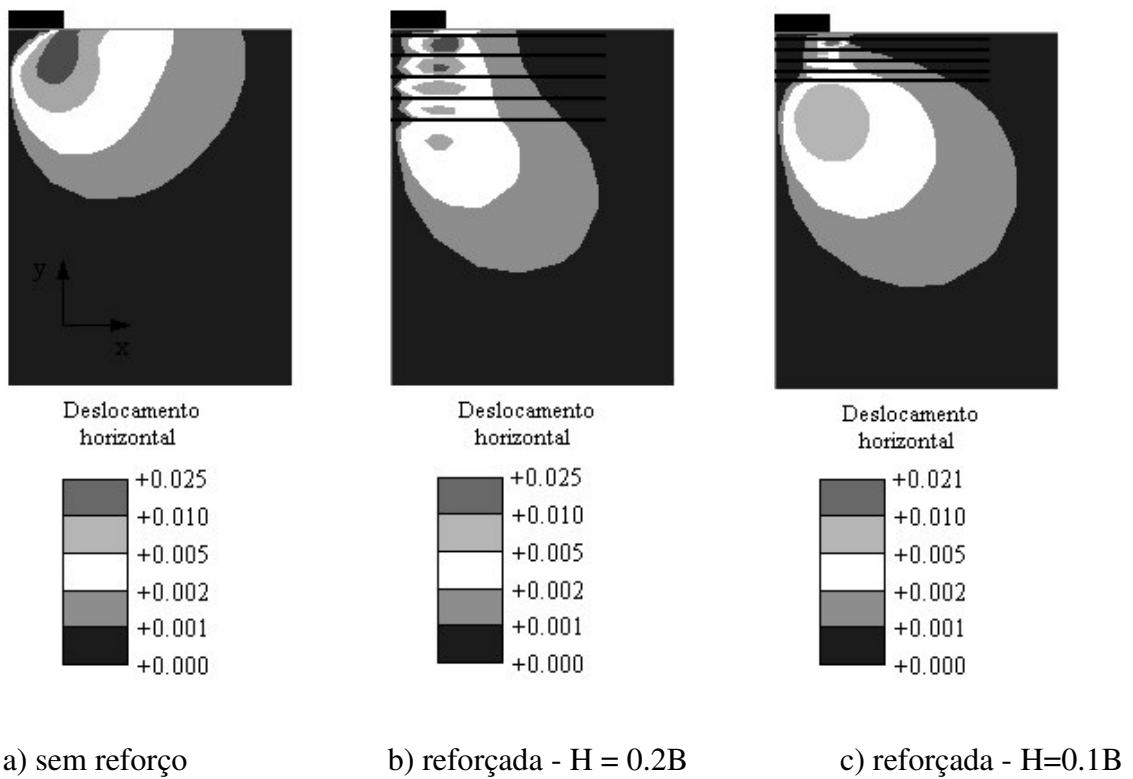


Figura 6.16 - Isofaixas de deslocamento horizontal – Fundação circular

6.6. INFLUÊNCIA DA POSIÇÃO DA PRIMEIRA CAMADA DE REFORÇO.

Neste item, serão apresentados os resultados das análises conduzidas para investigar o efeito da posição da primeira camada de reforço. Em todas as análises, foram utilizadas 5 camadas de reforço, espaçadas de H igual a $0.1B$. As propriedades e dimensões do reforço e as dimensões das fundações foram mantidas constantes e iguais às utilizadas nas análises anteriores. O recalque da fundação, utilizado como referência para o cálculo de RCS_{ref} , foi de $0.1m$.

A Figura 6.17 apresenta os resultados das análises das fundações corrida e circular. O aumento na capacidade de carga da fundação, expresso pela variável RCS_{ref} , é o mesmo para os dois tipos de fundação em estudo quando a profundidade U foi igual a $0.05B$.

As curvas RCS_{ref} *versus* U/B podem ser divididas em três zonas principais, separadas pelos valores de $(U/B)_{máx}$ e $(U/B)_{crít}$. A zona 1 determina os valores adequados para profundidade da primeira camada U . A zona 2 é delimitada pelos valores de $(U/B)_{crít}$ e $(U/B)_{máx}$ e é caracterizada pelo decréscimo acentuado dos valores de RCS_{ref} com o aumento da profundidade U . Para U/B maior que $(U/B)_{máx}$, inicia-se a zona 3, na qual nenhum aumento significativo ocorre na capacidade de carga.

Os valores característicos $(U/B)_{crít}$ e $(U/B)_{máx}$ para a fundação corrida foram 0.25 e 0.45 , e para a sapata circular são 0.05 e 0.25 , respectivamente.

Para os casos situados na zona 3, a superfície de ruptura do solo de fundação é completamente localizada acima da primeira camada de reforço. A região reforçada atua como uma base rugosa semi-rígida, como pode ser visto na Figura 6.18.

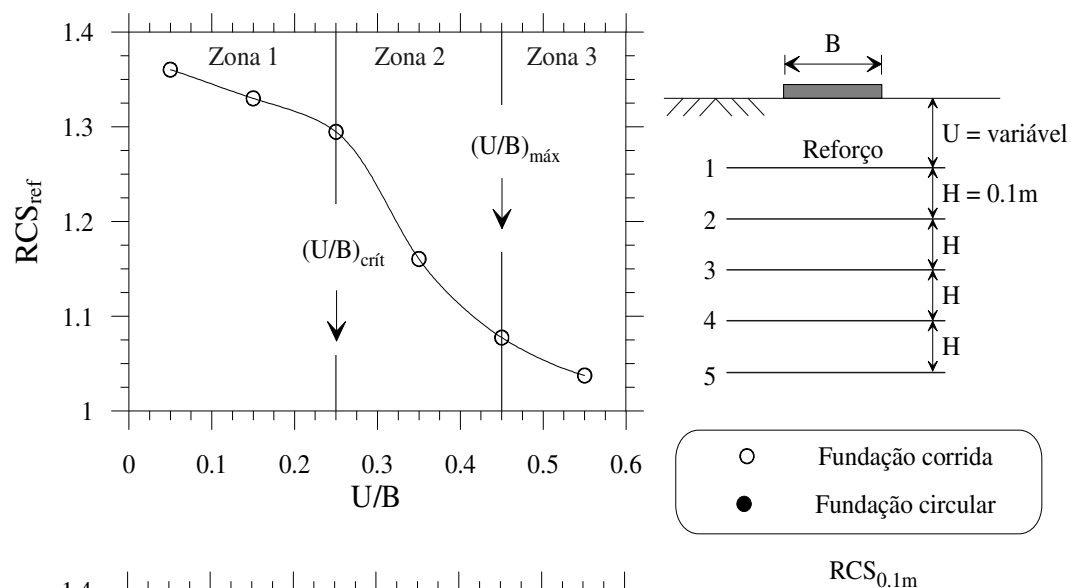


Figura 6.17- Influência da posição da primeira camada de reforço na capacidade de carga

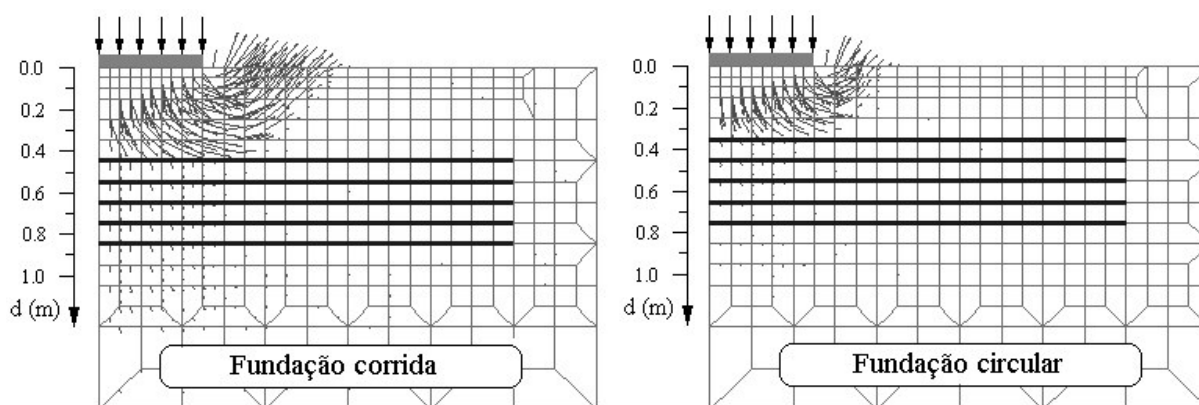


Figura 6.18 – Ruptura do solo - U/B maior que $(U/B)_{m\acute{a}x}$

6.7. INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DO REFORÇO

A Figuras 6.19 mostra a influência da rigidez do reforço na capacidade de carga do solo reforçado. O solo de fundação foi reforçado com 5 camadas de reforço com espaçamento H de $0.1B$ e a primeira camada localizada a uma profundidade U de $0.15B$. A largura (ou diâmetro) do reforço foi de $4m$. As dimensões e propriedades das fundações foram as mesmas das análises anteriores. Os valores de RCS_{ref} foram obtidos para vários valores de recalque das fundações em solo reforçado, para avaliar o aumento da capacidade de carga da fundação em função do nível de deformação do solo.

Para pequenos valores de recalque, reforços mais rígidos como o de $2500kN/m$ são mais efetivos na melhoria da capacidade de carga. Entretanto, pode-se observar (mais claramente no caso da fundação circular) que reforços menos rígidos, como o de $500kN/m$ possui uma eficiência próxima à do reforço com rigidez $2500kN/m$ quando o recalque foi próximo do valor de ruptura.

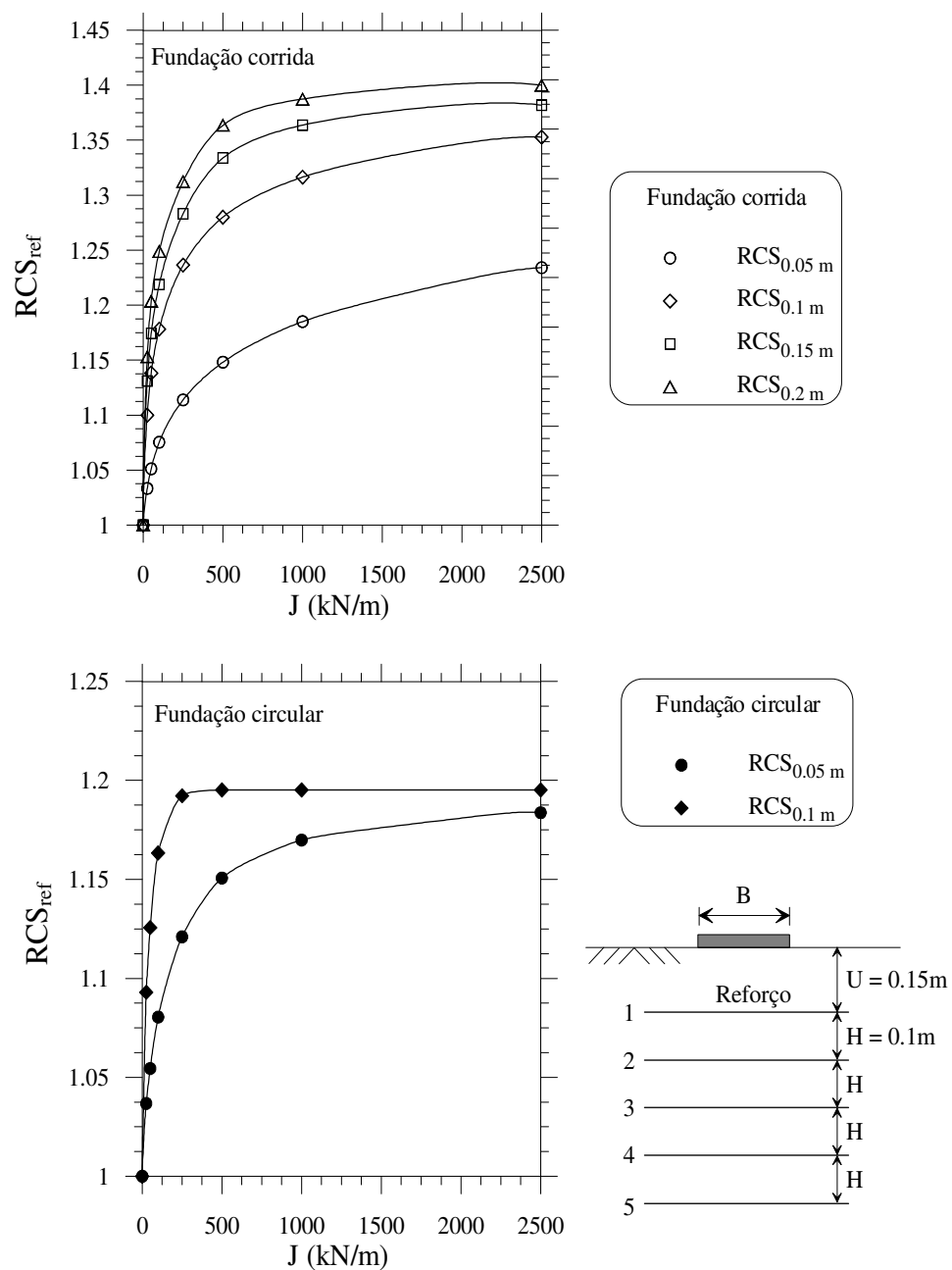


Figura 6.19 – Influência da rigidez do reforço na capacidade de carga

Capítulo 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

As estruturas de solo reforçado são comumente analisadas através de metodologias fundamentadas no método de equilíbrio limite e em formulações empíricas. Em geral, essas metodologias não levam em consideração a trajetória de deformação, são limitadas a condições de geometria, de carregamento e de contorno simplificadas e limitadas a tipos específicos de solo e de reforço.

Análises paramétricas utilizando ferramentas numéricas mostram-se mais adequadas sobretudo quando se deseja modelar geometrias mais complexas e estudar a influência da variação das propriedades dos componentes do sistema reforçado (solo, reforço e interface solo-reforço).

A formulação em deslocamento do MEF para análises de ESR foi apresentada e uma representação discreta na qual diferentes elementos finitos são adotados para representar o solo, o reforço e a interface solo-reforço foi considerada. As principais características requeridas para uma análise não linear física via MEF, tais como, esquemas de solução de equações não lineares em nível global e esquemas de integração de tensão em nível local, também foram apresentadas.

A verificação das implementações computacionais foi realizada através da comparação dos resultados do presente trabalho com soluções analíticas ou semi-analíticas e com resultados numéricos de outros autores.

Por fim, análises paramétricas de fundações em solo puramente coesivo reforçado foram conduzidas com intuito de auxiliar a verificação e/ou a criação de metodologias de dimensionamento para este tipo de obra geotécnica, em trabalhos futuros.

7.1. CONCLUSÕES

7.1.1. Conclusões acerca das implementações

a) Implementações relacionadas ao solo

As modificações nos Modelos Mohr-Coulomb e Drucker-Prager (remoção das singularidades) foram importantes para o bom desempenho dos processos de solução a nível global e de integração explícita de tensão a nível local.

Observou-se que para o bom desempenho do algoritmo de solução não-linear do tipo Newton-Raphson modificado, a implementação do algoritmo de integração de tensão foi fundamental.

A verificação da implementação do Modelo constitutivo Drucker-Prager modificado foi realizada através da simulação de ensaios triaxiais axissimétricos com uma idealização bilinear. Os resultados mostram que a condição de equilíbrio, a condição de consistência e a lei de fluxo são todos atendidos.

As implementações do modelo constitutivo Mohr-Coulomb modificado e do algoritmo de integração explícita de tensões Euler modificado foram verificadas através do estudo da capacidade de carga de fundações superficiais. Os resultados obtidos no presente trabalho estão em conformidade com os fornecidos pela literatura técnica.

b) Implementações relacionadas ao elemento de reforço

Os elementos de reforço R2 e R3 foram verificados através de soluções analíticas (baseadas na teoria da elasticidade) para casos de distribuição uniforme e não linear de tensões ao longo do elemento de reforço.

Na análise linear de fundação em solo reforçado, observou-se que a mobilização de tensões cisalhantes ao longo da interface solo-reforço é não uniforme e mais efetiva quando o reforço é colocado a pequenas profundidades. Observou-se também que quanto mais rígido o reforço, maior será a mobilização de tensões cisalhantes ao longo do seu comprimento. No entanto, existe um valor máximo a partir do qual um aumento na rigidez não é acompanhado de um aumento significativo na mobilização de tensões cisalhantes. Esse é um fato interessante a ser avaliado quando do dimensionamento de fundações em solos reforçados. Os

resultados numéricos foram comparados à solução analítica proposta por Pitchumani e Madhav (1999), e mostram que a compatibilidade entre o elemento unidimensional R3 (reforço) e o elemento plano Q8 (solo) foi obtida.

c) Implementações relacionadas à interface

As implementações do modelo constitutivo de Coulomb para a interface e do algoritmo de integração de tensão para esse elemento foram verificadas através da comparação com soluções analíticas e soluções numéricas de outros autores.

O algoritmo de integração foi capaz de reproduzir as trajetórias de carregamento, descarregamento e recarregamento impostas ao elemento de interface.

Embora possam apresentar certas dificuldades numéricas, os elementos de interface de espessura nula são bastante utilizados nas análises de problemas geotécnicos. Oscilações nos valores das tensões cisalhantes e problemas de convergência no processo de solução podem ser encontrados quando o valor da rigidez cisalhante é elevado. Day e Potts (1994), Villard (1996) e Pereira (2003) investigaram os problemas relacionados com estas oscilações e perceberam que valores muito elevados da rigidez cisalhante podem conduzir ao mal condicionamento da matriz de rigidez. Marques et al. (2003) atribuem ao esquema de integração numérica os problemas relacionados às oscilações das tensões e sugerem a utilização da quadratura de Gauss-Lobatto. Através dos resultados encontrados neste trabalho foi possível concluir que quando da utilização da quadratura de Gauss-Legendre, os problemas associados ao elevado valor da rigidez cisalhante podem ser contornados fazendo-se uma adequada discretização da malha de elementos finitos. Quanto mais refinada a malha, menor foi a oscilação das tensões cisalhantes. Os resultados mostraram também que a quadratura de Gauss-Lobatto é a melhor alternativa para a integração numérica dos elementos de interface da família do GTB. A utilização desse processo de integração numérica permitiu a utilização de elevados valores de rigidez cisalhante, sem a necessidade de um elevado refinamento da malha de elementos finitos.

7.1.2. Conclusões acerca das análises de fundações em solo puramente coesivo reforçado

Análises paramétricas de fundações superficiais (corrida e circular) dispostas sobre solo puramente coesivo reforçado foram conduzidas de forma a entender melhor o mecanismo de reforço nesse tipo de obra geotécnica. As fundações foram consideradas rígidas, rugosas e sem embutimento. O solo foi modelado sem peso próprio. Os resultados para as diversas configurações de reforço estudadas foram apresentados de forma a esclarecer o aumento na capacidade de carga e a redução dos recalques associados à inclusão de elementos de reforço no solo. Deve-se mencionar que as conclusões são relativas a um solo puramente coesivo e a partir da hipótese de que não há deslocamento relativo entre o solo e o reforço (interface rígida).

a) Influência da profundidade U de inclusão de uma camada de reforço

Os resultados mostraram que a utilização de apenas uma camada de reforço não provê ganhos muito significativos na capacidade de carga que ficaram em torno de 8 a 14%. Através das curvas RCS_{ref} versus U/B foi observado que existe uma profundidade ideal de inclusão e outra máxima, a partir da qual, nenhuma influência do reforço é observada. Para a sapata corrida, a profundidade ideal foi em torno de $0.35B$ e a profundidade máxima igual a $0.75B$. A profundidade ideal no caso da sapata circular foi de $0.1B$ e a profundidade máxima aproximadamente $0.5B$.

Os resultados também mostraram que a redução dos recalques ocorre para qualquer profundidade de inclusão, entretanto, uma região ideal de inclusão do reforço pode ser definida. Para a sapata corrida essa região ideal está entre $0.05B$ e $0.55B$ de profundidade onde se verifica uma redução dos recalques em torno de 40%. Para a sapata circular essa região está entre $0.05B$ e $0.35B$ de profundidade na qual a redução dos recalques ficou entre 40 e 50%.

O mecanismo de reforço observado nas análises foi o aumento do confinamento lateral do solo no entorno do elemento de reforço. Um fato interessante encontrado nas análises é que a influência do reforço se inicia quando o solo começa a se deformar plasticamente.

b) Influência do número de camadas

Os resultados mostraram que o aumento do número de camadas de reforço é acompanhado tanto do aumento da capacidade de carga quanto da melhoria na redução dos recalques. Entretanto, uma avaliação do custo benefício deve ser feita sobre resultados como estes.

c) Influência do espaçamento H entre camadas de reforço

Para avaliar a influência do espaçamento H foram utilizadas 5 camadas de reforço sendo a primeira localizada a uma profundidade U igual a 0.05B. Foram conduzidas análises para valores de espaçamento H iguais 0.1B e 0.2B. Para os valores de espaçamento H adotados, pouca influência foi observada no aumento da capacidade de carga da sapata corrida, entretanto, a configuração que fornece maior aumento na capacidade de carga da sapata circular foi com H igual a 0.1B.

d) Influência da posição da primeira camada

Nas análises conduzidas, o número de camadas de reforço foi igual a 5, espaçadas de H igual 0.1B. Os resultados foram apresentados através das curvas RCS_{ref} versus U/B , nas quais foram observadas três regiões características (zonas 1, 2 e 3). A zona 1 determina os valores adequados para profundidade U da primeira camada. A zona 2 é delimitada pelos valores de $(U/B)_{crit}$ e $(U/B)_{max}$, e é caracterizada pelo decréscimo acentuado dos valores de RCS_{ref} com o aumento de U. Para U/B maior que $(U/B)_{max}$, inicia-se a zona 3, na qual nenhuma influência significativa ocorre na capacidade de carga. Os valores característicos $(U/B)_{max}$ e $(U/B)_{crit}$ para a fundação corrida foram 0.25 e 0.45, e para a sapata circular são 0.05 e 0.25, respectivamente.

e) Influência da rigidez do reforço

Os valores de RCS_{ref} foram obtidos para vários valores de recalque das fundações em solo reforçado, no intuito de se avaliar o aumento da capacidade de carga da fundação em função do nível de deformação do solo. Para pequenos valores de recalque, reforços mais rígidos como o de 2500kN/m são mais efetivos no aumento da capacidade de carga. Entretanto, quando o recalque foi próximo do valor de ruptura reforços menos rígidos, como o de 500kN/m possui uma eficiência próxima à do reforço com rigidez 2500kN/m.

7.2. SUGESTÕES

Para os trabalhos futuros sugere-se:

A implementação de novos modelos constitutivos e elementos de interface, incluindo restrições de contato;

A implementação de elementos de reforço e interface para análises com acoplamento de fluxo e deformação e para a condução de análises tridimensionais.

Implementações computacionais que levem em consideração a não linearidade geométrica;

A continuidade das análises paramétricas de fundações em solos reforçados ampliando-se o número de variáveis envolvidas e considerando-se outros tipos de solo, e sugerir a partir dessas análises uma metodologia de projeto de dimensionamento desse tipo de obra geotécnica;

A realização de análises paramétricas de outras aplicações de reforço de solo, tais como, taludes e muros reforçados e aterros sobre solos reforçados.

Implementação de uma interface gráfica que facilite a utilização do programa ANLOG.

Referências Bibliográficas

Abbo, A. J. & Sloan, S. W. 1995, A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion. *Computers & Structures*, vol 54, no 3, pp427-441.

Abbo, A. J. e Sloan, S. W. (1996), An automatic load stepping algorithm with error control. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol 39, pp. 1737-1759.

Azevedo, R.F.; Zornberg, J. G. e Nogueira, C.L. (1992). Utilização do Método dos Elementos Finitos no Cálculo de Estruturas de Solos Reforçados. *Seminário sobre Aplicação de Geossintéticos em Geotecnia – GEOSSINTÉTICOS'92*, p.263-275, UNB, Brasília.

Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall v1.

Bathe, K. J. e Cimento, A. P. (1980) – Some practical procedure for the solution of nonlinear finite element equations – *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22, pp 59-85.

Bathurst, R. J. e Knight, M. A. (1998). Analysis of geocell reinforced-soil cover over large Span conduits. *Computers and Geotechnics*, v.22,nº3/4, p.205-219.

Bauer, G. E. e Mowafy Y. M. (1985), A Non-linear Finite Element Analysis of Reinforced Embankments Under External Loadings, *Proc. Of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Nagoya, 905-918.

Berg, R.R. (2002), Soil stabilisation/base reinforcement, *The IGS Mini Lectures*.

Bergado, D. T; Chai, J. C. e Miura, N. (1995). FE analysis of grid reinforced embankment system on soft Bangkok clay. *Computers and Geotechnics* v.17, p.447-471.

Bergado, D.T.; Long, P. V. e Murthy, B. R. S. (2002), A case study of geotextile-reinforced embankment on soft ground, *Geotextiles and Geomembranes* 20, 343-365.

Bergado, D.T.; Youwai, S. e Voottipruex, P. (2001) “Interaction of nonwoven needle-punched geotextiles under axisymmetric loading conditions”, *Geotextiles and Geomembranes* 19, 299-328.

Boushehrian, J.H. e Hataf, N. (2002) “Experimental and numerical investigation of the bearing capacity of model circular and ring footings on reinforced sand”, *Geotextiles and Geomembranes* 21, 241-256.

Brocklehurst, C. J., 1993. *Finite element studies of reinforced and unreinforced two-layer soil system*. PhD. Thesis, University of Oxford.

Burd, H.J. and Houlsby, G.T. (1989), “Numerical Modelling of Reinforced Unpaved Roads”. Third International Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Niagara Falls, Maio 8-11, 699-706.

Castro, D. C. (1999). Ensaio de arrancamento de geogrelhas no campo e no laboratório. Dissertação de Mestrado. PUC/Rio, Rio de Janeiro, RJ, 142p.

Chai, J. C. e Bergado, D. T. (1993), “ Some technics for finite element analysis of embankments on soft ground”, Canadian Geotechnical Journal 30, 710-719.

Chalaturnyk, R. J.; Scott, D. H.; Chan, K. e Richards, E. A. (1990). Stress and Deformations in a Reinforced Soil Slope. Canadian Geotechnical Journal, v.27, p.224-232.

Chang, J. C.; Hannom, J. B. e Forsyth, R. A. (1977). Pullout resistance and interaction of earthwork reinforcement and soil. Washington: [s.n.], p.1-7. (Transport Research Record, 640).

Chen, T.; Chen, R. e Lin, S. (2000) “A nonlinear homogenized model applicable to reinforced soil analysis”, Geotextiles and Geomembranes 18, 349-366.

Cook, R. D.; Malkus, D. S. e Plesha, M. E. (1989). Concepts and Applications of Finite Elements Analysis. John Wiley e Sons, Third Edition, University of Wisconsin, Madison.

Costa, S. S. e Nogueira, C. L. (1998). Modelagem Numérica de Estruturas de Solos Reforçados. Relatório Final PIP 1997, 83p., Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas/UFOP, Ouro Preto.

Crisfield, M (1981). A fast incremental/iterative solution procedure than handles ‘snap-through’. Computers and Structures, A13, p.55-62.

Day, R. A. e Potts, D. M. (1994). Zero thickness interface elements – numerical stability and application. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v.18, p.689-708.

Desai, C.S. e Siriwardane, H.J. (1984) Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials. Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Duncan, M.J. (1980). Hyperbolic stress-strain relationships - Proceedings of the Workshop on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering, pp443-460, New York.

Duncan, M.J. e Chang, C.Y. (1970). Nonlinear analysis of stress and strain in soils. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division - ASCE, SM5, p 1629 - 1653.

Drucker, D.C., and W. Prager,(1952). "Soil Mechanics and Plastic Analysis in Limit Design," Quarterly Applied Mathematics, Vol. 10, 1952.

Goodman, R. E.; Taylor, R. L. e Brekke, T. L. (1968). A model for the mechanics of Jointed Rock. Journal soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, v. 94, SM3, p. 637 - 659.

Helwany, S. M. B.; Reardon, G. e Wu, J. T. H. (1999) "Effects of backfill on the performance of GRS retaining walls", Geotextiles and Geomembranes 17, 1-16.

Hird, C.C.; Pyrah, I.C. e Russell, D. (1990), "Finite Element Analysis of the Collapse of Reinforced Embankments on Soft Ground", Geotechnique 40 (4), 633-640.

Hird, C. C. e Russell, D. (1990). A benchmark for soil-structure interface elements. Computers and Geotechnics, 10(2), p.139-147.

Ho, S. K. e Rowe, R. K. (1997) " Effect of Geometry on Behaviour of reinforced soil Walls", Geotextiles and Geomembranes 14, 521-541.

Houlsby, G.T.(1991) How the dilatancy of soils affects their behaviour, Proc. X Euro. Conf. Soil Mech. Found. Engng., Firenze 1991, Vol. IV, 1189-1202.

Huesker, Engenharia com Geossintéticos. Solo reforçado (catálogo).Prof. Ennio Marques Palmeira

Ingold, T. S. e Miller, K. S. (1988). Geotextiles Handbook. Thomas Telford, London.

Jewell, R.A. (1988), "The mechanisms of reinforced embankments on soft soil". Geotextiles & Geomembranes, vol.7, pp. 237-273.

Karpurapu, R. e Bathurst, R. J. (1992). Analysis of geosynthetic reinforced soil wall by FEM. NUMOG, v.2, p.861-870, Swansea.

Karpurapu, R. e Bathurst, R. J. (1995). Behaviour of geosynthetic reinforced soil walls using the Finite Element Method. Computers and Geotechnics, v.17, p.279-299.

Ketchart, K. e Wu, J.T.H. (2001) "Performance Test for Geosynthetic-Reinforced Soil including Effects of Preloading," Federal Highway Administration Report FHWA-RD-01-018, Turner-Fairbank Highway Research Center, 282 p.

Lade, P. V. (1977). Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. International Journal of Solids and Structure, v. 13, N.GM8, p. 1019 - 1035.

Lade, P.V. (1979) – Stress-strain theory for normally consolidated clay- Proc. of the Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, 4, pp 1325-1337.

- Lade, P.V. e Kim, M.K. (1988a) – Single hardening constitutive model for frictional materials – I. Plastic potential function – Computers and Geomechanics, 5, pp 307-324.
- Lade, P.V. e Kim, M.K. (1988b) – Single hardening constitutive model for frictional materials – II. Yield criterion and plastic work contours – Computers and Geomechanics, 6, pp 13-29.
- Lade, P.V. e Kim, M.K. (1988c) – Single hardening constitutive model for frictional materials – III. Comparisons with experimental data – Computers and Geomechanics, 6, pp 31-47.
- Lemos, P. A. (2002). Estudo Numérico pela Análise Limite de Problemas Geotécnicos em Solos Reforçados. Dissertação de Mestrado, UFOP.
- Manoharan, N. e Dasgupta, S.P. (1995) – Bearing capacity of surface footings by finite element– Computers and Structures, 4, pp 563-586.
- Marques, J.M.M.C., Pereira, D. A. B. e Lopes, M. L.(2003). “Pull-out testing of geosynthetics. Some numerical studies”, 4th International Workshop on Applications of Computational Mechanics in Geotechnical Engineering, 137-142, R.F. Azevedo et al (eds) (2003).
- Martins, C. C. (2000). Análise e Reavaliação de Estruturas em Solos Reforçados com Geotêxteis. Dissertação de Mestrado, 270p., UFOP, Ouro Preto, MG.
- Martins, M. A. D. (2001). Estruturas de Dados por Arestas para a Solução de Problemas de Plasticidade. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 247p.
- Mello, L.G.R. (2001). Estudo da Interação Solo-Geossintético em Taludes de Obras de Disposição de Resíduos. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM-085A/01, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 130 p.
- Nayak, G. C. e Zienkiewicz, O. C. (1972) – Elasto-plastic stress analysis: a generalization for various constitutive laws including strain softening- International Journal For Numerical Methods In Engineering, 5, pp 113-135.
- Ng, P. C. F.; Pyrah, I. C. e Anderson, W. F. (1997). Assessment of Three Interface Elements and Modifications of the Interface Element in CRISP90. Computers and Geotechnics, v.21, p.315-339.
- Nogueira, C. L. (1998). Análise Não Linear de Escavações e Aterros. Tese de Doutorado. PUC/Rio, Rio de Janeiro, RJ, 265p.
- Oliveira, R.R.V. (2004) Modelagem de Gabiões como Elementos de Apoio de Pontes - Relatório de pesquisa - Iniciação científica.DECIV/UFOP.

Oliveira, R.R.V.; Nogueira, C.L.; Araújo, L.G. e Faria, P.O. (2005), “Análise elastoplástica de problemas de fundação em solos reforçados”, INFOGEO2005 - 5º Simpósio Brasileiro de Aplicações de Informática em Geotecnia, Belo Horizonte, 7 p.

Ortiz, M., Popov, E. P. (1985) “Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations”, International Journal of Numerical Methods in Engineering, v. 21, n. 9, pp. 1561-1576.

Otani, J; Ochiai, H. e Yamamoto, K. (1998) “Bearing capacity análisis of reinforced foundations on cohesive soil”, Geotextiles and Geomembranes 16, 195-206.

Owen, D.R.J. e Hinton, E. (1980) - Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press, Swansea, U.K.

Pereira, A. R. (2003) Análise Não Linear Física de Estruturas de Solos Reforçados. Dissertação de mestrado. PROPEC/UFOP.

Pereira, A. R. e Nogueira, C. L. (1999). Modelagem Numérica de Estruturas de Solos Reforçados. Relatório Final, Programa Institucional de Iniciação Científica-PIBIC/CNPq, 22p.

Pereira, A. R. e Nogueira, C. L. (2000). Modelagem Numérica Não Linear de Estruturas de Solos Reforçados. Relatório Final, Programa Institucional de Iniciação Científica-PIBIC/CNPq, 45p.

Perkins, S.W. (2001), “Mechanistic-Empirical Modeling and Design Model Development of Geosynthetic Reinforced Flexible Pavements”, U.S. Department of Transportation, Federal Highway, 171p.

Pitchumani, N. K. & Madhav, M. R., (1999). Elastic settlements of circular footings on geosynthetic-reinforced soil. *Geosynthetics International*, vol 6, n. 2, pp. 145-155.

Potts, D. M. e Zdravković, L. (2001). Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Application, vol.2, Thomas Telford, 2001

Quaresma, M.G.D.A.L. (1992) Comportement et modélisation d'un remblai sur sols mous renforcé par géotextile. Tese de Doutorado, Université Joseph Fourier, Grenoble, França.

Ramm, E. (1982). The Ricks/Wempner approach – an extension of the displacement control method in non-linear analysis. Non-linear Computational Mechanics, ed. Hinton e outros, Pineridge Press, p.63-86, Swansea.

Raymond, G. e Ismail, I. (2003) “The effect of geogrid reinforcement on unbound aggregates”, Geotextiles and Geomembranes 21, 355-380.

Ribeiro, W.H (2005). Aplicações da análise limite numérica a problemas de estabilidade axissimétricos em geotecnia. Dissertação de Mestrado, UFOP.

Rocha, G. (2000), Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não-linear de estruturas, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.

Romstad, K. M.; Hermmann, L. R.; Shen, C. K. (1976). Integrated study of reinforced earth-I. Theoretical formulation. Journal of Geotechnical Engineering, v.102, n.GT5, p.457-471.

Rowe, R. K. e Soderman, K. L. (1987), “Stabilization of Very Soft Soils Using High Strength Geosynthetics: the Role of Finite Element Analyses”, Geotextiles and Geomembranes 6, 53-80.

Roscoe, K.H.; Schofield, A. N. e Wroth, C.P. (1958) – On the yielding of soils – Géotechnique 8 (1), pp 22-52.

Salgado, M. T. e Nogueira, C. L. (1998). Modelagem Numérica de Estruturas de Solos Reforçados. Relatório Final PIBIC 1997 83p., Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas/UFOP, Ouro Preto.

Sharma, J. S. e Bolton, M. D. (1996), “Finite element analysis of centrifuge tests on reinforced embankments on soft clay”, Computers and Geotechnics 19, 1-22.

Sheng, D. e Sloan, S. W. (2001), “Load stepping schemes for critical state models”, International Journal of Numerical Methods in Engineering, v50: pp. 67-93.

Sieira, A.C.C.F. (2003) Estudo Experimental dos Mecanismos de Interação Solo-Geogrelha. Tese de Doutorado. PUC/Rio, Rio de Janeiro, RJ, 160p.

Sloan, S. W.; Abbo, A. J. e Sheng, D. (2001) “Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control”, Engineering Computations, Vol. 18, No. 1/2, 2001, pp. 121-154.

Sloan, S. W. e Booker, J.R. (1986) “Removal of singularities in Tresca and Mohr-Coulomb yield criteria”, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 2, pp 173-179

Sloan, S. W., Sheng, D e Abbo, A. J.(2000). Accelerated initial stiffness schemes for elastoplasticity. International Journal of Numerical And Analytical Methods in Geomechanics, vol 24, pp. 579-599.

Terzaghi, K. (1943). Theoretical Soil Mechanics. Wiley.

Varadarajan, A.; Sharma, K. G. e Aly, M. A. A. (1999), “Finite Element Analysis of Reinforced Embankment Foundation”, Int. J. Anal. Meth. Geomech. 23, 103-114.

Vidal, D. M. e Palmeira, E. M (2001). Geossintéticos na Engenharia Civil (Curso Básico)

Villaça S. F. & Garcia, L. F. T., 2000. *Introdução à Teoria da Elasticidade*. COPPE/UFRJ

Villard, P. (1996). Modelling of Interface Problems by the Finite Element Method with Considerable Displacements. Computers and Geotechnics, v.19, n°1, p.23-45.

Yamamoto, K. e Otani, J. (2002) “Bearing capacity and failure mechanism of reinforced foundations based on rigid-plastic finite element formulation”, Geotextiles and Geomembranes 20, 367-393.

Yoo, C. (2001) “Laboratory investigation of bearing capacity behavior of strip footing on geogrid-reinforced sand slope”, Geotextiles and Geomembranes 19, 279-298.

Zambrana, C.E.C. (2005). Estudo e implementação numérica via MEF de elementos de interfaces – Relatório final PIBIC 2004-2005, 25p.

Zienkiewicz, O.C., C. Humpheson, and R.W. Lewis (1975) Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. Geotechnique, 25(4) 671-689.

Zornberg, J. G (1998). Aplicação de Geossintéticos em Geotecnia Ambiental. Ouro Preto MG.

Zornberg, J.G. (1989) Análise por elementos finitos do comportamento de escavações utilizando um modelo elasto-plástico – Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro.