



Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil



Mestrado em Construções Metálicas

Arthur Ribeiro de Alvarenga

Aspectos Importantes na Análise Avançada com Zona Plástica de Portais Planos de Aço

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Ouro Preto
2005

A473a

Alvarenga, Arthur Ribeiro de.

Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço [manuscrito]. / Arthur Ribeiro de Alvarenga. – 2005. xxvi, 303f.: il. color., graf. , tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Área de concentração: Estruturas metálicas.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Rede Temática em Construções Metálicas.

1. Engenharia de Estruturas - Teses. 2. Análise Inelástica (Engenharia).- Teses. 3. Análise estrutural (Engenharia) -Teses. 4. Aço – Análise I. Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Rede Temática em Construções Metálicas. II. Título.

CDU: 624.014

Catálogo: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Aspectos Importantes na Análise Avançada com Zona Plástica de Portais Planos de Aço

AUTOR: Arthur Ribeiro de Alvarenga

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas Metálicas.

Ouro Preto
2005

Seja simples,
a simplicidade vale ouro,
e como é difícil ser simples...

Dedico “este livro”

Àqueles que nos dão força para viver:

meu pai Celso de Alvarenga (in-memorian),
minha mãe Orquidea, meu filho Ártur Douglas,
meus familiares, minhas paixões e meus amigos;

sem esquecer é claro de preciosas fontes de luz:

Alcebíades Vasconcelos Filho, Gilson Queiroz,
Roberto Fontes e Ricardo Azoubel;

e daqueles que nos acompanham silentes:

todos amigos e colegas desse árduo mestrado,
não esquecendo outros mestres e funcionários.

APRESENTAÇÃO

Esta dissertação é a conclusão de um período de estudos, pesquisas, leituras, escritas, cálculos, programas de computador, planilhas, gráficos, desenhos, elaboração de textos, etc.; que preencheram a vida deste estudante nos últimos quatro anos.

A ambição de produzir cada linha a seguir encontrada motivou todas as noites sem sono, dias tão longos que emendavam, tantos papéis que a lixeira jamais ficou vazia, e enchia sacos de cinquenta litros...Tantas horas de computador que a conta de luz triplicou...Tantos cadernos escritos, em todas as páginas, que somaram 20 de 200 páginas, tanta bibliografia copiada e lida, que resultaram em mais de 600 folhas de artigos e mais de 3000 folhas de livros. Junto com isso, dois computadores foram refeitos, trocando-se os dois mouses, os dois whinchesters, uma placa mãe danificada e outra trocada... Uma unidade de força e um filtro de linha.

Mais de 2.5 MB de programas produzidos, testados e utilizados, mais de 270 MB de resultados produzidos e comparados, mais de 4000 horas de computação.

Com certeza, talvez, não fosse necessário tanta energia, nem os resultados aqui mostrados parecem ter exigido tanto, mas foram produzidos com muita inspiração e dedicação, porque não dizer amor.

Assim, deseja-se que o leitor receba esse material com muito carinho, pois foi pensando na sua leitura, que foi produzido. E espera-se que possa ser útil e eventualmente preencher uma lacuna de conhecimentos ou ajudar de alguma forma a obter uma outra visão sobre esse tema.

Os capítulos 1, 2 e 3 desta dissertação foram utilizados para gerar uma apostila de “*Métodos de Análise Estrutural*”, realizada pelo autor, a ser adotada na disciplina de Instabilidade Estrutural do Curso de Mestrado em Construções Metálicas do Deciv/EM/UFOP.

Na oportunidade, lembrar de todos que nos deram apoio, tanto na UFMG como na UFOP (colegas, professores e funcionários), por cada instante em que sem dúvida partilhamos muitas alegrias e muito sofrimento também, nestes quatro anos de uma “nova” vida universitária.

A todos o **MEU SINCERO** e **PROFUNDO MUITO OBRIGADO**, e tenham certeza que *vão encontrar um pedacinho de cada um, nas páginas que se seguem!*

RESUMO

Este trabalho procura mostrar os passos necessários para se realizar uma *análise avançada*. Inicialmente apresenta-se um *estado-da-arte* dos diversos métodos de análise estrutural hoje existentes, suas características, pesquisadores, vantagens e desvantagens, incluindo uma parte sobre dimensionamento, com extensa bibliografia.

A análise avançada é definida, no contexto da AS4100 (1990), como uma análise inelástica de segunda ordem muito precisa em que são incluídos os aspectos importantes (curvatura inicial, fora de prumo e tensões residuais), entre outros que podem ser atribuídos, e cumprindo severas exigências, de forma a se obter uma carga limite, tão precisa que não sejam necessárias outras verificações de resistência ou de estabilidade para a estrutura analisada naquele plano, conforme Chen e White (1993).

A formulação numérica aborda uma análise inelástica no plano, com o método da zona plástica, empregando a técnica das fatias (Lavall, 1996), definindo um EF no sistema Lagrangiano corrotacional atualizado com teoria de Bernoulli-Euler, e utilizando o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson padrão. Desenvolveu-se um processo de integração iterativa dos esforços normais, como uma melhoria que simula o vetor correção do método da rótula plástica refinada (Liew *et al.*, 1994).

Foi feita a implementação computacional que aplica a formulação citada e inclui os aspectos importantes, sendo apresentados alguns exemplos de validação que são: uma viga, dois casos de colunas e a seguir três portais. Dois desses exemplos são explorados na realização de uma análise avançada, fazendo-se um estudo paramétrico desses aspectos importantes (a forma da curvatura inicial, arranjos da curvatura inicial e do fora de prumo, isolados ou combinados, com e sem tensões residuais, etc).

Finalmente, após a discussão de vários resultados e dos estudos já indicados, são apresentados comentários gerais, limitações da pesquisa, indica-se um roteiro de como poderá ser realizada a análise avançada dentro de escritórios, e principalmente, considerando a gama de combinações das imperfeições iniciais que podem existir num problema, apresenta-se uma proposta de teorema que permite simplificar um pouco essa tarefa, na medida que as imperfeições da configuração inicial poderão ser estabelecidas a partir da deformada final de colapso, determinada previamente, por uma configuração inicial não necessariamente mais crítica.

ABSTRACT

(Main aspects of plastic zone's advanced analysis of in plane steel portals)

This work presents the necessary steps to make an advanced analysis of steel structures. First, it shows the state-of-art of some now-a-days existing methods of structural analysis, with attributes, researchers, good and bad sides, including some design tips and wide bibliography.

Advanced Analysis as stated by AS4100 (1990) is a very accurate second order inelastic analysis which deals with the called main aspects (member out-of-straightness, structure out-of-plumb and residual stress), among other attributes, and complies hard requirements, in such way to accurately define the limit load, so other strength and stability checks are avoided (White and Chen, 1993).

The numerical approach for in-plane inelastic analysis is plastic zone method, applying *slice technique* (Lavall, 1996). The Bernoulli-Euler's finite element is defined in an updated corrotacional Lagrange system, and the incremental-iterative process employs standard Newton-Raphson's strategy. The iterative axial force integration is shown first time; it works like correction vectors of refined plastic-hinge methods (Liew *et al.*, 1994).

The present formulation is implemented in a computer program with the main aspects included, and some worked examples for validation are presented: a beam, two columns and three portals. Two of them are employed for advanced analysis, and the main aspects are parametrically studied (like the initial bowing shape, out-of-straight and out-of-plumb combinations, single or both, including residual stress or not).

Finally, after the examples answers, discussion and pointed studies, some general recommendations are made, research limits, and a step-by-step procedure to make an advanced analysis for office are shown. The main point: considering the whole combination of initial imperfections that happens on a real problem, a proposition of a theorem is made that can simplify this job, as this combination can be defined using the final collapse displacement configuration, previously obtained by another not critical initial configuration.

SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
	Apresentação	IV
	Resumo	V
	Abstract	VI
	Sumário	VII
	Lista de Figuras	XI
	Lista de Tabelas	XV
	Lista de Símbolos e Abreviaturas	XVII
1	INTRODUÇÃO	01
1.1	Considerações Iniciais	02
1.2	Estudo dos Portais de Aço	02
1.3	Objetivo e Justificativas	05
1.4	Organização da Dissertação	07
1.5	Referências Bibliográficas	08
2	MÉTODOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL	09
2.1	Introdução	10
2.2	O Problema Estrutural	10
2.3	Tipos de Análise Estrutural	13
2.4	Análise Elástica de Primeira Ordem	17
2.4.1	Método Tradicional	19
2.4.2	Comportamento Deslocável e Indeslocável	25
2.4.3	Considerações Finais	27
2.5	Análise Elástica de Segunda Ordem	29
2.5.1	Determinação de Autovalor	30
2.5.2	Cargas Nocionais	31
2.5.3	Matriz de Rigidez Geométrica	34
2.5.4	Funções de Estabilidade	35
2.5.5	Considerações Finais	38
2.6	Análise Inelástica de Primeira Ordem	40
2.6.1	Método Rígido-Plástico.....	42
2.6.2	Elástico com Rótulas-Plásticas: ERP	45

Seção	Título	Pag.
2.6.3	Considerações Finais	49
2.7	Análise Inelástica de Segunda Ordem	50
2.7.1	ERP e Cargas Nocionais: ERP-CN	55
2.7.2	ERP com refinamentos: ERP-R e ERP-M	57
2.7.3	Método da Zona Plástica	60
2.7.4	Quase Rótula-Plástica	64
2.8	Referências Bibliográficas	65
3	ANÁLISE AVANÇADA	74
3.1	Introdução	75
3.2	Conceitos e Definição	75
3.3	Características e Exigências	79
3.3.1	Atributos de uma Análise Avançada	79
3.3.2	Requisitos para uma Análise Avançada	81
3.4	Aplicação da Análise Avançada nesta Dissertação	83
3.5	Aspectos Importantes Estudados nesta Dissertação	85
3.5.1	Curvatura Inicial	86
3.5.2	Fora de Prumo	88
3.5.3	Tensões Residuais	90
3.6	Referências Bibliográficas	95
4	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	99
4.1	Introdução	100
4.2	Elemento, Fibra e Fatia	100
4.3	Relação Constitutiva na Fibra	102
4.4	Relações no Elemento Finito	105
4.5	Sistema Lagrangiano Corrotacional	110
4.6	Matrizes de Rigidez	112
4.7	Propriedades Elasto-Plásticas	117
4.8	Esforços Corrotacionais	118
4.9	Solução do Problema Não-Linear	118
4.10	Integração Iterativa dos Esforços Normais	119
4.11	Referências Bibliográficas	123

Seção	Título	Pag.
5	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	125
5.1	Introdução.. .. .	126
5.2	Generalidades	126
5.3	Processo Incremental-Iterativo	129
5.4	Integração Iterativa dos Esforços Normais	132
5.5	Aspectos Importantes	133
5.6	Fluxograma Geral	137
5.7	Referências Bibliográficas	140
6	EXEMPLOS	141
6.1	Introdução	142
6.2	Viga bi-engastada de Liew (1992)	146
6.2.1	Sem Tensões Residuais	150
6.2.2	Com Tensões Residuais	153
6.3	Curva de Flambagem do AISC-LRFD (1993)	158
6.4	Coluna engastada-livre de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	163
6.4.1	Efeito da Malha	168
6.4.2	Curvatura Inicial (CI)	171
6.4.3	Fora de Prumo (FP)	174
6.4.4	Tensões Residuais (TR)	176
6.5	Portal de Kanchanalai (1977)	180
6.6	Portal de Vogel (1985)	186
6.7	Portal de Zhou <i>et al.</i> (1990)	193
6.7.1	Modelo Escolhido	199
6.7.2	Histórico do Carregamento	201
6.7.3	Curvatura Inicial (CI)	203
6.7.4	Fora de Prumo (FP)	204
6.7.5	Curvatura Inicial e Fora de Prumo (CI+FP)	206
6.7.6	Tensões Residuais (TR)	208
6.7.7	Configuração Inicial	209
6.8	Referências Bibliográficas	216

Seção	Título	Pag.
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	220
7.1	Introdução	221
7.2	Conclusões	221
7.2.1	Análise Avançada	221
7.2.2	Método da Zona Plástica	224
7.2.3	Técnica das Fatias	228
7.2.4	Aspectos Importantes	229
7.2.5	Conceito Estrutural	230
7.3	Aspectos Críticos	235
7.4	Continuação da Pesquisa	238
7.5	Referências Bibliográficas	240
	APÊNDICES	243
A	Matriz de Rigidez Elástica	244
B	Equações dos Ábacos de Julian e Lawrence (1959)	244
C	Teoremas da Plasticidade	245
D	Fórmula de Perry-Robertson	247
E	Diagramas de Tensão – Deformação	248
F	Fórmulas de Interpolação da Técnica das Fatias	248
G	Avaliação da MRE Aproximada	249
H	Tensões Residuais em I Soldados	250
I	Resultados do Portal de Vogel (1985)	253
J	Referências Bibliográficas	291
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLETAS	292

LISTA DE FIGURAS

Figura	Título	Pag.
2.1	Interação entre coluna e estrutura	11
2.2	Modelos de análise estrutural	13
2.3	Visão geral: métodos de análise	15
2.4	Comportamento elástico do material	18
2.5	Coefficientes de flambagem k	21
2.6	Ábacos de Julian e Lawrence (1959)	22
2.7	Efeitos de segunda ordem	26
2.8	Resultado da análise elástica de 1 ^a ordem	28
2.9	Aparecimento do efeito $P\Delta$	32
2.10	Conceito das cargas nocionais	32
2.11	Funções de estabilidade C (βL) e S (βL)	37
2.12	Deslocamentos na análise elástica de 2 ^a ordem	38
2.13	Resultado da análise elástica de 2 ^a ordem.....	39
2.14	Diagrama tensão-deformação	40
2.15	Formação de rótula plástica na seção	41
2.16	Colapso: formação de mecanismo	42
2.17	Viga bi-engastada – teoremas da plasticidade	43
2.18	Análise ERP da viga bi-engastada - 1 ^a RP	46
2.19	Análise ERP da viga bi-engastada - 2 ^a RP.....	47
2.20	Análise ERP de viga bi-engastada - 3 ^a RP	48
2.21	Resultado da análise inelástica de 1 ^a ordem	50
2.22	Superfície de plastificação	52
2.23	Deslocamentos no modelo ERP 2 ^a ordem	54
2.24	Modelo ERP 2 ^a ordem com cargas nocionais	56
2.25	Fator τ para modelo ERP refinado.....	57
2.26	Diagramas plásticos e seção montada	58
2.27	Comportamento dos modelos ERP refinados	59
2.28	Comportamento do material no método da zona plástica	60
2.29	Deslocamentos no modelo de zona plástica.....	61
2.30	Resultado da análise com zona plástica	64

Figura	Título	Pág.
3.1	Imperfeições geométricas	87
3.2	Imperfeições geométricas combinadas	89
3.3	Origem das tensões residuais	90
3.4	Diagramas lineares de tensões residuais	92
3.5	Diagramas parabólicos de tensões residuais	92
3.6	Tensões residuais de modelos alternativos	94
4.1	Modelagem da zona plástica	101
4.2	Configurações do referencial Lagrangiano atualizado	103
4.3	Comportamento da fibra e do material	104
4.4	Zonas plásticas na seção	107
4.5	Relação entre a fibra e o eixo	108
4.6	Sistema corrotacional	110
4.7	Sistema global e corrotacional	111
4.8	Solução do problema não-linear	119
4.9	Início da plastificação da fatia (fibra)	120
4.10	Formação de ZP em um nó do EF	121
5.1	Algoritmo da integração iterativa dos esforços normais	133
5.2	Imperfeições geométricas da(s) barra(s)	135
5.3	Avaliação das tensões residuais (TR) nas fatias	136
5.4	Tensões residuais de I soldados	137
5.5	Fluxograma Geral parte I	138
5.6	Fluxograma Geral parte II	139
6.1	Exemplos do capítulo 6	145
6.2	Problema da viga bi-engastada de Liew (1992)	146
6.3	Perfil adotado para viga bi-engastada	147
6.4	Modelagem das fatias em um quarto de seção do perfil I	149
6.5	Trajetórias de equilíbrio sem tensões residuais	151
6.6	Momentos nos pontos A-B-C, sem tensões residuais	152
6.7	Trajetórias de equilíbrio com tensões residuais	153
6.8	Região instável por modificação da configuração	154
6.9	Momentos nos pontos A-B-C, com tensões residuais	155
6.10	Diagrama de plasticidade Λ [%] na viga bi-engastada	157

Figura	Título	Pag.
6.11	Perfil adotado para as colunas	158
6.12	Curvas de flambagem para a coluna bi-rotulada	159
6.13	Diferenças em relação os valores do AISC LRFD (1993)	160
6.14	Colunas de perfis I soldados	162
6.15	Coluna engastada-livre de Hajjar et al.(1997)	163
6.16	Análises simples, sem tensões residuais	164
6.17	Trajetórias de equilíbrio da coluna engastada-livre	165
6.18	Efeito da curvatura inicial isolada	171
6.19	Coluna engastada-livre com outras CI	173
6.20	Efeito do fora de prumo isolado	174
6.21	Efeito do FP e CI sobre a coluna engastada-livre	175
6.22	Efeito das TR de Galambos e Ketter (1957)	176
6.23	Carga de flambagem $\lambda \times$ fator η	178
6.24	Estrutura do portal de Kanchanalai (1977)	180
6.25	Influência do fator β_M no portal de Kanchanalai	181
6.26	Influência do fator N/N_y no portal de Kanchanalai	182
6.27	Interação $M/M_p \times N/N_y$ no portal de Kanchanalai	184
6.28	Modelo estrutural do Portal de Vogel (1985)	186
6.29	Trajetórias de equilíbrio do portal de Vogel	189
6.30	Configuração de colapso no portal de Vogel	190
6.31	Áreas plastificadas Λ [%] nas colunas do portal de Vogel	192
6.32	Modelo estrutural do portal de Zhou et al. (1990)	193
6.33	Configurações de colapso dos portais de Zhou	196
6.34	Diagrama de interação do portal com bases engastadas de Zhou	197
6.35	Diagrama de interação do portal com bases rotuladas de Zhou	198
6.36	Diagrama de plastificação [%] dos portais de Zhou	198
6.37	Portal de Zhou modificado para a análise avançada	199
6.38	Influência do histórico do carregamento no portal modificado	202
6.39	Configurações com CI do portal modificado	203
6.40	Configurações com FP do portal modificado	205
6.41	Configurações com CI e FP conjugados no portal modificado	207
6.42	Trajetórias de equilíbrio do portal modificado	210

Figura	Título	Pág.
6.43	Configuração de colapso do portal modificado	211
6.44	<i>Superfície limite</i> obtida na análise avançada do portal modificado	212
6.45	Fatias Plastificadas Λ [%] no colapso	213
7.1	Configurações do portal de Zhou <i>et al.</i> (1990) modificado	223
7.2	Distribuição das zonas plásticas	230
7.3	Portal formado com a coluna engastada-livre de Hajjar <i>et al.</i> (1997)..	232
7.4	Configuração inicial contrária ao colapso	234
7.5	Avaliação da plasticidade da fatia.....	236

LISTA DE TABELAS

Tabela	Título	Pag.
2.1	Carga de colapso da viga bi-engastada usando ERP	47
6.1	Propriedades da seção I da viga bi-engastada.....	147
6.2	Relações das propriedades da seção elástica remanescente	151
6.3	Valores PL/M_p de formação das rótulas plásticas (s/ TR)	153
6.4	Propriedades da seção elástica remanescente	156
6.5	Valores PL/M_p de formação das rótulas plásticas (c/ TR)	156
6.6	Propriedades da seção WF 8×31 das colunas	159
6.7	Cargas de flambagem para laminados	161
6.8	Fator de cargas de flambagem das colunas com I soldados	162
6.9	Fator de Carga limite λ_{lim} da coluna engastada-livre.....	167
6.10	Avaliação do número de fatias em meia-aba	169
6.11	Avaliação do número de fatias na alma	170
6.12	Efeito da CI isolada	172
6.13	Flechas iniciais para CI de uma barra de 6 m.....	172
6.14	Fator de carga de colapso λ_{col} [%] para avaliar a forma da CI	173
6.15	Carga de colapso λ_{col} [%] p/ coluna engastada-livre com outras CI....	173
6.16	Fator de carga de colapso λ_{col} [%] para o efeito do FP isolado	175
6.17	Fator de carga de escoamento e de colapso versus tensão σ_r	177
6.18	Carga de flambagem λ_{col} versus fator η	178
6.19	Efeito dos diferentes modelos de TRs.....	179
6.20	Relação $M/M_p \times N/N_y$ no portal de Kanchanalai	185
6.21	Propriedades das seções I do portal de Vogel	187
6.22	Carga de colapso versus deslocamento no portal de Vogel	189
6.23	Esforços nos EFs do portal de Vogel	190
6.24	Propriedades da seção I da viga do portal de Zhou <i>et al.</i>	194
6.25	Fator de carga de colapso λ_{col} para os portais de Zhou et al.....	195
6.26	Esforços adimensionais no portal engastado (Fig. 6.32a)	196
6.27	Esforços adimensionais no portal rotulado (Fig. 6.32b)	196
6.28	Comportamento do portal especial sem imperfeição	200
6.29	Verificação do portal especial na situação do AISC-LRFD (1993).....	200

Tabela	Título	Pag.
6.30	Influência da carga horizontal H no portal modificado	200
6.31	Influência da viga na CI do portal modificado	201
6.32	Avaliação dos tipos de processo incremental	202
6.33	Efeito da CI no portal modificado	204
6.34	Efeito do FP no portal modificado	206
6.35	Efeito do CI e FP conjugados, no portal modificado	208
6.36	Influência das TR no portal modificado	209
6.37	Análise avançada do portal modificado	209
6.38	<i>Superfície limite</i> do portal modificado	213

RELAÇÃO DE SÍMBOLOS

1. LETRAS MAIÚSCULAS COM NEGRITO

\mathbf{B}_0 – matriz de incidência cinemática do EF corrotacional, com ângulo zero, Eq. 4.24.

\mathbf{B} – matriz de incidência cinemática do EF corrotacional, com ângulo φ , também denominada matriz de mudança de coordenadas instantânea, Eq. 4.23.

\mathbf{C}_n – vetor de cargas nocionais.

\mathbf{D} – matriz elasto-plástica constitutiva, na forma indicial $D_{\alpha,\beta}$.

\mathbf{F} – vetor das forças nodais equivalentes e/ou dos esforços internos genérico.

\mathbf{G}_α – matriz de compatibilidade geométrica, para cada grandeza corrotacional.

\mathbf{H} – matriz de rigidez referente à curvatura do EF, na forma indicial $H_{\alpha,\beta}$.

\mathbf{K} – matriz de rigidez genérica, na forma indicial $K_{i,j}$.

\mathbf{K}_e – matriz de rigidez elástica, ver apêndice A, Eq. A.1.

\mathbf{K}_g – matriz de rigidez geométrica, Eq. 2.15.

$\mathbf{K}_{g\alpha}$ – matriz de rigidez geométrica corrotacional, Eq. 4.32c.

\mathbf{K}_h – matriz de rigidez de curvatura de barra, Eq. 4.32b.

\mathbf{K}_{eg} – matriz de rigidez elástica com funções de estabilidade, Eq. 2.17.

\mathbf{K}_{ep} – matriz de rigidez elasto-plástica, na versão corrotacional Eq.4.32a.

\mathbf{K}_{egp} – matriz de rigidez elasto-plástica com funções de estabilidade.

\mathbf{P} – vetor dos esforços globais, na forma indicial P_j , ver Fig. 4.7b.

\mathbf{Q} – vetor dos esforços corrotacionais, na forma indicial Q_α , Eq. 4.44 e Fig. 4.7b.

\mathbf{R} – matriz de rotação do sistema local do EF, com ângulo θ em relação ao global, ver o apêndice G, Eq. A.32.

\mathbf{S} – matriz de rigidez genérica global, com todos os GDLs ordenados, Eq. 4.39.

\mathbf{T} – matriz de transformação da MRE local para global, ver o apêndice G, Eq. A.31.

\mathbf{U} – vetor dos deslocamentos genéricos.

2. LETRAS MAIÚSCULAS EM ITÁLICO

A a N – indicam valores dos termos das matrizes de rigidez, genéricos.

A_r, B_r, C_r – coeficientes do diagrama de TR (linear ou parabólico), seção 5.5.

X – indica uma grandeza qualquer, (também usada na relação de símbolos para subscritos do item 9).

3. LETRAS MAIÚSCULAS (SEM NEGRITO, SEM ITÁLICO)

A – indica altura genérica.

A_a – área da alma.

A_b – área da aba.

A_e – área elástica remanescente ou efetiva.

A_f – área da fatia.

A_g – área bruta da seção.

A_r – área da seção original (ou de referência), utilizada para integração das propriedades elasto-plásticas (Eq. 4.36) ou integração dos esforços corrotacionais (Eq.s 4.37 e 4.38).

B – largura ou vão de pórticos.

B_1 – coeficiente de majoração do momento para a estrutura indeslocável (travada), ver subseção 2.4.2, Eq. 2.8a.

B_2 – coeficiente de majoração do momento para a estrutura deslocável (destravada), ver subseção 2.4.2, Eq. 2.8b.

C – função de estabilidade, Eq. 2.19a.

C_n – indica uma carga nocional genérica.

C_b – coeficiente de diagrama de momento, relativo para dimensionar a barra à flexão.

C_m – coeficiente de diagrama de momento relativo ao fator de amplificação, ver subseção 2.4.1.

D – módulo de rigidez genérico, Eq. 4.5.

D_{1m} – integral de DdA_r , no regime elástico corresponde a EA , ver seção 4.7.

D_{2m} – integral de $Dy dA_r$, no regime elástico vale 0 (zero), ver seção 4.7.

D_{3m} – integral de $Dy^2 dA_r$, no regime elástico corresponde a EI_z , ver seção 4.7.

E – módulo de Young ou de elasticidade.

E_t – módulo tangente.

E_{st} – módulo de rigidez após o patamar plástico, no diagrama tri-linear, ver apêndice E.

F – forças genéricas.

G – coeficiente de rigidez dos nós, para os ábacos de Julian e Lawrence (1959), Eq. 2.6.

H – carga horizontal genérica.

H_m – efeito da carga corrotacional Q_1 na estabilidade geométrica, Eq. 4.33l.

I – inércia principal da seção genérica, em geral no plano da análise (eixo z).

I_e – inércia efetiva principal da seção do perfil, descontando a área plástica (eixo z).

I_y – inércia principal da seção do perfil, em relação ao eixo y da seção.

I_z – inércia principal da seção do perfil, em relação ao eixo z da seção.

J_A – nó inicial de uma barra ou EF.

J_B – nó final de uma barra ou EF.

J_2 – teoria da menor deformação, sendo J_2 um dos invariantes do tensor das deformações, ver seção 4.4 (Chen e Han, 1987).

K – elemento de matriz de rigidez genérica.

K_c – coeficiente (CEC, 1984) função do número de colunas no andar, na subseção 2.7.1.

K_s – coeficiente (CEC, 1984) função do número de andares analisado, na subseção 2.7.1.

L – dimensão principal: comprimento ou vão de vigas ou pórticos, altura de colunas.

L_c – comprimento na configuração conhecida.

L_{cl} – comprimento da coluna.

L_d – comprimento na configuração deformada ou desconhecida.

L_e – comprimento efetivo de flambagem, ver Eq. 2.5.

L_r – comprimento na configuração de referência.

L_{vg} – comprimento da viga, para cálculo de G .

M – momento genérico.

M_d – momento de dimensionamento, ou fatorado.

M_{efet} – momento efetivo que provoca formação de mecanismo plástico na estrutura, determinando o colapso sem flambagem, ver Eq. 6.7 na subseção 6.7.7.

M_{desloc} – momento genérico de estrutura deslocável, ver Eq. 2.7.

M_{indes} – momento genérico de estrutura indeslocável, ver Eq. 2.7.

M_j – integração do momento (integral de $\sigma_y dA$, no nó j do EF), ver Eq. 4.38.

M_n – momento nominal ou de resistência (quando multiplicado por coef. de segurança).

M_p – momento de plastificação (clássico), ver seção 2.6.

M_{pr} – momento de plastificação reduzido, nos métodos ERP refinados, subseção 2.7.2.

M_y – momento de início do escoamento, ver seção 2.6.

N – carga axial genérica.

\bar{N} – valor absoluto da carga axial genérica, usado na Eq. 2.20.

N^* – carga axial corrigida para funções de estabilidade, no método ERP-R, subseção 2.7.2.

N_a – carga axial de flambagem genérica, em geral a inelástica, ver Eq.s 6.1 e 6.2.

N_{col} – carga axial que provoca o colapso, na análise de coluna simples ou portal, ver seção 6.4 e seguintes.

N_d – carga axial de dimensionamento, ou fatorada.

N_e – carga axial de Euler, também chamada carga crítica, ou de flambagem elástica.

N_{fd} – carga axial da fatia, na configuração deformada, ver Fig. 4.3a e Eq. 4.3.

N_j – integração do esforço normal (integral de σdA , no nó j do EF), ver Eq. 4.37b.

N_n – carga axial nominal ou de resistência (quando multiplicada por coef. de segurança).

N_y – carga axial de escoamento de toda a seção à compressão, carga de esmagamento.

N_0 – carga axial de início do escoamento.

P – carga vertical genérica, força global genérica quando indexada (P_j).

P_{cl} – carga vertical nas colunas, no portal de Zhou *et al.* (1990), na seção 6.7.

P_{Ny} – carga vertical usada pra determinar o fator de carga associado à N_y , ver seção 6.4.

P_{vg} – parcela da carga vertical aplicada à viga, portal de Zhou *et al.* (1990), na seção 6.7.

P_y – carga vertical que provoca o escoamento da coluna, (associado à N_y).

Q – carga corrotacional genérica, indexada como Q_α .

R – raio de curvatura genérico, ver Fig. 4.5b.

S – função de estabilidade, Eq. 2.19b.

T – esforço de tração genérico.

V – reação vertical genérica, esforço cortante quando indexado (Q_d).

V_r – volume de referência para integração de propriedades e esforços, ver Eq. 4.34.

W – módulo resistente elástico, o subscrito indica em relação a qual eixo.

Z – módulo resistente plástico, o subscrito indica em relação a qual eixo.

4. LETRAS MINÚSCULAS EM NEGRITO

p – vetor de deslocamentos globais, na forma indicial p_j , ver Fig. 4.7 e Eq. 4.14.

q – vetor de deslocamentos corrotacionais, na forma indicial q_α , ver Fig. 4.6 e Eq. 4.13.

5. LETRAS MINÚSCULAS EM ITÁLICO

a, b, c, d, e, f – constantes genéricas usadas para estabelecer as funções de deslocamento do centróide da seção em função da posição x da seção, ver apêndice F.

k – coeficiente de comprimento efetivo de flambagem, ver subseção 2.4.1.

*k*_{sistema} – coeficiente *k* autovalor da MRG com a parte geométrica, ver subseção 2.5.1.

6. LETRAS MINÚSCULAS (SEM NEGRITO, SEM ITÁLICO)

a – espessura da alma.

b – largura da aba do perfil.

c – função de estabilidade, (Eq. 2.21a, 2.22a ou 2.23a).

d – altura do perfil, (nesta dissertação perfil I).

d_a – altura da alma do I, (aproximadamente $d-4t$, ao descontar o raio do filete).

dx – variação diferencial da posição (distancia) x .

dA_r – variação diferencial da área de referência, para integração.

dM – variação diferencial do momento.

dN_j – pequena variação dos esforços normais avaliados nos nós extremos, quando ocorre uma zona plástica maior em um desses nós.

dV_r – variação diferencial do volume de referência, para integração.

dX – taxa de variação da grandeza X genérica.

e – excentricidade genérica, ver apêndice D.

f – fator de forma da seção, relação entre os módulos resistentes: $Z/W (\geq 1)$.

g – valor $(c^2 + s^2)$, para funções de estabilidade, (Eq. 2.19c).

i, j, k, m, n – índices genéricos para somatórios: fatias, EF, nós, etc.

n_c – número de colunas do andar, ver subseção 3.5.2.

n_s – número de andares até a altura A , ver subseção 3.5.2.

n_{elem} – número total de EF do modelo, para se obter S .

n_{fatia} – número total de fatias da seção, para se obter as propriedades e esforços.

p – coordenada global genérica, (u, v ou θ), na forma indicial p_j .

q – coordenada corrotacional genérica, na forma indicial q_α .

r – raio de giro da seção em relação a um eixo indicado por subscrito (z ou y).

s – função de estabilidade, (Eq. 2.21b, 2.22b ou 2.23b).

t – espessura da aba.

u – deslocamento na direção longitudinal, eixo x do EF ou x global.

u_0 – deslocamento na direção longitudinal, eixo x do centróide.

u_0', u_0'' – diferenciais em relação a x da função u_0 .

v – deslocamento na direção transversal, eixo y do EF ou y global.

v_0 – deslocamento na direção longitudinal, eixo y do centróide.

v_0', v_0'' – diferenciais em relação a x da função v_0 .

w – carga distribuída genérica.

w_{vg} – carga distribuída na viga, do portal de Zhou et al. (1990), na seção 6.7.

x – coordenada genérica no eixo horizontal, axial ao eixo do EF, paralelo ao global X.

x_p – coordenada de posição de um ponto genérico P do EF.

${}^{\omega}x$ – valor de k na iteração ω , obtido no processo de Moore II, apêndice B, Eq. A.7,8.

${}^{\omega+1}x$ – valor de k na iteração $\omega+1$, ver apêndice B, Eq. A.7,8.

y – coordenada genérica no eixo vertical, define o plano do EF, paralelo ao global Y.

y_{CGp} – coordenada y do centro de gravidade plástico, ver Fig. 4.4.

y_p – coordenada de um ponto genérico P da seção em relação ao centróide 0.

z – coordenada genérica no eixo horizontal da seção, perpendicular ao plano do EF.

z_f – coordenada genérica da fatia onde se estuda a tensão residual.

7. LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ – deslocamento lateral genérico de pórticos, fora de prumo genérico.

Δ_H – deslocamento no topo da coluna devido à carga horizontal, que majora o efeito $P\Delta$, como mostra a subseção 6.7.4.

ΔF – acréscimo do vetor de esforços internos ou de cargas externas.

Δ_p – fora de prumo de um ponto P genérico da coluna (ou barra), ver seção 5.5.

ΔU – acréscimo do vetor de deslocamentos da estrutura.

ΔP – acréscimo de carga vertical genérica, ver subseção 2.6.2.

Δ_0 – imperfeição geométrica relativa ao fora de prumo inicial.

Δ_0^* – fora de prumo básico estabelecido pelo Eurocode, CEC (1990), na seção 2.7.1.

Φ – giro genérico de barras de pórticos, associado ao efeito de segunda ordem ($M\Phi$).

Λ – relação entre o total de fatias plastificadas e o total de fatias da seção.

8. LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α – ângulo de giro genérico.

β – parâmetro para as funções de estabilidade, (Eq. 2.20).

β_H – parâmetro que avalia a relação H/H_y ($=H A/M_p$) da subseção 6.7.1 e seguintes.

β_M – parâmetro que avalia a relação M/vM_p , com $v = 1$ ou 2 , na seção 6.5, Eq. 6.6.

β_{vg} – parâmetro que avalia a relação de carga vertical na viga (P_{vg}) em relação à carga

total aplicada no portal de Zhou *et al.* (1990), na seção 6.7.

β^* – parâmetro para as funções de estabilidade corrigido, no método ERP-R da subseção 2.7.2.

δ – deslocamento transversal ou flecha associada à curvatura da barra ou EF.

δ_f – flecha final da barra ou EF, no fator de amplificação, ver Eq. 2.4.

δ_p – variação dos deslocamentos globais.

δ_p – flecha associada à curvatura inicial do ponto P genérico de uma coluna (ou barra), ver seção 5.5.

δX – pequena variação da grandeza X genérica.

δ_0 – deslocamento transversal ou flecha associada à curvatura inicial da barra ou EF.

δ_{0C} – flecha associada à CI da barra, obtida com meio-arco circular, ver Tab. 6.13 da subseção 6.4.2.

δ_{0S} – flecha associada à CI da barra, obtida com meia-onda senoidal, ver Tab. 6.13 da subseção 6.4.2.

δ_0^* – flecha associada à CI básica definida pelo CEC (1990), na subseção 2.7.1.

$\delta\varepsilon$ – variação ou acréscimo da deformação.

$\delta\varepsilon_j$ – variação ou acréscimo da deformação devido ao processo de integração iterativa dos esforços normais da seção 4.10.

∂ – operador diferencial parcial genérico.

ε – deformação axial genérica.

ε_0 – deformação axial do eixo (que contem o centróide) da barra ou EF.

ε_e – deformação elástica.

ε_f – deformação de um ponto genérico (fatia).

ε_p – deformação plástica.

ε_{st} – deformação limite do patamar plástico e início do endurecimento sob tração.

ε_y – deformação de início do escoamento (σ_y/E).

ε_{ult} – deformação última ou de ruptura, ver Fig.s 2.14a,b e apêndice E.

ϕ – ângulo de giro da seção global.

φ – ângulo de posição do eixo corrotacional em relação ao eixo X global.

λ – fator de carga genérico.

λ_a – fator de carga aproximado, ver subseção 6.4.4, Fig. 6.23 e Tab. 6.18.

λ_c – parâmetro de esbeltez genérica para curva de flambagem, ver Eq. 6.3.

λ_{cin} – fator de carga encontrado pelo teorema cinemático da plasticidade.

λ_{col} – fator de carga de colapso genérico.

λ_e – fator de carga crítico, (para flambagem elástica).

λ_{est} – fator de carga encontrado pelo teorema estático da plasticidade.

λ_H – fator de carga relativo à aplicação da carga horizontal H, na subseção 6.7.2.

λ_{inf} – fator de carga λ_{lim} inferior, maior fator sem que ocorra o colapso, ver seção 6.1.

λ_{lim} – fator de carga limite, definido pela análise avançada.

λ_p – fator de carga de colapso por mecanismo, (ou plástico).

λ_{sup} – fator de carga λ_{lim} superior, menor fator em que ocorre o colapso, ver seção 6.1.

λ_{ult} – fator de carga limite, definido por análise inelástica de segunda ordem.

λ_y – fator de carga de início do escoamento da estrutura ou barra.

$\lambda_{\delta 0}$ – fator de carga de colapso relativo à CI, ver subseção 6.4.2.

$\lambda_{\Delta 0}$ – fator de carga de colapso relativo à FP, ver subseção 6.4.3.

$\lambda_{0.3}$ – fator de carga de colapso relativo à TR do diagrama de Galambos e Ketter (1957) com $\eta = 0.3$, ver subseções 6.4.4 e 6.7.6.

λ_{2P} – fator de carga relativo à aplicação das cargas verticais 2P, na subseção 6.7.2.

μ – parâmetro que avalia a ligação da viga em G, ver subseção 2.4.1, Eq. 2.6.

η – relação entre a tensão residual máxima e a de escoamento (σ_r / σ_y).

ρ – ângulo de giro genérico da seção do EF, ver Fig. 4.5 na seção 4.4.

ρ' – rotação específica, conjugado energético do momento fletor, ver seção 4.4.

ρ_0 – ângulo de curvatura inicial do EF, não incluído neste trabalho, ver seção 4.4.

σ – tensões normais genéricas (tração ou compressão).

σ_e – tensão de flambagem elástica de Euler.

σ_f – tensão genérica de uma fatia, ver Eq. 4.3.

σ_{max} – tensão máxima segundo Perry-Robertson, ver apêndice D.

σ_r – tensão residual máxima.

σ_r' – tensão residual máxima na alma.

σ_y – tensão de escoamento.

τ – relação E_t/E , ver Eq.s 2.35, 2.36 e 2.37; na subseção 2.7.2.

- ψ – funções de interpolação genéricas, ver seção 4.5, Eq.s 4.15, 4.16 e 4.17.
- ν – relação entre o número de M_p necessários para formar o mecanismo de colapso plástico e o número de colunas do portal ou estrutura, ver subseção 6.7.7.
- ω – passo genérico do processo incremental-iterativo ou instantâneo.
- ξ – estiramento da fibra, ver Eq. 4.1.
- θ – ângulo de giro da corda do EF entre as configurações conhecida e deformada.
- θ_a, θ_b – ângulo de giro das extremidades do EF (J_A e J_B).
- γ – ângulo de giro genérico usado na subseção 2.6.1, ver Fig. 2.17.

9. SUBSCRITOS

- X_a – relacionado às grandezas do nó inicial do EF (J_A).
- X_b – relacionado às grandezas do nó final do EF (J_B).
- X_c – relacionado às grandezas da configuração conhecida (ω).
- X_{cl} – relacionado à(s) coluna(s).
- X_{col} – relacionado à condição de colapso.
- X_d – relacionado às grandezas da configuração desconhecida ($\omega + 1$), ou referente ao dimensionamento.
- X_e – relacionado ao estado elástico ou de flambagem elástica.
- X_f – relacionado a um ponto genérico: a fibra, e por extensão a fatia.
- X_g – relacionado às grandezas geométricas.
- X_k – usado nas integrações numéricas das propriedades D_{1m} , D_{2m} e D_{3m} , tratadas com k variando de 1 a 3, nas Eq.s 4.35 e 4.36 da seção 4.7.
- $X_{i,j,k,m,n}$ – são índices genéricos usados nos somatórios.
- X_m – relacionado aos valores médios (propriedades e deformações), ver seção 4.7 e apêndice G.
- X_n – relacionado à resistência nominal, já com coef. de segurança incluso.
- X_p – relacionado ao estado plástico (p) ou à carga ou ponto (P).
- X_{Pd} – relacionado ao ponto P da seção genérica, na configuração deformada.
- X_r – relacionado a grandezas da configuração de referência ($\omega = 0$).
- X_u – relacionado ao estado último.
- X_{vg} – relacionado à(s) viga(s).
- X_y – relacionado ao escoamento (y) ou ao eixo (Y).

X_z – relacionado ao eixo principal Z.

X_0 – relacionado ao centróide 0 da seção genérica.

X_{0d} – relacionado ao centróide 0 da seção genérica, na configuração deformada.

X_α – índice de grandeza corrotacional genérica.

10. ABREVIACÕES

CI – curvatura inicial, ver subseção 3.5.1.

CG_p – centro de gravidade plástico, ver Fig. 4.4 da seção 4.4.

EF – elemento(s) finito(s).

ERP – método elástico com rótula plástica (clássico ou de segunda ordem).

ERP-CN – método elástico com rótula plástica e cargas nocionais, ver subseção 2.7.1.

ERP-M – método elástico com rótula plástica com seção montada, ver subseção 2.7.2.

ERP-R – método elástico com rótula plástica refinado, ver subseção 2.7.2.

FE – fator de escala para amplificar os deslocamentos, usado para mostra as deformadas nos exemplos das seções: 6.6, 6.7 e 7.2.

FP – fora de prumo, ver subseção 3.5.2.

GDL – grau(s) de liberdade.

MR – matriz de rigidez genérica (**K**).

MRG – matriz de rigidez global (**S**).

NFP – número de fatias plastificadas, ver seção 6.2.

PC – plasticidade clássica, ver seção 2.6.

PL – programação linear, ver subseção 2.6.1.

PT – presente trabalho (esta dissertação).

PTV – princípio dos trabalhos virtuais.

QRP – quase-rótula plástica, ver subseção 2.7.4.

RLA – referencial Lagrangiano atualizado, ver Fig. 4.2 na seção 4.3.

RP – rótulas plásticas, ver Fig. 2.15 da seção 2.6.

R-P – método rígido plástico, ver subseção 2.6.1.

TR – tensão(ões) residual(ais), ver subseção 3.5.3.

ZP – zona(s) plástica(s), ou o método; ver subseção 2.7.3.

2D – bi-dimensional, estruturas planas.

3D – tri-dimensional, estruturas espaciais.

1 INTRODUÇÃO

SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
1.1	Considerações Iniciais	02
1.2	Estudo dos Portais de Aço	02
1.3	Objetivo	05
1.4	Organização da Dissertação	07
1.5	Referências Bibliográficas	08

1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A estabilidade das estruturas representa um campo de pesquisas que desde a antigüidade desperta grande curiosidade nos homens. A compreensão dos fenômenos associados tanto à flambagem quanto à plasticidade, tem sido a inspiração de inúmeros trabalhos de pesquisa ao longo dos anos em todo o mundo.

A possibilidade de se dispor hoje de recursos computacionais excepcionais tem levado a novos horizontes, e proporciona acesso a uma série de novos conhecimentos, o que também impulsiona ao tema deste trabalho.

Assim, deseja-se aqui colaborar com o enriquecimento dessa área da engenharia estrutural, e permitir também o desenvolvimento de outras pesquisas complementares.

Este capítulo apresenta os objetivos desta dissertação, tanto ao nível de pesquisa, na visão mais ampla relativa a UFOP e ao programa de pós-graduação PROPEC, do qual faz parte, como também a nível mais particular, do autor e seu orientador, com relação à abordagem de um tema atual, importante, e cujos resultados podem ser tanto de uso acadêmico, como de uso prático. Isso será visto com detalhes na seção 1.3.

Na seção 1.4 é apresentada a organização geral deste trabalho, fazendo uma breve exposição sobre os diversos capítulos que o compõem.

As referências bibliográficas deste capítulo estão na seção 1.5.

A seguir, na seção 1.2, será apresentada uma justificativa para este tema, que embora pareça simples, possui uma abordagem diferente, ao ser empregado um novo conceito de análise estrutural e dimensionamento.

1.2 - ESTUDO DOS PORTAIS DE AÇO

O desenvolvimento da informática tornou acessível a todos os usuários, uma série de recursos antes impossíveis até de se imaginar. Após o surgimento de computadores de uso pessoal, ocorreram várias etapas de aperfeiçoamento destas máquinas. Inicialmente com o crescimento da capacidade de armazenamento e manipulação de dados, seguindo-se uma série de inovações que disponibilizaram: grande velocidade no processamento eletrônico, equipamentos com alta confiabilidade, recursos gráfico-visuais e de multiprocessamento; possibilitando assim um avanço em todas as atividades correlatas.

A engenharia de estruturas, usando destas ferramentas, também apresentou nas últimas décadas um progresso tecnológico bastante elevado. Como ressalta McGuire (1992): “*a engenharia estrutural assistida por computador não é mais uma idéia a ser vendida; na estrutura metálica tem um vasto emprego, do início ao fim, do projeto à montagem*”.

O computador possibilita a análise estrutural em teoria de segunda ordem, com uma modelagem mais próxima da realidade, onde o estudo da estabilidade pode efetivamente ser realizado; o que antes era inviável.

Mesmo assim, dispondo hoje de uma técnica de modelagem bem estabelecida e qualificada, os engenheiros precisam de maior conhecimento no tocante às diversas considerações que lhes são atribuídas ao fazer uso dos programas existentes, obterem resultados adequados, fazer verificações do dimensionamento, e realizar o projeto.

Cada vez mais se deseja que os resultados dos cálculos eletrônicos efetivamente correspondam às expectativas de um projeto estrutural, ou seja, viabilizar um sistema estrutural para atender a uma dada arquitetura, obter soluções onde se pode claramente estabelecer a margem de segurança para o uso e para as cargas, minimizar o peso da estrutura, tanto quanto otimizar os perfis e os processos, sendo o final de tudo reduzir custos e proceder à execução das obras, com qualidade.

Não se deve esquecer, que tudo isso ocorre num período de tempo cada vez menor, onde não se pode, às vezes, dispor de muitas alternativas para a solução dos problemas envolvidos no projeto. Cada vez mais surgem circunstâncias excepcionais, devido às dificuldades de obtenção dos perfis, de dimensões, de condições de transporte e montagem, que também interferem no projeto.

O método dos elementos finitos, o método dos estados limites, a avaliação da plasticidade distribuída, em conjunto, formam uma base para inúmeras pesquisas em todo o mundo, culminando agora com o crescimento do conceito denominado *análise avançada*.

Essa análise procura apresentar resultados mais próximos aos que são obtidos por meio de ensaios experimentais, reduzir a tarefa do dimensionamento, bem como permitir um melhor entendimento ou estimativa do comportamento estrutural. Por essa razão será utilizada nesta dissertação.

Com o refinamento da técnica de análise, surge um questionamento sobre a validade dos resultados obtidos quando se adota um modelo estrutural, no qual não se considerou, por simplicidade ou falta de dados, a presença e o efeito dos aspectos importantes. Isto é, não basta fazer uma análise inelástica de segunda ordem, e obter um resultado preciso, para se realizar a chamada análise avançada.

Não se trata simplesmente de fazer um cálculo usando um recurso mais moderno ou mais preciso. Não se deseja obter esforços para dimensionamento apenas. Não se trata de obter um coeficiente de flambagem do sistema.

Poderia se dizer ainda, que o objetivo é determinar uma carga última... Se for denominada por carga *última* aquela que se obtém através de uma análise inelástica de segunda ordem, precisa, correspondente a carga onde ocorre a flambagem inelástica.

Mas ainda estaria faltando algo, algo muito importante: qual carga última?

O mistério somente se desvenda a partir do instante que se conhece o conceito da *análise avançada*, em que são realizadas não uma, mas várias análises inelásticas de segunda ordem, todas muito precisas, e cada qual irá estabelecer um valor de *carga inelástica limite* (última), e indicará um comportamento estrutural.

Várias dessas análises cobrirão talvez uma única combinação de ações de cálculo (exemplo: carga permanente e sobrecarga sem vento lateral). O que modifica e se introduz são os diversos aspectos importantes a serem considerados, são as exigências da análise. Esses aspectos é que vão ser verificados com as várias análises.

Existem vários aspectos que podem ser avaliados, porém exige-se que no mínimo sejam considerados os seguintes:

- a. o fora de prumo de colunas e/ou da estrutura;
- b. a curvatura inicial das barras, vigas e/ou colunas; e
- c. as tensões residuais dos perfis.

Esses aspectos precisam ser incorporados às etapas de cálculo, isolados ou combinados, de tal sorte que irão ser obtidos alguns valores de cargas últimas, e se estabelece a carga limite da análise avançada, usando o conceito da plasticidade clássica de limite superior, ou seja, a menor das cargas limites inelásticas (últimas) obtidas para aquela(s) hipótese(s).

Como a análise inelástica de segunda ordem determina claramente a carga última, que será um limite de resistência ou de estabilidade, esse valor se torna realidade quando se impõe ao processo circunstâncias próprias dos materiais, ou seja:

- a. as tolerâncias de fabricação (curvatura de barra);
- b. as tolerâncias de montagem (fora de prumo); e
- c. as condições da matéria prima, no caso os perfis sejam laminados, soldados ou dobrados (com suas tensões residuais).

Portanto, ao incluir esses aspectos importantes, o resultado obtido, ou seja, a menor das cargas limites inelásticas (últimas), converge para o resultado que se encontra em um ensaio de laboratório, e será portanto a carga limite real daquela estrutura, para aquela condição de carregamento.

E como se obteve uma condição de máxima resistência e maior valor possível de carga sem instabilidade global, a estrutura está virtualmente dimensionada no plano dos esforços. Ou seja, nenhum passo adicional de verificação de barras no plano, fórmulas de interação, valores de coeficiente de flambagem, etc; serão necessários para a análise no plano da estrutura.

A hipótese de cálculo está finda e verificada simplesmente!

Este trabalho pretende mostrar como se chega a isso, iniciando por viga e colunas simples, e posteriormente analisando portais. Sobre a escolha dos portais: *“a resposta de portais é geralmente dominada pelos efeitos da distribuição da plasticidade nas barras individualmente, já a modelagem de sistemas estruturais maiores será feita adequadamente, se nos subconjuntos e barras individuais, obtêm-se resultados acurados”* (Attalla *et al.*, 1994). Portais são estruturas onde os efeitos estudados podem ser mais bem observados e analisados, e assim as eventuais conclusões podem ser de forma fácil tanto entendidas como generalizadas.

1.3 OBJETIVO E JUSTIFICATIVAS

O objetivo deste trabalho é estudar a influência de algumas considerações que são exigidas, como mínimas, para que uma análise não-linear de segunda ordem possa ser qualificada como uma análise avançada.

Essas considerações são: a falta de prumo, a curvatura inicial dos perfis e as tensões residuais, decorrentes das tolerâncias de fabricação e montagem, bem como dos processos de obtenção das matérias primas: perfis laminados ou soldados, entre outros.

Embora esses aspectos importantes já tenham sido abordados por vários pesquisadores em todo mundo, inclusive no Brasil, e verificando que o estudo de portais também não constitui em si novidade, este trabalho irá procurar apresentar uma abordagem diferente usando a análise avançada. Essas exigências, que são os aspectos importantes, serão aplicadas na análise de estruturas mais simples: em viga e colunas individuais, preliminarmente, e depois aos portais planos.

Com isso, o entendimento destes efeitos deverá se tornar mais fácil, e assim pretende-se que este trabalho possa eventualmente ser usado por outros pesquisadores e engenheiros, como uma orientação ou mesmo um material didático.

Este trabalho é parte de um projeto de pesquisa mais amplo, denominado “*Análise Não-linear Estática e Dinâmica de Sistemas Estruturais Metálicos*”, sendo enquadrado no assunto “Análise inelástica de estruturas metálicas”.

É importante destacar que este trabalho preenche os objetivos do PROPEC /Deciv/Escola de Minas/UFOP, relacionando duas linhas de pesquisa:

- a. *mecânica computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
- b. *comportamento e dimensionamento das estruturas metálicas*: que visa estudar isoladamente, ou em conjunto, o comportamento das diversas partes de uma estrutura metálica.

No caso deste trabalho, a mecânica computacional está presente em toda a formulação proposta, desde a concepção de elementos finitos, a montagem das matrizes de rigidez constitutiva e geométrica, solução de sistemas de equações lineares para obtenção dos deslocamentos nodais, estratégia para obtenção de soluções não-lineares por processo incremental-iterativo, integração dos esforços internos, emprego de critérios de convergência; ou seja, em todas as etapas do processo computacional.

Por outro lado, toda essa programação é direcionada para uma análise avançada, que pode ser definida, conforme Liew *et al.* (1993a,b): “*é uma análise inelástica de segunda ordem que representa uma forma de se avaliar tanto o comportamento da estrutura metálica, quanto o seu dimensionamento, visto que fica estabelecido o limite*

ou de resistência ou de flambagem, do sistema estrutural como um todo, e assim se tornam desnecessárias outras verificações de resistência ou de estabilidade no próprio plano para as partes componentes isoladamente”.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A seguir é apresentado como os capítulos desta dissertação estão organizados:

- a. os tipos de análise, elásticas ou inelásticas, de primeira e de segunda ordem são mostrados no capítulo 2, incluindo alguns detalhes que envolvem a teoria, as vantagens e desvantagens, os pesquisadores e colaboradores, uma posição histórica e a inter-relação com o dimensionamento;
- b. a análise avançada é conceituada no capítulo 3. A sua definição como também as suas características ou atributos, as exigências a cumprir, como será adotada neste trabalho e a introdução dos aspectos importantes, etc; são apresentados no referente capítulo;
- c. a formulação empregada para desenvolver a análise inelástica de segunda ordem, segundo o método da zona plástica, chamada de *técnica das fatias*, é apresentada no capítulo 4, onde se inclui: a concepção de elemento e fatia, a lei constitutiva, os sistemas coordenados adotados, a formulação do elemento finito, grandezas objetivas, obtenção das matrizes de rigidez elasto-plásticas e geométricas, obtenção dos esforços, o problema não-linear e também o processo de integração iterativa dos esforços normais de elementos com plastificação, que é uma das contribuições originais deste trabalho;
- d. o capítulo 5 apresenta alguns comentários sobre a implementação computacional, dando maior ênfase à modelagem dos aspectos importantes da análise avançada, que é o objetivo deste trabalho;
- e. os exemplos são mostrados no capítulo 6, onde se procura inicialmente validar as implementações realizadas, resolvendo problemas de bancos de provas, ou seja, problemas encontrados na literatura que abordam análises inelásticas de segunda ordem (de viga, de colunas e de portais). Em seguida, dois exemplos são realizados (um de coluna e um de portal) fazendo-se uma análise avançada em detalhe, para a obtenção de resultados relativos ao objetivo desta dissertação;

- f. as conclusões advindas desses exemplos, as eventuais melhorias, as críticas, e os aspectos que envolvem o prosseguimento desta pesquisa, serão abordados no capítulo final.

Cada capítulo terá um sumário, mostrando as suas diversas seções, com a indicação das páginas de início. No final de cada capítulo é apresentada uma lista de trabalhos citados, ao longo do capítulo.

Após o último capítulo, segue uma relação bibliográfica completa, com todas as referências de todos os capítulos; e o apêndice, onde são mostrados alguns trechos que foram omitidos dos capítulos, para eventuais consultas.

1.5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Attalla, MR; Deierlein, GG; e McGuire, W; 1994. Spread of plasticity: a quasi-plastic hinge approach. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 120 (8) 1994, pp. 2451 a 2473.
- Liew, JYR; White, DW; Chen, WF; 1993a. Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design - Part I-II, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 119 (11) 1993, pp. 3196 a 3216.
- Liew, JYR; White, DW; Chen, WF; 1993b. Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design - Part I-II, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 119 (11) 1993, pp. 3217 a 3237.
- McGuire, W; 1992. Computers and Steel Design - *AISC Engineering Journal* 4/4 pp. 160 a 167.

2 MÉTODOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
2.1	Introdução	10
2.2	O Problema Estrutural	10
2.3	Tipos de Análise Estrutural	13
2.4	Análise Elástica de Primeira Ordem	17
2.4.1	Método Tradicional	19
2.4.2	Comportamento Deslocável e Indeslocável	25
2.4.3	Considerações Finais	27
2.5	Análise Elástica de Segunda Ordem	28
2.5.1	Determinação de Autovalor	30
2.5.2	Cargas Nocionais	31
2.5.3	Matriz de Rigidez Geométrica	34
2.5.4	Funções de Estabilidade	35
2.5.5	Considerações Finais	38
2.6	Análise Inelástica de Primeira Ordem	40
2.6.1	Método Rígido-Plástico	42
2.6.2	Elástico com Rótulas-Plásticas: ERP	45
2.6.3	Considerações Finais	49
2.7	Análise Inelástica de Segunda Ordem	50
2.7.1	ERP e Cargas Nocionais: ERP-CN	55
2.7.2	ERP com Refinamentos: ERP-R e ERP-M	57
2.7.3	Método da Zona Plástica	60
2.7.4	Quase Rótula-Plástica	64
2.8	Referências Bibliográficas	65

2.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma visão geral sobre os diversos tipos de análise estrutural existentes, a partir do qual se pretende a introduzir a *análise avançada*, com sua definição em termos precisos, no próximo capítulo 3.

Assim, na seção 2.2 será feita a colocação básica do problema estrutural.

A seção 2.3 mostra os quatro tipos básicos de análises estruturais conhecidos hoje, que são tratados com maior detalhes nas seções seguintes, a saber:

- 2.4 análise elástica de primeira ordem;
- 2.5 análise elástica de segunda ordem;
- 2.6 análise inelástica de primeira ordem; e
- 2.7 análise inelástica de segunda ordem.

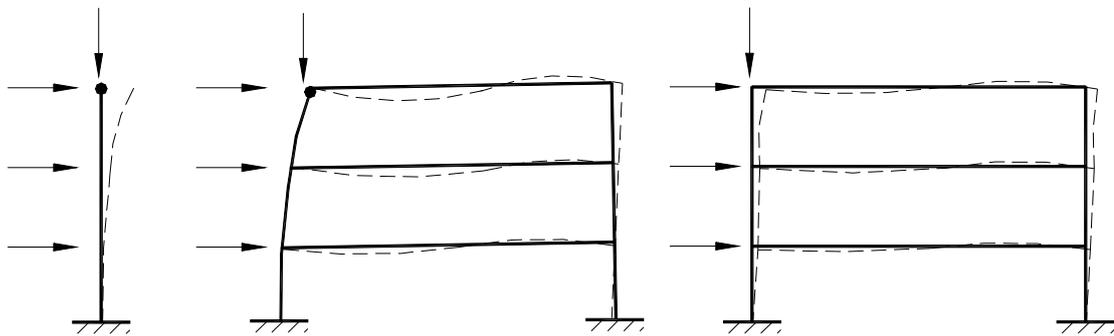
Essa visão geral será, de forma resumida, um estado da arte dos diversos tipos de análise.

Na seção 2.8 serão apresentadas as referências bibliográficas deste capítulo.

2.2 O PROBLEMA ESTRUTURAL

Nas últimas décadas, o desenvolvimento de recursos não só da informática (processadores mais rápidos, maior espaço de memória principal, virtual e de armazenamento em disco, sistemas operacionais e linguagens mais poderosas, etc.), como também dos laboratórios (medidores e equipamentos mais precisos, medições mais acuradas, uso de modelos de escala real, etc.) e da própria tecnologia (maior número de pesquisadores e de trabalhos publicados, desenvolvimento de técnicas numéricas e ferramentas computacionais sofisticadas), permitiram uma grande amplitude de informações serem adquiridas, avaliadas e consolidadas no sentido de resolver questões antigas como:

Qual é a resistência de uma coluna, como avaliar sua estabilidade, qual a influência dessa coluna, em dadas condições, no conjunto estrutural e como esse conjunto estrutural interage com essa coluna?



(a) Coluna isolada

(b) Estrutura com coluna isolada

(c) Estrutura e coluna em conjunto

Figura 2.1 Interação entre coluna e estrutura.

Na Figura 2.1a se representa uma coluna isolada e se indica a sua deformação com uma flambagem por flexo-compressão. Na Fig. 2.1b o que seria a sua influência sobre a estrutura se a performance dessa coluna ainda fosse independente do conjunto (isso é apenas uma abstração). Mas, acompanhando a Fig. 2.1c, se percebe que há uma interação entre a estrutura e a coluna, que se deseja determinar, que não pode ser estabelecida como se fosse uma peça isolada unida a um conjunto independente.

Desde Euler (1759), procura-se estudar e estabelecer modelos sobre o comportamento de barras isoladas na engenharia, em diversas áreas (englobando a resistência dos materiais, a estabilidade, a elasticidade, a plasticidade, a tecnologia dos materiais, sistemas estruturais, etc). Porém, quando esses conhecimentos são empregados para entender o comportamento da estrutura como um todo e a participação de cada elemento nesse conjunto, principalmente ao se determinar os valores últimos que esse conjunto pode suportar, a resposta à questão formulada não é simples.

Essa interdependência entre a barra, como uma parte isolada, e a estrutura como um conjunto em que cada barra participa, é de complexa avaliação e por isso, se procura introduzir simplificações, de forma a se obter a resposta desejada.

Os pesquisadores têm se dedicado muito no sentido de poder, cada vez mais, apresentar soluções adequadas a esse problema, que faz parte da Engenharia de Projeto.

A partir da concepção arquitetônica e definição do esquema estrutural a ser adotado é iniciado o cálculo estrutural. Procura-se estabelecer as condições necessárias para que a estrutura seja adequada aos fins previstos, cumprindo também exigências de

viabilidade, produção e custos. Para isso, o primeiro passo é estabelecer os estados limites últimos e de uso da mesma.

Dentro dos parâmetros estabelecidos pela NBR 8800 (1986), entre outras normas, nesta dissertação se adota o conceito de *estado limite* como o estado em que a estrutura apresenta um comportamento inadequado, cuja probabilidade de ser atingido deve ser suficientemente baixa (Queiroz, 1986). Usualmente, o ponto de partida para o calculista é analisar os limites últimos, ou seja, encontrar uma solução estrutural, e posteriormente, adequar essa solução, através das verificações dos limites de uso.

Para se estabelecer os limites últimos, deve-se considerar inicialmente a existência de dois critérios básicos a serem preenchidos: o da resistência e o da estabilidade.

A resistência avalia o que cada barra pode suportar de esforços sem que ocorra um estado limite por ruptura ou por escoamento, seja qual for a natureza do esforço ou de combinação de esforços.

A estabilidade avalia se a estrutura ou se a barra, ao sofrer a deformação oriunda de resistir aos esforços, ou seja, no estado deformado, não apresentarão o fenômeno de flambagem, seja global (no plano ou fora do plano), ou local (por giro ou empenamento da chapa ou parte componente).

Esses critérios são aplicados desde que se conheçam também as condições que serão impostas às estruturas: a natureza, a diversidade e o ponto de aplicação das cargas, as condições de apoio, as características dos materiais empregados, os limites aos deslocamentos e às deformações, a natureza e processos construtivos (ligações), etc.

No passado, pela falta de recursos e de conhecimento mais profundo sobre o comportamento estrutural, se procurava garantir a resistência e a estabilidade de cada barra individualmente, para assim se garantir todo o conjunto.

À medida que foram acontecendo avanços tecnológicos, se verificou que esse procedimento além de muitas vezes representar um gasto de material e recursos desnecessários, também ocasionalmente proporcionava resultados incoerentes ou não-conservadores, como indicam vários pesquisadores, entre os quais: Siat-Moy (1986) e Nethercot (2000).

Com o desenvolvimento da informática e toda repercussão paralela em várias áreas, apareceram novas teorias e novos recursos, possibilitando que fossem aproveitadas, de melhor forma, as reservas de resistência e de estabilidade que provém

do trabalho conjunto dos sistemas estruturais, e de uma melhor avaliação de todos os fatores envolvidos.

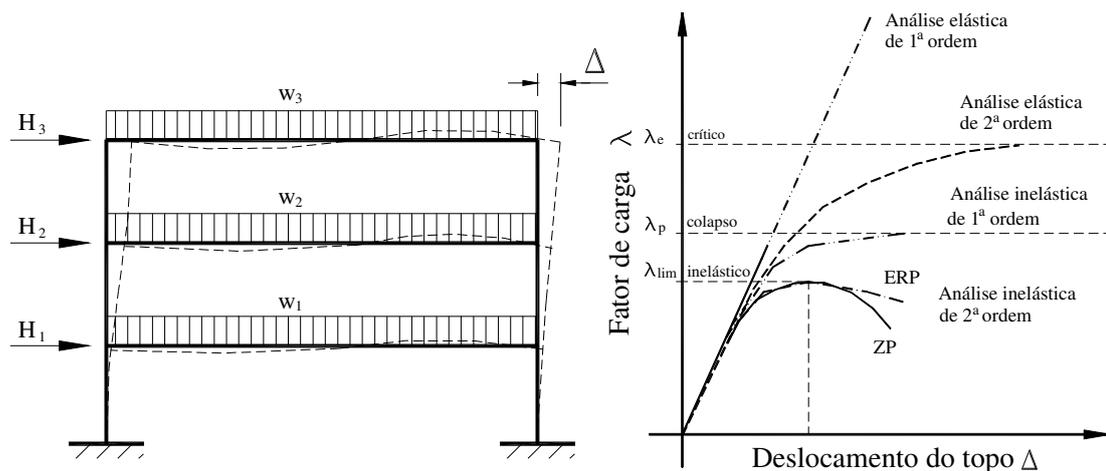
Para isso, cada vez mais, tem se tornando necessário que o cálculo estrutural se aproxime da realidade constatada nos ensaios de laboratório (Moore *et al.*, 1993), e possibilite a avaliação segura e precisa do comportamento da estrutura.

Isso é traduzido no aparecimento da norma australiana AS4100 (1990), onde é oficializado o uso, pela primeira vez, da chamada *análise avançada* que será abordada neste trabalho. Essa análise procura avaliar com mais fidelidade as estruturas, possibilitando não apenas economia, mas segurança, precisão e confiabilidade nos resultados do projeto estrutural.

A seguir serão mostradas as diversas formas de análise estrutural hoje conhecidas, para se poder então introduzir a análise avançada.

2.3 TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

Seja um pórtico hipotético sujeito às cargas genéricas indicadas na Fig. 2.2a. Essa estrutura poderia ser analisada empregando diversos métodos. É suposto que as cargas sejam introduzidas no pórtico parcialmente, crescendo num processo monotônico de zero até um valor λ , que é chamado de fator de carga (indica quanto já foi aplicado da carga).



(a) Pórtico hipotético.

(b) Comportamento das análises estruturais.

Figura 2.2 Métodos de análise estrutural.

Para cada valor do fator de carga λ , se obtém o deslocamento medido no topo do pórtico Δ correspondente, e assim é construído o gráfico da Fig. 2.2b, conforme o processo de análise que for adotado.

Existem três valores de fator de carga especiais marcados neste gráfico, a saber: fator de carga crítico, o de colapso e o de carga limite. Cada um desses fatores representa um estado último estabelecido a partir do método de análise adotado, notando-se que o método elástico de primeira ordem não estabelece qualquer estado último, como esperado.

Pode-se ter uma visão geral dos diversos processos de análise estrutural acompanhando a Fig. 2.3. Existem basicamente dois ramos distintos: o dos processos elásticos, onde o material obedece à lei de Hooke em todos os pontos; e o dos processos inelásticos, onde se considera que o material somente será elástico até o início do escoamento, e a partir deste ponto, avaliam a plasticidade.

Em ambos os ramos, a estrutura pode ser analisada segundo sua configuração original, dita de *primeira ordem*; ou na configuração deformada, ou seja, de *segunda ordem*. Essa última configuração é obtida considerando a influência da modificação da geometria devido às deformações provocadas por um ou mais (ou parte dos) carregamentos.

Os métodos elásticos de primeira ordem podem ser agrupados em dois tipos:

- a. *método tradicional*, onde se pode citar o antigo método das tensões admissíveis (MTA), onde era usada uma série de coeficientes de correção e ajustes (C_b , C_m , σ_e , etc.), além dos coeficientes de flambagem k ; podendo ser citado o AISC ASD (1989) como um representante deste método; e
- b. *método B_1 e B_2* , um pouco mais moderno, fazendo uso da análise com a estrutura na condição *indeslocável* e depois na condição *deslocável*, determinando fatores de correção adicionais (B_1 e B_2) dos momentos fletores nas barras, além dos coeficientes já apresentados. As normas AISC LRFD (1986) e a NBR 8800 (1986) adotam esse método.

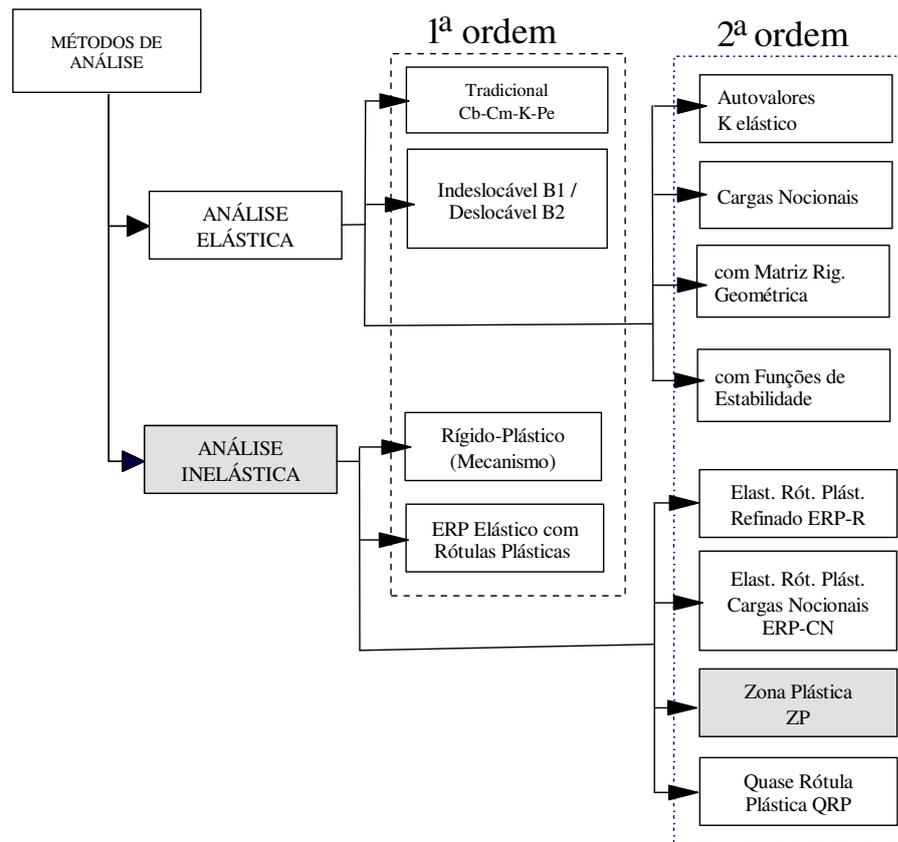


Figura 2.3 Visão geral: métodos de análise.

Observe que nos dois procedimentos são usados esses coeficientes, para se estimar os efeitos das não-linearidades física e geométrica.

Os métodos elásticos de segunda ordem podem ser agrupados em quatro tipos:

- os que determinam as cargas críticas através da avaliação dos *autovalores* que tornam zero a diagonal principal da matriz de rigidez global (MRG) da estrutura com o efeito geométrico incluído ou aproximado,;
- os que utilizam *cargas nocionais* para simular o efeito de segunda ordem, onde se pode citar a própria NBR 8800 (1996), anexo L;
- os que geram a matriz de rigidez geométrica diretamente, incluindo ou não todos os efeitos de segunda ordem ($P\Delta$ e $P\delta$) ; e, finalmente,
- os que corrigem a matriz de rigidez constitutiva através das funções de estabilidade ou funções similares. Os dois últimos procedimentos são recomendados pelo trabalho de White e Hajjar (1991).

No ramo das análises inelásticas, as classificadas de primeira ordem remontam ao início do método plástico, com o tipo *rígido-plástico* (R-P), onde se procura apenas definir a carga e o mecanismo de colapso; e o *elástico com rótulas plásticas* (ERP), onde são determinadas a seqüência de aparecimento dessas rótulas e a carga de colapso. O trabalho de Higgins *et al.* (1971) aborda ambos os métodos.

Como indicado na Fig. 2.3, no ramo das análises inelásticas classificadas como de segunda ordem, que representa os mais recentes desenvolvimentos (últimos 30 anos), destacam-se:

- a. os processos derivados do método elástico com rótulas plásticas, aplicando correções nos modelos anteriores: ou usando *cargas nocionais* (ERP-CN), ou por um meio *refinado* (ERP-R) de avaliar as propriedades das seções, considerando a degradação da rigidez da barra e o módulo tangente. a partir do início do escoamento, ambos adotados por Liew *et al.* (1993 e 1994);
- b. o mais preciso, porém mais trabalhoso, é o método da *zona plástica* (ZP), onde a plasticidade distribuída é avaliada (Clarke, 1994); e, finalmente,
- c. os diversos processos alternativos sofisticados, onde se pode incluir o método *quase rótula plástica* (QRP) de Attalla *et al.* (1994).

Todos esses tipos de análises possuem suas variações, suas aproximações, e são aplicados tanto a problemas estruturais planos como espaciais. Em sua maioria utilizam técnicas introduzidas a partir do método dos elementos finitos (MEF), e assim desenvolvem processos matriciais onde se expressam as relações constitutivas e geométricas.

Isso significa que o uso de recursos computacionais como ferramenta na produção dos resultados desejados é fundamental.

Vale esclarecer que seja no Brasil, seja no exterior, todos esses métodos constituem ferramentas de uso normal para desenvolvimento de projetos. Deve-se frisar que existe naturalmente um descompasso entre a técnica que emerge da área de pesquisa, e a técnica empregada na parte profissional em escritórios. Essa diferença exige tempo para se superar e as normas procuram agregar essas técnicas.

A seguir, será feita uma descrição mais detalhada sobre esses métodos de análise, tentando esclarecer também os termos e nomes já indicados, procurando ressaltar:

- a. a concepção, as características e as considerações envolvidas;
- b. fazer um elo histórico situando seu aparecimento, indicando os pesquisadores, bem como os trabalhos que foram a base para seu estabelecimento;
- c. os pesquisadores e os trabalhos desenvolvidos referentes, inclusive linhas alternativas e complementares;
- d. as vantagens, as limitações e a sua relação com o dimensionamento.

Para não se fazer repetições nas descrições seguintes, a maioria das informações estará seguindo as referências citadas em destaque anteriormente, para cada um dos tipos de análises já mostrados, sendo então apresentadas as referências complementares.

2.4 ANÁLISE ELÁSTICA DE PRIMEIRA ORDEM

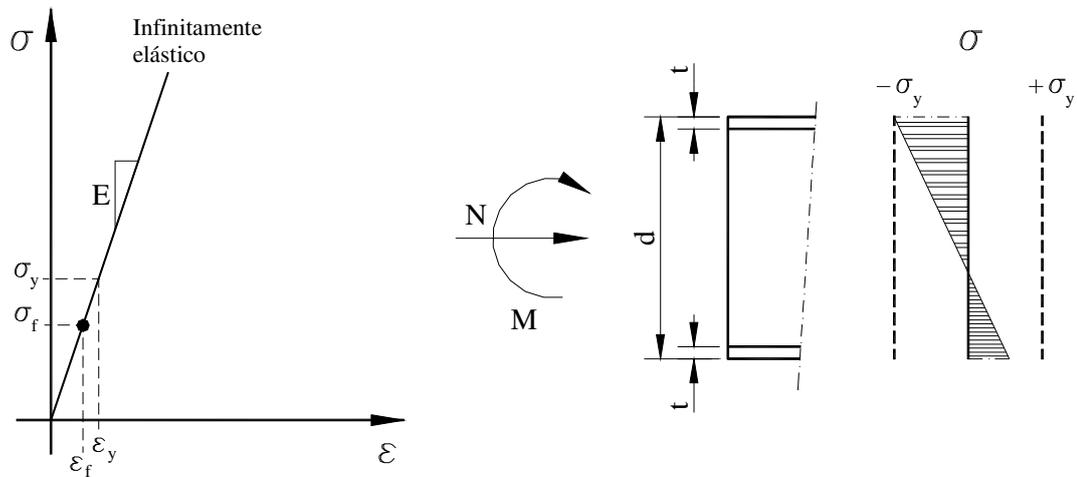
Nesta análise é considerado que o material atende a lei de Hooke em todos os pontos da estrutura, ou seja, as tensões são proporcionais às deformações como mostra o diagrama tensão-deformação da Fig. 2.4a. Assim, pode-se escrever:

$$\sigma_f = E\varepsilon_f < E\varepsilon_y = \sigma_y, \quad (2.1)$$

ou seja, não pode haver tensões atuantes (σ_f) superiores às de escoamento (σ_y), sendo E o módulo de Young (ou elástico), ε_f e ε_y as deformações elástica e de escoamento, respectivamente.

Portanto, para qualquer barra da estrutura (nesta dissertação, com seção em perfil I de altura d e espessura da aba t, como visto na Fig. 2.4b), onde atuam o esforço normal N e momento fletor M, no plano da alma, ocorrerá um diagrama de tensões lineares, contido no intervalo $[-\sigma_y, +\sigma_y]$, como representado na Fig. 2.4c.

O equilíbrio da estrutura é formulado segundo sua geometria original, sendo válido o princípio da superposição de efeitos. Isso possibilita que vários carregamentos sejam processados com uma única montagem da matriz de rigidez global (MRG), tornando o processo bastante eficiente do ponto de vista computacional.



(a) Diagrama tensão – deformação. (b) Flexo-compressão do I. (c) Tensões na seção.

Figura 2.4 Comportamento elástico do material.

Complementando, deve-se ressaltar que essa possibilidade de estudar diversas possibilidades de combinações lineares de carregamento, é bastante interessante e simples, o que permitiu esse método ganhar muitos adeptos.

Para que essa superposição dos efeitos seja válida, exige-se que a estrutura apresente pequenos deslocamentos, de tal forma que sua geometria deformada seja confundida com a inicial.

A rigidez da estrutura $\mathbf{S} = \Sigma \mathbf{K}_e$ é obtida apenas pela soma da rigidez constitutiva das barras \mathbf{K}_e (mostrada em detalhe no apêndice A), e numa formulação via MEF, pode-se estabelecer o equilíbrio do sistema estrutural ao escrever:

$$\Sigma \mathbf{K}_e \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.2)$$

onde \mathbf{U} é o vetor dos deslocamentos e \mathbf{F} é o vetor das forças. Essa expressão constitui um sistema de equações lineares, que possui um processo direto de solução.

Usualmente se trabalha com o armazenamento da matriz \mathbf{S} em banda e a resolução do sistema é feita pelo método da decomposição de Cholesky, já que a matriz é sempre positiva definida (Gere e Weaver, 1984).

Serão agora apresentados os dois tipos de métodos de dimensionamento que utilizam a abordagem elástica de primeira ordem, sendo realizados comentários adicionais para ambos na última subseção.

2.4.1 Método Tradicional

Historicamente, esse tipo de análise é o mais antigo, e não se pode estabelecer precisamente uma data ou proposição inicial, embora seja atribuída a Euler (1759) que definiu a carga de flambagem elástica, uma posição de destaque.

A forma aqui apresentada procura seguir as versões antigas do MTA tratada no AISC Manual em 1972 e (1978) que é a referência básica, podendo ser citados os trabalhos de Higgins (1962), Kavanaugh (1962), Lu (1965), Yura (1971) e Johnston (1976), como os que colaboraram para o estabelecimento do método.

O método tradicional propõe-se a executar o processo matricial uma única vez, calcular os resultados dos carregamentos, e seguir para o dimensionamento, onde se faz várias combinações lineares dos esforços nas barras, obtidos carregamento por carregamento, fatorados conforme os critérios da norma, para se determinar os valores críticos (máximos).

Esses valores são então usados nas verificações das barras, avaliando-se as equações de interação empíricas, que provém dos ensaios em escala real de barras simples à flexo-compressão. Essa interação é descrita pela equação:

$$\frac{N_d}{N_n} + \frac{M_d}{M_n} \frac{C_m}{(1 - N_d/N_e)} \leq 1 \quad (2.3)$$

onde N_d e M_d são os esforços fatorados normal e de flexão, N_n e M_n são as resistências nominais já multiplicadas pelos fatores de resistência correspondentes, e N_e é a carga crítica dada pela hipérbole de Euler, para a condição de contorno da barra verificada.

Observe que através da Eq. 2.3 já se verifica a presença do fator que faz a amplificação dos momentos e estima o efeito $P\Delta$ na barra, ou seja, o fator amplificador: $1/(1 - N_d/N_e)$, e um coeficiente redutor C_m .

O fator amplificador é $1/(1 - N_d/N_e)$, que nasce a partir das equações diferenciais de barras imperfeitas à flexo-compressão, apresentado por Timoshenko em 1909 (!), relacionando a flecha vertical simples δ_0 de uma viga bi-apoiada, com um carregamento qualquer, à flecha final δ_f , que ocorre quando é introduzida uma carga de compressão N_d na barra (Timoshenko e Gere, 1961). Aproximando-se a curva de flechas iniciais por uma senóide, e tomando a expressão por séries, o primeiro termo

consegue representar a função com um erro de apenas 1.5%, o que leva à expressão:

$$\delta_f = \frac{\delta_0}{(1 - N_d/N_e)}. \quad (2.4)$$

Considera-se portanto, que os momentos atuantes possam ser majorados por este efeito de segunda ordem de barra, cuja dedução completa pode se ver em Timoshenko e Gere (1961).

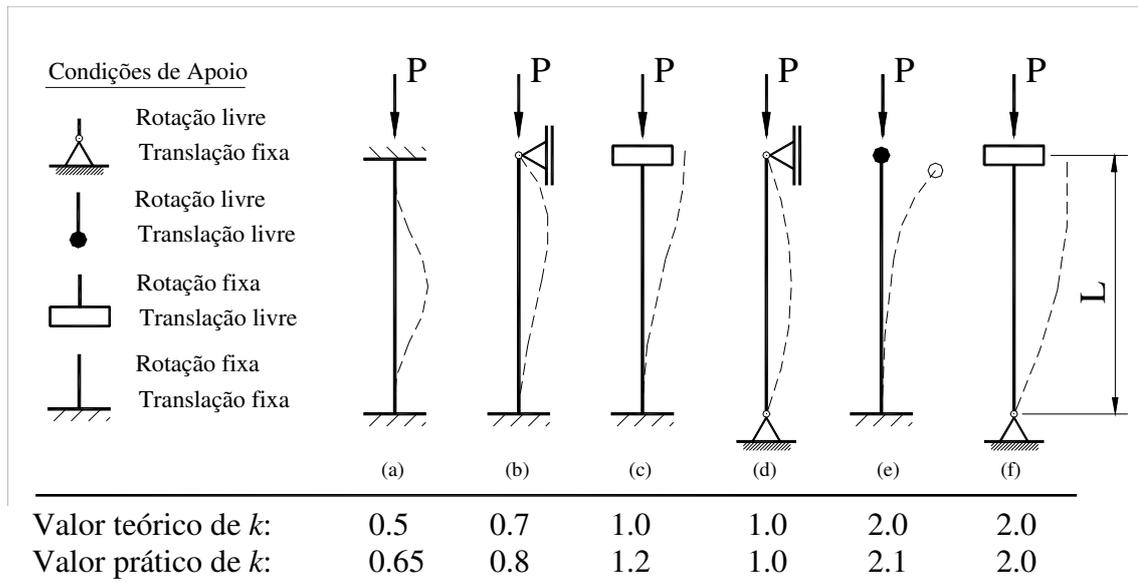
O coeficiente C_m procura avaliar a situação do momento máximo em relação ao diagrama de momentos na barra à flexo-compressão equivalente isolada, considerando a existência ou não de cargas transversais ao eixo da barra. Possui um valor usual de 0.85 para as estruturas apertadas destravadas, 1.0 para as barras que possuem alguma ligação rotulada numa extremidade, e um valor entre 0.4 e 1.0 para os casos de pórticos travados. A dedução dos valores de C_m e os casos mais particulares, adotados pelo AISC ASD (1989), são explicados por Iwankiw (1984). Estudos complementares são apresentados por Gonçalves e Camotim (2004).

Deve-se enfatizar que, para se obter as grandezas N_n e N_e , utiliza-se o famoso e controverso fator *comprimento efetivo de flambagem* k da coluna, sobre o qual será apresentado, a seguir, um pequeno comentário.

Coefficiente de comprimento efetivo de flambagem k

A definição deste importante parâmetro nasce inevitavelmente com Euler (1759), como conseqüência das soluções apresentadas para a equação diferencial de equilíbrio crítico da coluna, com diferentes condições de contorno, e que levaram aos valores das cargas críticas de barras à compressão e ao estabelecimento da teoria da estabilidade elástica.

Quando se analisam as diversas condições de apoio de uma barra simples, as cargas críticas encontradas podem ser expressas em relação à carga da barra bi-rotulada, havendo uma relação entre o comprimento da barra e o que resulta da solução. Da relação entre estes comprimentos L_e , o de flambagem e L , o real, nasce o fator k como mostrado a seguir, que se relaciona à carga de flambagem N_e de Euler, à inércia I da seção em relação ao eixo de flambagem considerado e ao módulo de Young E , ou seja:



Configuração para as condições de: (a) bi-engastado; (b) engaste-rótula; (c) engaste-deslizante; (d) bi-rotulado; (e) engaste-livre e (f) rótula-deslizante.

Figura 2.5 Coeficientes de flambagem k .

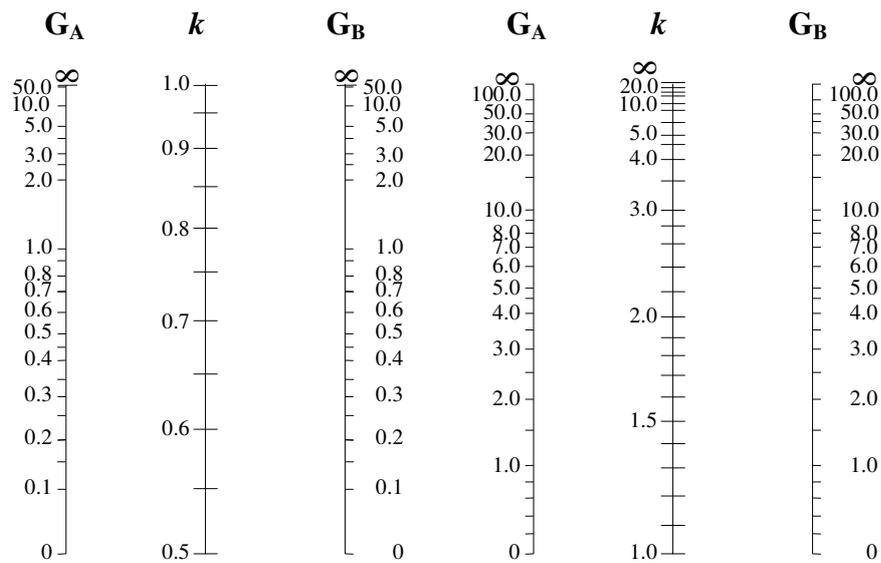
$$L_e = kL = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{N_e}} \tag{2.5}$$

O AISC ASD (1989), como os diversos livros de estabilidade (Timoshenko e Gere, 1961; Moreira, 1977; Galambos, 1988; etc.), fornecem os valores de k , como os reproduzidos na Fig. 2.5.

Seguindo esse conceito, para estruturas deslocáveis e indeslocáveis, Julian e Lawrence (1959) desenvolveram fórmulas da solução da equação diferencial para usar em estruturas aporticadas, considerando dois parâmetros, G_A e G_B , que avaliam a relação de rigidez dos nós inferior e superior de uma coluna, baseado nas ligações dessa barra com as vigas adjacentes do mesmo plano.

Essas fórmulas mostradas no apêndice B, são equações transcendentais, de solução trabalhosa, por isso foram então desenvolvidos dois ábacos, um para estruturas indeslocáveis e outro para deslocáveis, reproduzidos na Fig. 2.6a,b respectivamente, de onde se obtém rapidamente o valor de k , conhecidos os valores G_j dados pela expressão:

$$G_j = \frac{\sum_j (I/L)_{cl}}{\sum_j (\mu I/L)_{vg}} \tag{2.6}$$



(a) Estruturas indeslocáveis

(b) Estruturas deslocáveis

Figura 2.6 Ábacos de Julian e Lawrence (1959).

na qual I é a inércia, L é o comprimento, os subscritos (cl) e (vg) se referem aos trechos de coluna e vigas que chegam ao nó j (J_A ou J_B), e μ é um fator de ajuste ou correção.

Nas estruturas destravadas, o parâmetro μ inicialmente avaliava se a viga era ligada rigidamente ao nó ($\mu = 0.67$) ou não ($\mu = 0.5$ para rótulas) nas extremidades opostas das vigas. No caso das estruturas travadas se adotavam valores diferentes de μ para essas ligações de viga oposta, ($\mu = 2$ ou 1.5 , respectivamente), como indica Galambos (1988). Todavia, hoje o usual é adotar $\mu = 1$, na maioria dos casos (NBR 8800, 1986).

Para as colunas, o somatório relaciona o trecho inferior e superior (se houver) que chegam ao nó, e para as vigas o somatório relaciona as vigas ligadas rigidamente do lado esquerdo e direito da coluna. Para as bases engatadas se considera o valor $G = 0$, para bases rotuladas $G \cong \infty$. O AISC Manual (1978) recomenda valores práticos: $G = 1$ ou 10 , respectivamente. Note-se que as vigas com ligações rotuladas na coluna não são consideradas no somatório (!).

Yura (1971), LeMessurier (1976, 1977), Johnson (1976), Bridge e Fraser (1987), dentre vários pesquisadores, introduziram essas considerações ou apresentaram alternativas, bem como viabilizaram o emprego de k na teoria e na prática.

Esses ábacos, bem como as fórmulas das equações transcendentais indicadas por Moore II (1992), ou fórmulas aproximadas como as francesas (Dumonteil, 1992) são mostradas no apêndice B e ainda hoje são uma valiosa forma de se chegar aos

coeficientes k .

Hu e Lai (1986) desenvolveram um programa de computador usando as fórmulas de Livesley para se obter o fator k diretamente, para estruturas planas em geral incluindo ligações semi-rígidas. Procedimentos similares foram adotados em programas comerciais, como o Robot (não informado, sem data).

Porém, dadas as exigências de cálculo no sentido de adaptar as diversas circunstâncias dos projetos estruturais, foram sendo detectadas várias situações em que o uso desse procedimento tanto resultava algumas vezes em super dimensionamento, quanto havia sérios casos não conservadores.

Essas circunstâncias levaram diversos pesquisadores a tentar obter fórmulas e procedimentos corretivos para os casos mais graves, onde o uso dos ábacos produzia resultados inadequados, por exemplo:

- a. quando não são atendidas as circunstâncias previstas para o ábaco: se as cargas críticas das colunas não ocorrerem ao mesmo tempo, se a rigidez das colunas é muito diferente, se as colunas não são prismáticas, etc;
- b. quando não se pode simplesmente estabelecer se a estrutura é ou não deslocável ou indeslocável (caso de um sistema estrutural mais complexo);
- c. a coluna está em flambagem no regime inelástico;
- d. ligações não tão rígidas quanto previstas ou ligações flexíveis que possuem alguma rigidez, não se comportando como uma rótula real;
- e. incapacidade de participar no conjunto (caso das colunas-escora);
- f. efeito da coluna robusta (ou menos esbelta ou mais descarregada), travar a coluna mais flexível (mais esbelta ou mais carregada);
- g. efeito da(s) carga(s) e sua distribuição entre várias colunas de um andar;
- h. orientação variável dos eixos das colunas ligadas entre si num mesmo andar;
- i. estruturas mistas; etc.

Dentre os críticos e contribuições relacionadas, pode-se citar: Chen e Atsuta (1976), BJORHOVDE (1984), Chen e LUI (1987), SIAT-MOY (1986), DUAN e CHEN (1989), SHANMUGAN e CHEN (1995), NETHERCOT (2000) e KIM *et al.* (2000).

Por essa razão, surgiram vários processos alternativos para se obter k , procurando corrigir as divergências encontradas.

Disque (1973) contribuiu para solucionar o item (c) tendo criado uma correção para o G , usando um redutor τ que multiplica E (e transforma em E_t) nos trechos de colunas com flambagem inelástica (o que seria equivalente a um “ μ ” para colunas).

Posteriormente, Chen e Lui (1987) adotaram uma correção no comprimento L_{vg} , o que na prática representa o inverso do fator μ , para avaliar melhor o comportamento das ligações (semi-rigidez) na flambagem; e assim solucionar o item (d). Tanto Kishi *et al.* (1995) como Li e Shen (1995) propuseram também ajustes similares e novos processos, para estruturas deslocáveis e indeslocáveis, respectivamente.

Lui (1992) e Geshwinder (1994) estudaram o comportamento de coluna-escora e do conjunto para solucionar os itens (d) e (e). Tendo sido comparados alguns casos e reafirmados alguns bons resultados de LeMessurier (1977), bem como das fórmulas simplificadas de Lim e McNamara (1972). Similarmente apareceram melhorias para se obter k no trabalho de Siat-Moy (1999).

Através de muitas dessas críticas, o processo ficou extremamente complexo na medida em que apareceu uma série de correções, formas alternativas, e alertas sobre valores inadequados. Criou-se assim uma forte pressão no sentido de se dispor de processos alternativos e confiáveis para se obter k , que não sejam trabalhosos.

Até o pessoal de escritório profissional também sugere outros métodos, como avaliar a rigidez dos pórticos diretamente, (Visser, 1995).

LeMesurier (1995) fez uma revisão e apresentou fórmulas melhoradas, e o conjunto foi todo resumido e apresentado na forma de um *estado da arte* por Hajjar *et al.* (1997), embora nem todas as contribuições aqui citadas sejam tratadas.

Uma vez definido o valor do coeficiente k , os valores de N_n e N_e são facilmente obtidos, pelas curvas de flambagem das normas (NBR 8800, 1986).

A controvérsia e as dificuldades na avaliação de k , é apenas a *ponta do iceberg*, ou seja, existem vários problemas além desse coeficiente. Deve-se destacar que a fórmula de interação usa grandezas elásticas e faz uma verificação de interação que está ligada à plasticidade (Eq. 2.9), e mistura uma série de coeficientes para ajustes, inclusive dos efeitos de segunda ordem.

Também exige do engenheiro estimar ou arbitrar outros fatores. Por exemplo, C_b , que leva em conta o diagrama de momentos na barra em relação a um diagrama de momento fletor constante (Zuraski, 1992).

Avaliar se a estrutura pode ser tratada como deslocável ou não, para escolher um dos ábacos disponíveis e a influência das ligações, (Hellesland e Bjorhovde, 1996a,b); são outras fontes de controvérsia e dificuldades.

Todo esse procedimento faz parte ainda hoje tanto do AISC LRFD (1986) quanto da NBR 8800 (1986), e seu uso permanece sendo alvo de muitos debates, críticas e questionamentos, não só no exterior como também aqui no Brasil.

2.4.2 Comportamento Deslocável e Indeslocável

Este processo de dimensionamento surge com o AISC LRFD (1993), e corresponde a uma melhoria do método anterior, através do qual o processo aproximado de majorar os momentos é substituído. Trata-se de um processo em que se fazem duas análises, para cada hipótese de combinação.

Essas análises procuram avaliar o comportamento indeslocável horizontalmente, considerando a estrutura travada (ver Fig. 2.7a); e o deslocável com a estrutura destravada (ver Fig. 2.7b), com o objetivo de avaliar os efeitos de segunda ordem mais precisamente.

Acompanhando ainda a Fig. 2.7a, verifica-se que com a introdução de apoios horizontais, tornando o modelo indeslocável, é possível se avaliar o fator B_1 que representa o efeito do incremento dos esforços devido à curvatura de barra ($P\delta$), considerando basicamente apenas as cargas verticais atuando.

Em seguida, com a estrutura livre ao deslocamento, como mostrado na Fig. 2.7b, se avalia o efeito combinado com as cargas horizontais, considerando então o feito da movimentação lateral ($P\Delta$), de onde se avalia o fator B_2 . O efeito $M\Phi$, embora indicado na Fig. 2.7c, normalmente de pequeno valor, é ignorado. Em teoria de segunda ordem, pode-se avaliar $M\Phi$ a partir da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g , como se mostrará na seção seguinte; e na formulação numérica ser apresentada no capítulo 4.

Com esses fatores, seguindo o AISC LRFD (1993), os momentos amplificados fatorados serão expressos pela combinação linear:

$$M_d = B_1 M_{\text{indes}} + B_2 M_{\text{desloc}}, \quad (2.7)$$

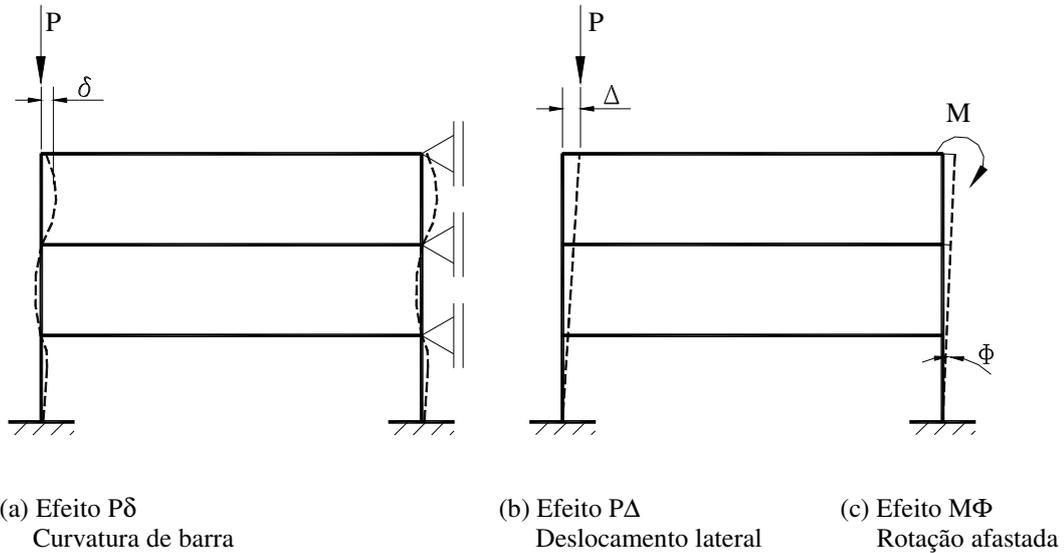


Figura 2.7 Efeitos de segunda ordem.

na qual M_{indes} e M_{desloc} são os valores obtidos nos mesmos pontos, segundo as considerações indicadas; os fatores B_1 e B_2 são expressos por:

$$B_1 = \frac{C_m}{(1 - N_d/N_e)} \quad \text{e} \quad B_2 = \left[1 - \left(\frac{\Delta_0 \sum N_d}{\sum HA} \right) \right]^{-1} \cong \left[1 - \frac{\sum N_d}{\sum N_e} \right]^{-1}. \quad (2.8a,b)$$

Observe que o fator B_1 já foi visto antes, é o fator de amplificação da Eq. 2.3. A diferença básica é que agora se usa outro fator de amplificação B_2 para levar em conta:

- a mobilidade do andar, onde Δ_0 é o deslocamento horizontal relativo do andar provocado pela carga horizontal H que se transfere desse andar para baixo, na altura do trecho de coluna A ; ou
- a reserva de carga axial das colunas no andar (trabalho conjunto) avaliado pela relação direta entre N_d e N_e das diversas colunas, que não sejam escoras.

A equação de interação agora terá então a seguinte forma:

$$\frac{N_d}{N_n} + \frac{M_d}{M_n} \leq 1 \quad (2.9)$$

na qual cada termo já foi apresentado antes. Pode-se afirmar que o coeficiente de comprimento efetivo de flambagem k continua a ser empregado, sendo permitida a sua obtenção através de uma análise de autovalores de matriz de rigidez global (MRG), como fez Liew *et al.* (1990).

Tanto White e Hajjar (1991) como Hajjar *et al.* (1997) procuraram divulgar de uma forma apropriada, justificar e conseguir uma maior participação desse tipo de análise no meio técnico profissional dos EUA, mas alguns dos questionamentos do método, em geral permanecem, além do trabalho computacional dobrado (para cada hipótese de cálculo). Duan *et al.* (1989) apresentaram uma série de considerações sobre os fatores B_1 e B_2 e seu uso. Dumonteil (1990) também criticou esses coeficientes.

Galambos *et al.* (1998), ao publicarem a 5ª edição do guia do SSRC, esclareceram amplamente o assunto. Entretanto, Galambos particularmente (“*personal opinion*”) não deixou de manifestar também a sua preferência pelo método elástico de segunda ordem, alertando sobre a dificuldade de se obter B_1 à medida que, ao inserir apoios para travar horizontalmente, modificam-se de alguma forma os diagramas de momentos nas colunas devido à continuidade. Esse efeito é mais grave em edifícios altos, o que exigirá mais perícia do engenheiro.

2.4.3 Considerações Finais

De toda forma, tendo visto as características desses dois tipos de métodos, nota-se que ambos se baseiam em avaliar a estabilidade das barras isoladamente. Observe também que essa análise de primeira ordem não traz qualquer informação sobre o problema da estabilidade global. Acontece que através do uso das verificações indicadas, da imposição de pequenos deslocamentos e das tensões inferiores à de escoamento ou à de flambagem individual (da barra); supõe-se que a estabilidade e/ou a resistência do conjunto seja garantida. Essa dedução, realmente, nem sempre é correta.

Na etapa de dimensionamento, como foi mostrado, procura-se manter a seção sem escoamento.

Fazendo então um gráfico que relacione os esforços atuantes (N , M) com os esforços limites (sem flambagens): à compressão pura N_y e à flexão pura M_p , adimensionalizando: $N/N_y \times M/M_p$, e considerando que as tensões residuais sejam da

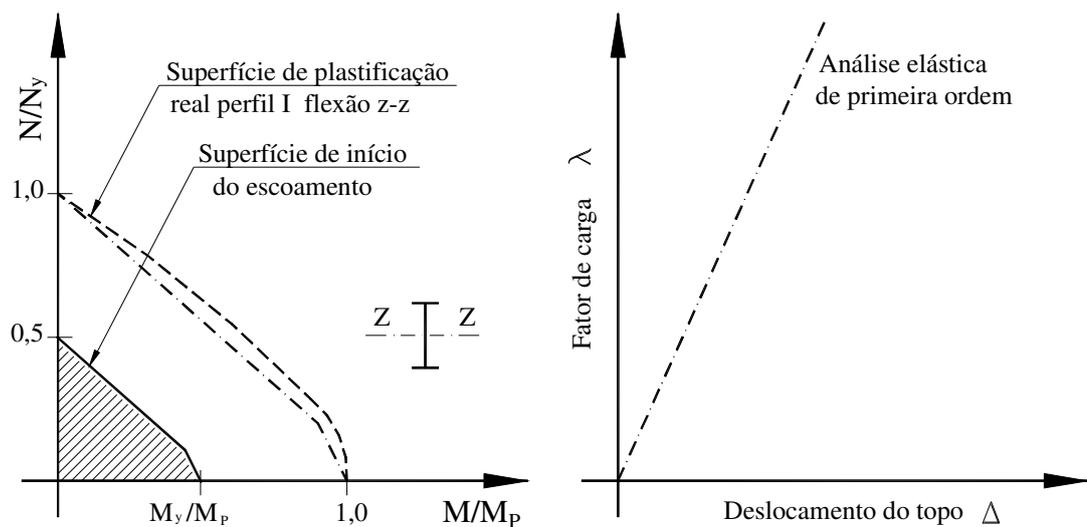
ordem de $0.5 \sigma_y$, verifica-se assim que os métodos de primeira ordem correspondem a utilizar a parte central com hachura da Fig. 2.8a, próximo à superfície de início do escoamento, pois o valor de M é majorado de forma exagerada.

No gráfico fator de carga λ versus deslocamento no topo Δ da estrutura apresentada na Fig. 2.8b, como não há qualquer perturbação no comportamento, obtém-se uma semi-reta.

Ainda hoje, em algumas situações, esses métodos são os únicos recursos disponíveis para a área técnica, razão para se esperar ainda alguma utilização dos mesmos, embora gradualmente haja uma migração dos engenheiros para as análises de segunda ordem. Essas abordagens de primeira ordem deverão continuar ocorrendo, mesmo como um cálculo preliminar a uma análise de segunda ordem (elástica ou não).

2.5 ANÁLISE ELÁSTICA DE SEGUNDA ORDEM

Esta análise considera a influência dos deslocamentos e/ou da presença dos esforços normais nas barras, ou seja da configuração atualizada, no comportamento da estrutura. A partir do modelo elástico de primeira ordem são realizadas etapas adicionais que irão levar em conta os efeitos de segunda ordem.



(a) Gráfico do dimensionamento

(b) Gráfico do comportamento

Figura 2.8 Resultado da análise elástica de 1ª ordem.

Como antes, considera-se que o material obedece à lei de Hooke, porém agora o equilíbrio do sistema é formulado com a estrutura na sua posição deslocada.

Numa formulação via MEF, pode-se escrever então a equação de equilíbrio:

$$\Sigma(\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g) \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (2.10)$$

onde o termo $(\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g)$ representa que a matriz de rigidez será composta de uma parte constitutiva elástica \mathbf{K}_e e uma parte devido ao efeito de segunda ordem, representado agora por uma matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g .

Isso significa que a geometria atualizada modifica deslocamentos e esforços, portanto, a equação anterior representa uma relação não-linear. Por isso, na solução da mesma, se exige o uso de processos iterativos, até se obter uma convergência nos resultados. Usualmente essa convergência é estabelecida baseando-se na proximidade dos valores dos vetores de deslocamentos \mathbf{U} , de duas iterações consecutivas.

Deve-se lembrar que agora não mais será válida a superposição dos efeitos, e dessa forma um processo de análise individual para cada combinação de carregamentos, deve ser realizado, ou seja um esforço computacional mais amplo.

A maior vantagem dessa análise é poder obter os valores dos diversos momentos já amplificados diretamente, sem precisar de fatores B_1 e B_2 . Quanto ao fator k , a situação fica um pouco confusa, pois nem sempre é possível desprezá-lo (usar $k = 1$).

Sobre esse aspecto, conforme White e Hajjar (1991), fica esclarecido que as curvas de flambagem do LRFD produziram resultados não-conservadores, principalmente levando em consideração que lá existe apenas uma curva única, quando em outras normas, como a NBR 8800 (1986) e o Eurocode 3 (1992), existem 4 curvas. Além disso, para estruturas destravadas, exige-se no LRFD o uso de valores k superiores a 1, principalmente no caso de colunas mais esbeltas sujeitas a cargas de compressão elevadas. White e Hajjar (1994) concordam entretanto, que em muitos casos é possível desconsiderar o $k (= 1)$, principalmente para as colunas mais robustas e num sistema apertado composto de vigas ligadas rigidamente e também robustas, sendo abordados alguns desses casos em Hajjar *et al.* (1997).

Os tipos de análises de segunda ordem sobre os quais a seguir se apresentam pequenos comentários, foram aparecendo contemporaneamente às críticas do método anterior, e possuem características diferentes.

2.5.1 Determinação de Autovalor

Neste caso, procura-se apenas determinar os coeficientes de flambagem k através da solução de problema de *autovalor* formalizado sobre a estrutura original porém considerando os efeitos dos esforços normais nas barras, através da matriz de rigidez geométrica, mostrada na subseção 2.5.3. Isso significa resolver a seguinte equação matricial:

$$(\Sigma \mathbf{K}_e - k_{\text{sistema}} \Sigma \mathbf{K}_g) \mathbf{U} = 0, \quad (2.11a)$$

cuja solução não-trivial é obtida através de:

$$\det (\Sigma \mathbf{K}_e - k_{\text{sistema}} \Sigma \mathbf{K}_g) = 0. \quad (2.11b)$$

Posteriormente, com Lui e Chen (1987), o problema passa a ser formulado usando as funções de estabilidade, (que serão abordadas na subseção 2.5.4), fazendo diretamente $\det (\Sigma \mathbf{K}_{eg}) = 0$.

A idéia básica desse processo é descrita em várias fontes, podendo ser citado Moreira (1977) que emprega a técnica de Stodola-Vianello, onde se resolve o problema dito inverso com o objetivo de determinar a(s) menor(es) carga(s) de flambagem (o menor coeficiente que provoca a singularidade da MRG) e a forma aproximada dessa configuração de flambagem, que é obtida pelo autovetor dos deslocamentos associado. Outra possibilidade é usar o método do coeficiente de Rayleigh (Bathe, 1982).

Esse processo leva a determinação do coeficiente de flambagem do sistema k_{sistema} , pois avalia a estrutura como um todo. Entretanto, em algumas situações pode se ter problemas associados à flambagem de uma barra isolada ou de subconjuntos de barras. E torna-se complicado quando ocorrem barras descarregadas ou com pequenas compressões.

O tempo computacional gasto na tarefa pode ser elevado, assim como também se pode deparar com problemas de memória, precisão e ser dependente sobremaneira do número total de graus de liberdade (GDL) do modelo, tornando-se, às vezes, injustificável. Quanto mais GDLs melhor a solução numérica e maior o tempo de processamento...

Hsieh *et al.* (1989) desenvolveu uma das versões iniciais do programa CU-Stand com esse objetivo, mas o tempo de processamento era elevado, mesmo para os computadores daquela geração. Esse foi um dos primeiros passos para o aparecimento da análise de segunda ordem.

Lui (1992) apresenta um processo alternativo de se obter os valores k , usando pequenas cargas de distúrbio, para a análise por andares (níveis), com algumas diferenças em relação aos resultados de LeMesurier (1971) e de Siat-Moy (1986). O processo é simples e possui rapidez computacional, mas exige uma análise cautelosa posterior do engenheiro; curiosamente não é comentado em Hajjar *et al.* (1997).

2.5.2 Cargas Nocionais

O surgimento deste tipo de análise está ligado ao conhecido efeito da estabilidade $P\Delta$, por isso em muitos textos da época se encontra diretamente a referência como método P-Delta (Lui, 1988).

Pode-se entender facilmente, acompanhando a Fig. 2.9a, que quando a coluna possui um deslocamento no topo (ou fora de prumo) Δ_0 , o efeito da carga axial P é gerar um momento adicional $P\Delta_0$. Assim, para uma coluna de altura L , isso equivale a aplicar um esforço horizontal no topo da mesma H , expresso por:

$$H = (P\Delta_0)/L. \quad (2.12)$$

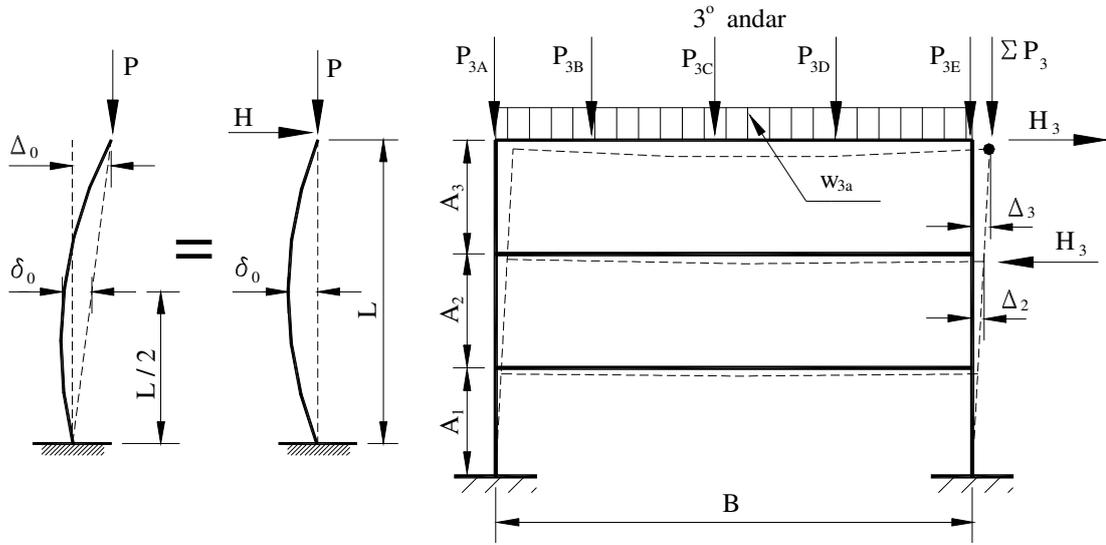
Note-se que a curvatura de barra (δ_0), não está incluída nessa transformação.

Agora, considerando uma estrutura hipotética mostrada na Fig. 2.9b. que sofre o deslocamento no topo Δ_3 e no andar inferior Δ_2 , e considerando todas as cargas verticais que atuam naquele andar, obtidas por:

$$\Sigma P_3 = \sum P_i + \sum w_i b_i = (P_{3A} + P_{3B} + \dots + P_{3E}) + w_{3a} B, \quad (2.13)$$

aparece um momento de instabilidade: $P\Delta = \Sigma P_3(\Delta_3 - \Delta_2)$, em relação ao andar inferior.

Assim, considerando válido o método do portal (Vasconcelos, 1981), esse momento provoca nas extremidades do trecho de coluna de altura A_3 , um binário de esforços cortantes horizontais H_3 , expressos por:



(a) Coluna com deslocamento

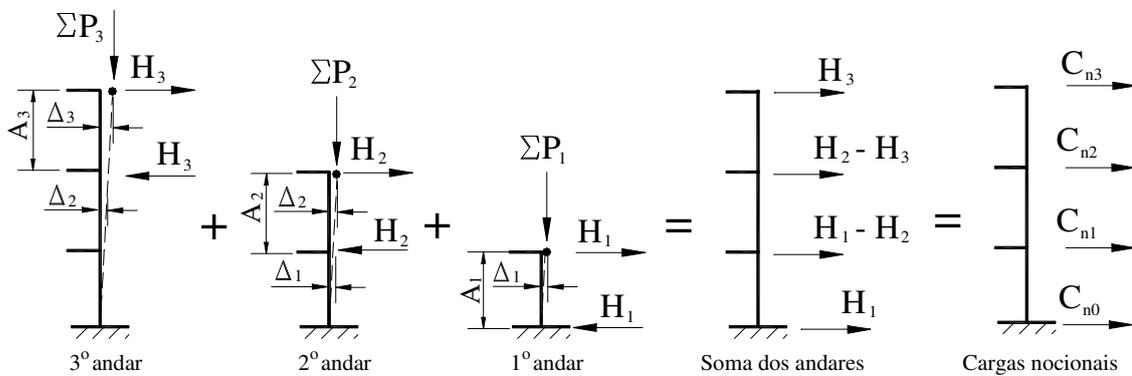
(b) Estrutura com deslocamento

Figura 2.9 Aparecimento do efeito $P\Delta$.

$$H_3 = \frac{\Sigma P_3 (\Delta_3 - \Delta_2)}{A_3} \tag{2.14a}$$

Considerando o mesmo efeito ao longo dos outros andares, como representado na Fig. 2.10a, aparecerão outros esforços similares H_2 e H_1 , que são dados por:

$$H_2 = \frac{\Sigma P_2 (\Delta_2 - \Delta_1)}{A_2} \quad \text{e} \quad H_1 = \frac{\Sigma P_1 \Delta_1}{A_1} \tag{2.14b,c}$$



(a) Binários gerados por deslocamentos

(b) Soma dos binários: cargas nocionais

Figura 2.10 Conceito das cargas nocionais.

Realizando a soma dos binários em todos os andares, surgem as denominadas *cargas nocionais* C_{ni} a serem aplicadas na estrutura, como se mostra na Fig. 2.10b.

Dessa forma, procura-se nesse método introduzir diretamente no modelo cargas horizontais fictícias, desestabilizantes, geradas ao se fazer um equilíbrio do momento de todas as cargas verticais, aplicadas num dado andar, serem arrastadas pelo deslocamento horizontal relativo deste andar.

Ao se analisar a estrutura outra vez, aplicando-se essas cargas adicionais, deverão surgir novos incrementos dos deslocamentos horizontais (provavelmente menores), e o processo deve continuar até que a diferença, entre os valores máximos obtidos dos deslocamentos entre duas iterações consecutivas, seja pequena.

Se isso não ocorre, significa que a estrutura está muito flexível, exigindo um redimensionamento e retornar ao início do processo, desde a primeira análise.

Esse método permite de forma vantajosa que com poucas iterações se estabeleça o equilíbrio, bem como os valores dos esforços finais, e pretende dispensar o uso dos coeficientes de comprimento efetivo k .

Deve-se lembrar que na NBR 8800 (1986) Anexo L, esse processo já aparece como uma alternativa simples e recomendada.

Surge aqui um impasse, porque vários teóricos europeus têm proposto majorar arbitrariamente essas cargas nocionais, não considerando os deslocamentos relativos, mas uma fração fixa, já pré-estabelecida, da carga total do pavimento. Isto é feito no Eurocode 3 (1992), onde o valor da relação é variável, chegando a 3 % de ΣP .

Outro problema é que nos EUA, o uso de cargas nocionais para a verificação da estabilidade não está previsto no AISC LRFD (1993), e, mais uma vez, Hajjar *et al.* (1997) indicam limites no seu emprego, necessidade de considerar o fator k e condições para usar $k = 1$.

Ainda nos EUA, a abordagem com cargas nocionais parece ter sido superada pelos métodos de segunda ordem que serão apresentados a seguir, principalmente por causa dos valores dos esforços finais, que costumam ser maior do que os fornecidos por outros métodos, ficando assim economicamente desinteressante.

2.5.3 Matriz de Rigidez Geométrica

Nesta análise, ao se empregar a rigidez geométrica, são incorporados os efeitos de instabilidade devidos tanto à *curvatura da barra* ($P\delta$) como ao *deslocamento lateral* ($P\Delta$), mostrados antes na Fig. 2.7. O efeito $M\Phi$ não está presente nos termos da matriz \mathbf{K}_g tradicional, embora pudesse ser incluído.

No contexto do MEF, a formulação das equações de equilíbrio para o EF de barras à flexo-compressão, baseadas nos polinômios Hermitianos, permitem a obtenção da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g (Bathe, 1982), expressa na forma:

$$\mathbf{K}_g = N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & A & B & 0 & -A & B \\ & & C & 0 & -B & -D \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & sim. & & & A & -B \\ & & & & & C \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

sendo N o esforço normal no EF, já os termos A , B , C , e D dentro da matriz valem:

$$A = 6/5L, \quad B = 1/10, \quad C = 2L/15 \quad e \quad D = -L/30. \quad (2.16a,d)$$

Como recomendam White e Hajjar (1991), ao se fazer uso desse método deve-se adotar uma malha de mais de 3 EFs por barra. Essa recomendação é baseada na avaliação da carga crítica elástica para uma barra bi-engastada com apenas um EF, cujo valor teórico seria $N_d = 4N_e$, onde N_e é a carga de flambagem elástica da mesma barra simplesmente apoiada. Se o esforço normal atuante é da ordem de grandeza de N_d , e a barra só tem um EF, $P\delta$ não é avaliado e o erro é diretamente proporcional a N_d .

Assim, quando o comprimento desse EF for $L/3$, será obtida a relação $N_d / N_e = 4 (1/3)^2 = 0.44$. É muito raro que uma barra à flexo-compressão num pórtico destravado tenha uma carga de projeto superior a $N_d = 0.4 N_e$. E assim os erros associados a $P\delta$ dessa aproximação ficam menores (aceitáveis).

As vantagens deste método são empregar uma única função (direta) na obtenção da MR e a possibilidade de se expandir a análise para estruturas 3D. Os esforços obtidos já são os críticos, podendo ser necessária alguma rotina local para diagnosticar presença de momentos maiores na extensão do EF. E o efeito não-linear já corrige todos os esforços e não apenas M (como no caso de B_1 e B_2).

Inicialmente, a estratégia puramente incremental ou a técnica direta eram usadas para a solução do sistema de equações não-lineares (Chajes e Churchill, 1987), posteriormente passou a usar a estratégia incremental-iterativa com várias técnicas: Ricks-Wempner (Torkamani *et al.* 1997) e Newton-Raphson puro ou modificado, visto que em ambos os casos, a convergência é bastante rápida (Rocha, 2000).

Podem ser citados vários pesquisadores que adotaram ou contribuíram para o estabelecimento desse método, a saber: Jennings, Mallet e Marcal em 1968, Ebner e Uciferro em 1972, Powell em 1969, Chajes e Churchill (1987), indicados em Crisfield (1991), Fertis (1993), Sonmez (1996), Torkamani *et al.* (1997) e Galvão (2000).

Hoje em dia, tanto em teorias de pequenas como grandes deformações e também em 3D, muitos programas de computador com o MEF existem usando dessa abordagem, inclusive comerciais, (SAP e suas versões, criado por Bathe, 1982).

A desvantagem dessa abordagem seria a necessidade de uma malha mais fina para poder capturar o efeito $P\delta$ de forma adequada e obter precisamente a influência de P nos momentos de extremidade. Para o último, requer uso de estratégias iterativas, já que a forma direta não costuma obter bons resultados quanto à influência do axial.

O emprego de apenas 1 EF por barra pode ser perigoso, chegando a induzir erros de até 33% (!), como demonstrado por Moreira (1977). Há pesquisadores que tem procurado contornar o problema com o uso de polinômios de ordem superior, (método denominado de *PEP*, de Zhou e Chan, 1996).

2.5.4 Funções de Estabilidade

Neste método é feita a correção da matriz de rigidez da estrutura através da inclusão do efeito das cargas axiais na rigidez das barras (funções de estabilidade) e que estão associados ao efeito da rigidez geométrica.

Como estas funções são obtidas diretamente das equações diferenciais de barras à flexo-compressão, então seus termos são mais precisos. Dessa forma, a matriz de rigidez do elemento, corrigida pelas funções de estabilidade, é expressa por:

$$\mathbf{K}_{eg} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ & B & D & 0 & -B & D \\ & & F & 0 & -D & G \\ & & & A & 0 & 0 \\ & sim. & & & B & -D \\ & & & & & F \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde os termos dentro da matriz A , B , D e F valem (Moreira, 1997):

$$A = \frac{EA_g}{L}; \quad B = \frac{2EI_z}{L^3}(C+S) - \frac{N}{L}; \quad D = \frac{EI_z}{L}(C+S); \quad (2.18a-c)$$

$$F = \frac{EI_z C}{L}; \quad e \quad G = \frac{EI_z S}{L}. \quad (2.18d,e)$$

sendo, A_g , I_z e L a área, a inércia sobre o eixo z-z da seção e o comprimento do EF, respectivamente. Os valores C e S representam as funções de estabilidade (ver Fig. 2.11), e são definidos por:

$$C = \frac{c}{g}; \quad S = \frac{s}{g}; \quad \text{com } g = (c^2 - s^2). \quad (2.19a-c)$$

Os termos (c, s) são definidos como funções do parâmetro:

$$\beta = \sqrt{\frac{\bar{N}}{EI_z}}, \quad (2.20)$$

onde \bar{N} é o valor absoluto do esforço N atuante no EF (ou barra).

As funções (c, s) são diferentes caso N seja de tração (+) ou de compressão (-). Assim se aplicam as seguintes expressões (Chen *et al.*, 1996):

$$c = \frac{\tan \beta L - \beta L}{(\beta L)^2 \tan \beta L}; \quad e \quad s = \frac{\beta L - \text{sen } \beta L}{(\beta L)^2 \text{sen } \beta L}, \quad \text{quando } N < 0; \quad (2.21a,b)$$

$$c = \frac{\beta L - \tanh \beta L}{(\beta L)^2 \tanh \beta L}; \quad e \quad s = \frac{\text{senh } \beta L - \beta L}{(\beta L)^2 \text{senh } \beta L}, \quad \text{quando } N > 0; \quad (2.22a,b)$$

$$c = 4; \quad e \quad s = 2, \quad \text{quando } N = 0. \quad (2.23a,b)$$

Nota-se então que o processo iterativo pode ser complicado para os casos com barras que possuem esforços normais pequenos, que mudem de sinal durante a iteração.

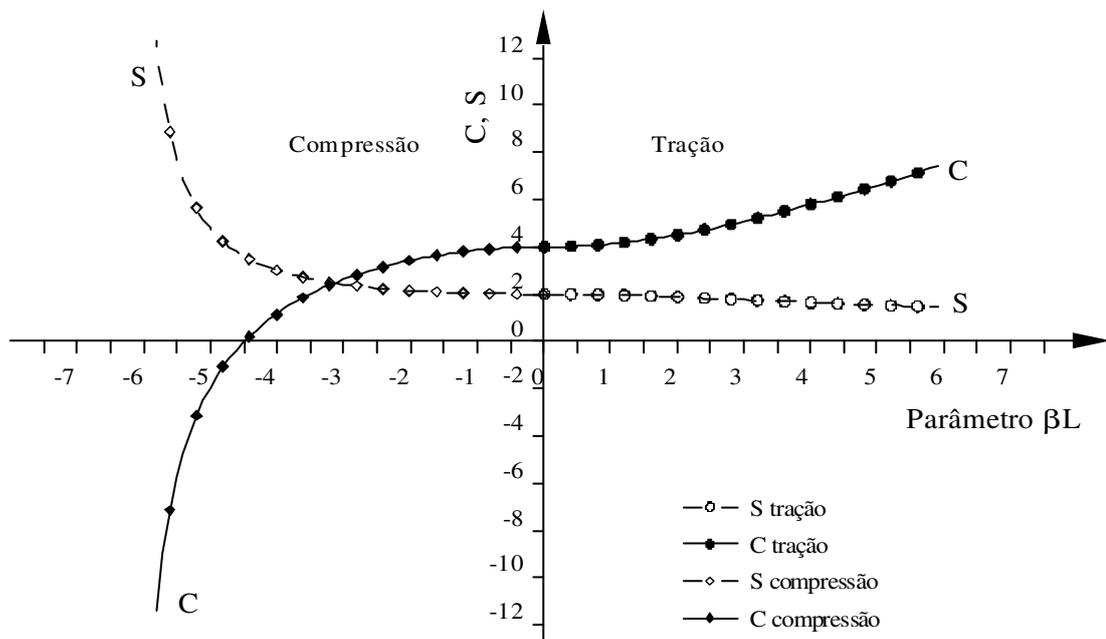


Figura 2.11 Funções de estabilidade C (βL) e S (βL).

A formulação apresentada aqui é mais simples que a de White e Hajjar (1991), na qual ocorrem também dificuldades quando $\beta = 0$. Portanto no trecho $-0.2 \leq \beta L \leq 0.2$, aparece certa instabilidade numérica nos valores dessas funções, o que costuma também atrapalhar a convergência do processo.

Para evitar esse problema, tanto Lui e Chen (1986) como Goto e Chen (1987) aproximam as funções de estabilidade usando séries de Taylor, substituindo as expressões anteriores $\sin(\beta L)$, $\tan(\beta L)$, $\sinh(\beta L)$ e $\tanh(\beta L)$, por séries de potência, utilizando 10 ou mais termos na obtenção dos valores, porém aplicando apenas uma única fórmula.

Essas funções de estabilidade são apresentadas nos trabalhos de Livesley e Chandler em 1956, Connor *et al.* em 1968, a seguir apareceram diversos trabalhos indicados em Chen *et al.* (1996), (incluindo Abel, Lui, Goto, Al-Mashary e White) e posteriormente, Wong e Tin-Loi (1990).

A vantagem desse processo está relacionada com a precisão obtida nos esforços de segunda ordem, bem como a sua robustez na avaliação de grandes deslocamentos, rotações e deformações. Por isso é considerado o método “exato” dentre todas as análises elásticas; e muitos pesquisadores utilizam apenas um EF para modelar cada barra, o que prejudica um pouco a avaliação de P δ .

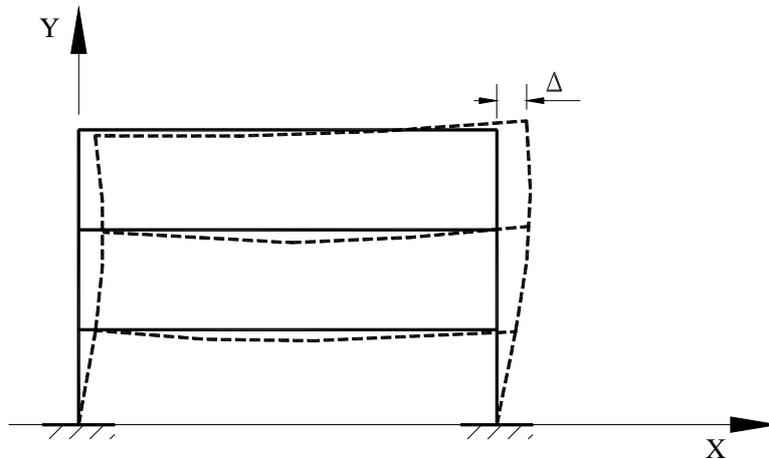


Figura 2.12 Deslocamentos na análise elástica de 2ª ordem.

Por esse método são obtidas as chamadas cargas de *flambagem elástica do sistema*, porque conseguem avaliar a instabilidade elástica do conjunto.

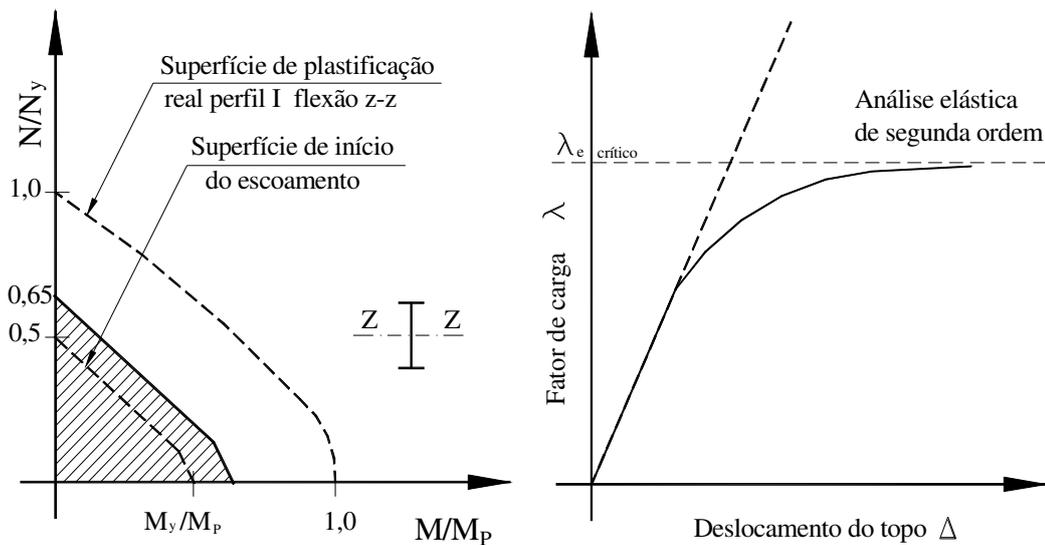
2.5.5 Considerações Finais

Como visto na apresentação dos detalhes referentes aos diversos tipos de abordagem, a análise elástica de segunda ordem produz geralmente deslocamentos maiores que os encontrados na de primeira ordem, como se indica na Fig. 2.12.

Ao se fazer o dimensionamento usando esse tipo de análise, permanece o uso das equações de interação para verificação isolada de barras no próprio plano, já vistas, porém sem o uso dos coeficientes amplificadores B_1 e B_2 . Em alguns casos também sem o uso de comprimento efetivo k (obrigatórios na análise de primeira ordem).

Com o emprego dos valores amplificados de segunda ordem corretamente encontrados e de um coeficiente de segurança médio ($1.4 / 0.9 \cong 1.55$); significa que a superfície de dimensionamento é em torno de 65 % da superfície limite do LRFD, como representado na Fig. 2.13a.

A curva de comportamento do pórtico tem como assíntota o fator de carga crítica λ_e , correspondendo ao valor da carga de bifurcação do equilíbrio, ou seja, de instabilidade elástica, como indicado na Fig. 2.13b.



(a) Gráfico do dimensionamento

(b) Gráfico do comportamento

Figura 2.13 Resultado da análise elástica de 2ª ordem.

Hajjar *et al.* (1997) tem procurado encorajar uso desse método nas atividades de cálculo e projeto, indicando que “*este procedimento pode de forma acurada apresentar os fatores amplificação de segunda ordem nos esforços e deslocamentos, para problemas com carregamentos e geometria arbitrários, incluindo estruturas complexas e irregulares 3D*”. Porém permanecem as exigências com relação ao uso do k (!).

Ultimamente, alguns pesquisadores têm procurado corrigir ou aproximar também o comportamento inelástico do sistema estrutural, usando os processos com matriz de rigidez geométrica ou funções de estabilidade, impondo cargas nocionais adicionais fictícias, que provocarão um aumento nos esforços e deformações, associados à plasticidade, (Galambos *et al.*, 1998), referindo-se ao Eurocode 3 (1992).

Isso pode ser explicado em função da maior desvantagem dessa análise, que é não poder ser aplicada em estruturas compactas ou medianamente compactas, sujeitas aos grandes esforços, onde a plasticidade pode interferir tanto no modo de flambagem do conjunto como na resistência.

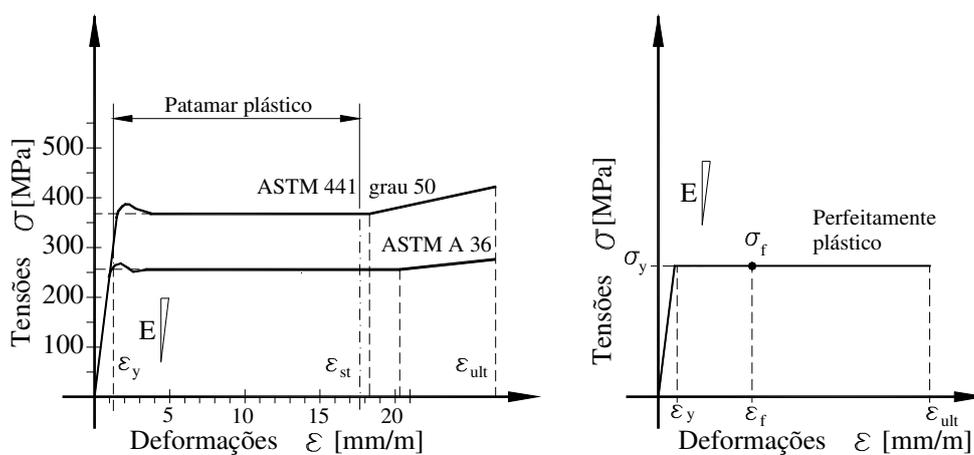
2.6 ANÁLISE INELÁSTICA DE PRIMEIRA ORDEM

Nas análises anteriores sempre foi considerado que o material obedece à lei de Hooke, durante toda análise. Porém, observando-se o diagrama de tensão-deformação dos aços, por exemplo ASTM A 36 e ASTM A 441 grau 50, adaptado de Higgins *et al.* (1971) e representado na Fig. 2.14a, facilmente se constata que este comportamento elástico existe para uma faixa muito estreita de deformações. Adicionalmente, ao entrar no regime de escoamento, o material possui, quase sempre, um patamar plástico estável que corresponde a pelo menos dez vezes a deformação de início do escoamento ($\epsilon_{st} \geq 10 \epsilon_y$), longe ainda do endurecimento sob tensão, que antecede à ruptura (ϵ_{ult}).

Por isso, nas análises inelásticas se procura aproximar o comportamento dos ensaios por meio de modelos mais simples. No caso das análises inelásticas de primeira ordem, o modelo utilizado considera o material elástico-perfeitamente plástico representado pelo diagrama da Fig. 2.14b.

Dessa forma, quando um ponto da seção inicia o escoamento, este local não mais é capaz de resistir qualquer acréscimo de tensões, ou seja: a tensão máxima será a de escoamento ($\sigma_f = \sigma_y$). E, a partir daí, o ponto sofrerá apenas deformações plásticas, ou seja: $\epsilon_p = \epsilon_f - \epsilon_y$, até atingir a deformação de ruptura (ϵ_{ult}).

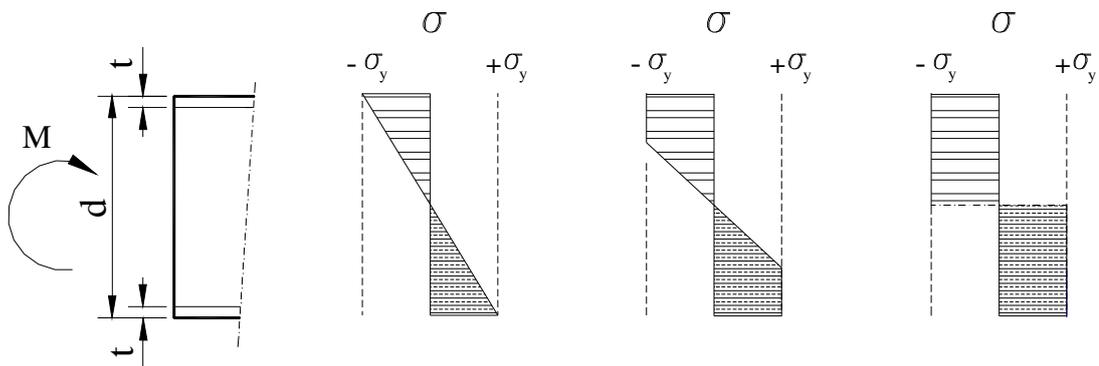
No método clássico *rígido-plástico* (R-P) é idealizado que as seções das barras da estrutura estejam solicitadas apenas por momentos fletores M , desprezando-se a carga axial, como ilustrado na Fig. 2.15a.



(a) Resultado experimental

(b) Elástico-perfeitamente plástico

Figura 2.14 Diagrama tensão-deformação.



(a) Seção com momento (b) Tensões elásticas até σ_y (c) Tensões elasto-plásticas (d) Tensões plásticas

Figura 2.15 Formação de rótula plástica na seção.

As tensões na seção mostradas na Fig. 2.15b serão elásticas (lineares) até que a fibra mais externa atinja a tensão de escoamento (σ_y).

Quando isso ocorre, atua o momento de escoamento M_y da seção, e a partir daí, como mostra a Fig. 2.15-c, parte da seção permanecerá elástica e parte ficará plástica, com tensões σ_y . Nesse estado o material é denominado elasto-plástico.

Pode-se perceber que essa plastificação vai se expandindo, até atingir ao centro da seção, quando atuará o *momento de plastificação* M_p . Nesse instante todas as tensões de flexão na seção atingem o escoamento, como na Fig. 2.15d, e então se formará uma *rótula plástica* (RP). Ou seja, essa seção passa a se comportar como uma rótula para qualquer novo acréscimo de momento, provocando assim a redistribuição dos novos esforços; e conseqüentemente, o aparecimento de outras RPs, em outras seções da estrutura.

É importante salientar que o diagrama representado na Fig. 2.15d é apenas uma aproximação, como indica Horne (1979), visto que uma curvatura infinita é impossível, o que causaria a fratura completa da viga. Experimentalmente, comprova-se que as seções adjacentes à de momento máximo apresentam grande curvatura, o que respalda as hipóteses anteriores.

À medida que isso acontece, o material começa a entrar em regime de endurecimento, a parte remanescente elástica fica muito pequena, e as tensões de cisalhamento entre os planos adjacentes com tensões de escoamento de sinal contrário provocarão a ruptura da seção. Todavia, o valor medido de M_p para aço com boa ductilidade é muito próximo ao obtido por essa representação.

O aparecimento sucessivo de rótulas plásticas ao longo da estrutura, como mostrado na Fig. 2.16a, atinge uma quantidade na qual se forma um mecanismo de plastificação, causando o seu *colapso* (Neal, 1977). O fator de carga correspondente a essa situação é fator de colapso λ_p .

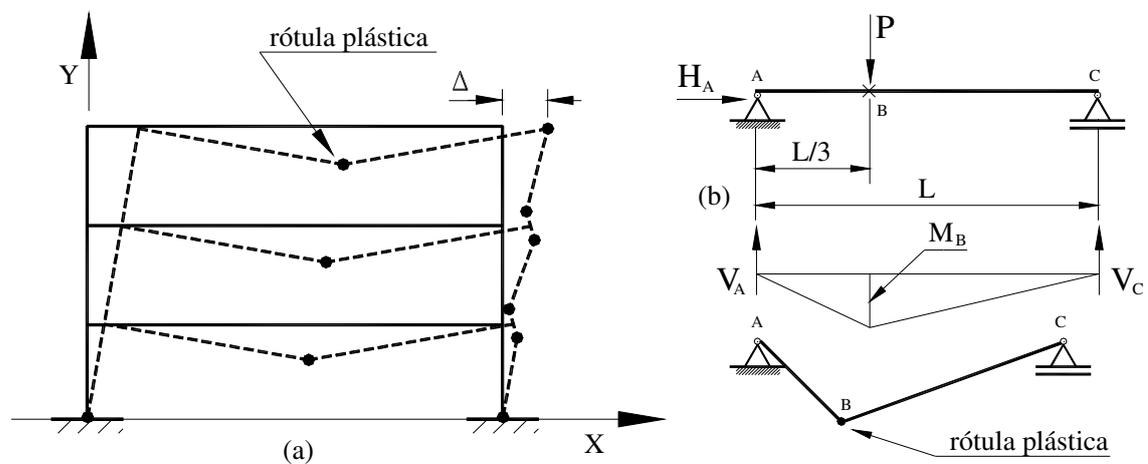
A seguir serão apresentadas algumas características dos dois principais tipos dessa análise plástica de primeira ordem, conhecida como plasticidade clássica (PC).

2.6.1 Método Rígido-Plástico

O objetivo deste método é determinar o mecanismo de colapso diretamente, ou seja, encontrar o valor da carga de colapso. Isso é realizado aplicando-se os teoremas fundamentais da plasticidade conforme apresentado nos trabalhos de Gvozdev em 1936, Greenberg e Pragger em 1949 e 1952, e também Horn em 1950, segundo Neal (1977).

Uma viga simples bi-apoiada, como a representada na Fig. 2.16b, possui apenas 3 vínculos (H_A , V_A e V_C). Dessa forma, se num ponto B atuar uma carga concentrada P, a seção sob essa carga estará sujeita ao momento máximo M_B , e quando o valor desse momento atingir M_p , ali se formará uma única rótula plástica (RP), criando um mecanismo plástico que causará o colapso imediato.

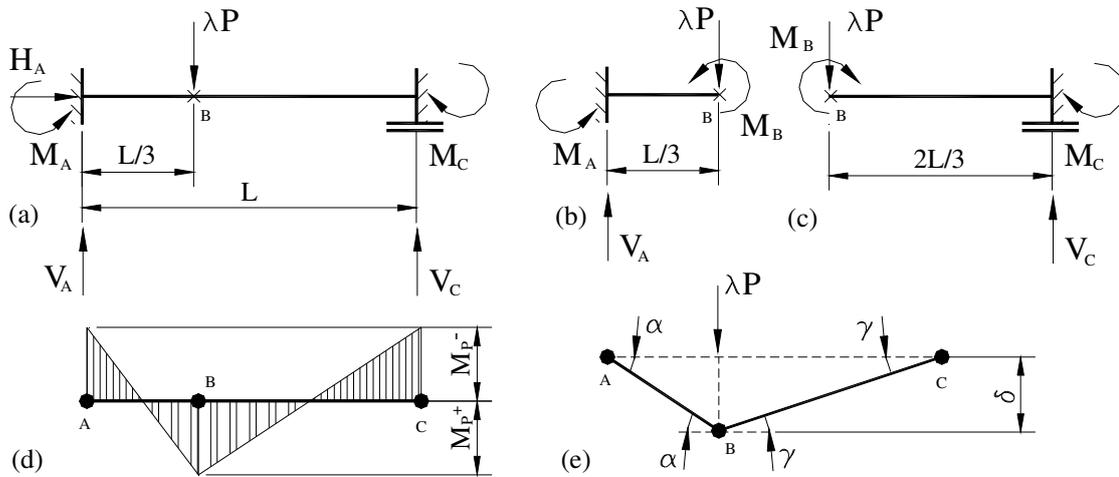
Por analogia, será agora analisada a viga bi-engastada da Fig. 2.17a, podendo ser vistos detalhes complementares deste estudo no Apêndice C. Note que essa viga possui 5 vínculos (H_A , V_A , M_A , V_C e M_C).



(a) Estrutura aperticada genérica

(b) Viga simples bi-apoiada

Figura 2.16 Colapso: formação de mecanismo.



(a) Esquema da viga com reações (b) (c) Viga seccionada no ponto de carga B
 (d) Diagrama de momentos admissível (e) Diagrama cinemático

Figura 2.17 Viga bi-engastada – teoremas da plasticidade.

Como uma estrutura para ser equilibrada precisa de no mínimo 3 vínculos, isso implica que com 3 RPs se formará o mecanismo de plastificação nessa viga (5 vínculos – 3 equações de equilíbrio + 1 para colapso).

O *teorema estático* estabelece que se houver uma distribuição de momentos estaticamente admissível, ou seja que em nenhum ponto se supera M_p , causado por um conjunto de cargas aplicadas na proporção de um fator de carga λ , esse fator deverá ser menor ou igual ao fator de colapso λ_p . Assim, fazendo um diagrama hipotético de momentos para essa viga, como indicado na Fig. 2.17d, têm-se as três RPs que deverão se formar nas regiões de maiores momentos, ou seja, nos pontos A, B e C. Portanto, se for possível uma distribuição de momentos tal que:

$$\|M_A\| = \|M_B\| = \|M_C\| = M_p \tag{2.24}$$

o fator de carga correspondente será máximo, o de colapso.

Seccionando-se a viga no ponto B, obtêm-se dois diagramas de corpo livre mostrados na Fig. 2.17b-c, que atendendo às condições de equilíbrio estático, com a condição da Eq. 2.24, ou seja: $M_A = M_C = -M_p$ e $M_B = +M_p$, vem:

$$V_A(L/3) = (M_A + M_B) = 2 M_p \therefore V_A = 6M_p/L; e \tag{2.25a}$$

$$V_C(2L/3) = (M_C + M_B) = 2 M_p \therefore V_C = 3M_p/L. \tag{2.25b}$$

Assim, através do equilíbrio das forças verticais: $V_A + V_C = \lambda P$, chega-se a:

$$\lambda \leq \lambda_{\text{est}} = 9M_P/(PL). \quad (2.26)$$

O *teorema cinemático* estabelece que para uma estrutura sujeita a um conjunto de cargas aplicadas na proporção de um fator de carga λ , qualquer mecanismo determinará um valor desse fator maior ou igual ao fator de colapso λ_p .

Seja então o mecanismo composto de 3 RPs, nos pontos de maiores momentos (A, B e C), como mostrado na Fig. 2.17e. Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais (PTV), considerando o diagrama da Fig. 2.17d, pode-se escrever:

$$-M_A(-\alpha) + M_B(\alpha + \gamma) - M_C(-\gamma) = \lambda P \delta. \quad (2.27)$$

Observe ainda que, da geometria da figura se obtém $\delta \equiv (\alpha L / 3) \equiv (\gamma 2L / 3)$, e portanto $\alpha = 2\gamma$. Expressando agora a Eq. 2.27 em função de γ , (já que γ não é trivial), e relembrando a Eq. 2.24, chega-se a:

$$6M_P(\gamma) = 2\lambda PL(\gamma) / 3. \quad (2.28)$$

De onde, aplicando o teorema cinemático, se encontra então:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{cin}} = 9 M_P / (PL). \quad (2.29)$$

Finalmente, o *teorema da unicidade* estabelece que se devido às condições da estática $\lambda \leq \lambda_{\text{est}}$ e pelas condições da cinemática $\lambda \geq \lambda_{\text{cin}}$, então o fator de colapso será:

$$\lambda_P = \lambda_{\text{cin}} = \lambda_{\text{est}} \therefore \lambda_P = 9 M_P / (PL). \quad (2.30)$$

Nesse caso, como somente podem ser formadas 3 RPs para que haja o colapso, apenas um mecanismo precisa ser verificado. No caso de estruturas mais redundantes, outros pontos de momento máximo podem aparecer, e portanto mais RPs, e assim deve-se estudar dentre os vários possíveis mecanismos, aquele que determinará o colapso.

Com algumas sofisticções complementares, este processo pode ser usado para estabelecer as equações de equilíbrio (sejam estáticas ou cinemáticas) que determinam a formação dos mecanismos, (sendo mais comum utilizar as últimas).

Essas equações são trabalhadas em conjunto, aplicando-se os fundamentos da *programação linear* (PL), isto é num problema de otimização:

- a. *minimizar* o fator de carga de colapso (determinar o menor λ , com equações da cinemática); ou
- b. *maximizar* o fator de carga (determinar o maior λ , com equações da estática).

O usual é utilizar a abordagem cinemática, determinando onde estão as RPs, e checar posteriormente o resultado, colocando-se o valor do M_P de cada RP e determinando-se o diagrama final de momentos. Em seguida verifica-se o atendimento ao teorema estático. Se isso ocorrer, a carga obtida está correta.

Dessa forma, o método *Simplex* proposto por Dantzig por volta de 1950 pode ser aplicado na a solução desse problema (Horne, 1979).

Embora efetivo em manipular centenas de milhares de incógnitas, o problema é altamente degenerativo, em parte pela linearização da superfície plástica, em parte pela discretização da geometria, como afirma Olsen (1999), que propõe um método de otimização diferente do esquema do *Dual*. Essa degeneração está relacionada com o aparecimento “acidental” dos falsos mecanismos: são valores que atendem ao sistema de equações do ponto de vista numérico, mas que na realidade não constituem a formação de um mecanismo (Davies, 2002).

De toda forma, a necessidade de se conhecer deslocamentos e o comportamento das partes mais sensíveis da estrutura, onde aparecem as primeiras RPs, levaram ao segundo tipo de análise inelástica de primeira ordem.

2.6.2 Elástico com Rótulas Plásticas: ERP

Este tipo de análise considera o material elástico, até que no ponto mais solicitado à flexão, o de momento máximo, se atinge o valor de plastificação M_P , quando surge então uma rótula plástica. A geometria será atualizada cada vez que é formada uma RP, sendo modelada como uma rótula de comprimento zero, inserida naquele local, quando na seção atua M_P .

Numa formulação via MEF, o equilíbrio do sistema estrutural pode ser descrito pela expressão:

$$\Sigma \mathbf{K}_{ep} \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{F}; \tag{2.31}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U} \text{ e } \mathbf{F} = \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}. \tag{2.32a,b}$$

Isso significa dizer que a variação dos esforços $\Delta \mathbf{F}$, e dos deslocamentos $\Delta \mathbf{U}$, é função do estado elasto-plástico (MRG $\Sigma \mathbf{K}_{ep}$) dos EFs (das barras) da estrutura. Como esse estado varia a cada acréscimo de carga, à medida que se forma(m) a(s) RP(s), então o processo será incremental, mas resulta sempre na solução de um sistema de equações lineares.

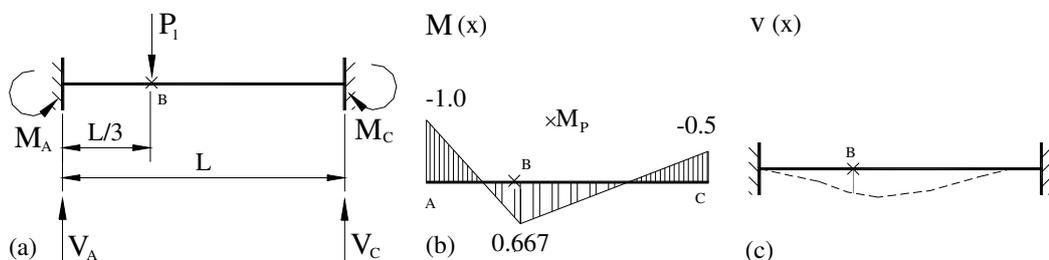
Às vezes são necessários ajustes nos incrementos ao definir o menor valor que provoca o surgimento da nova RP, para atualizar a configuração corretamente.

A origem desse método está ligada também aos trabalhos de Neal (1977) e de Horne (1979). Desde que esse método é a base para os de segunda ordem que serão tratados a seguir, será refeita a solução da obtenção da carga de colapso da viga bi-engastada mostrada antes, utilizando esse método.

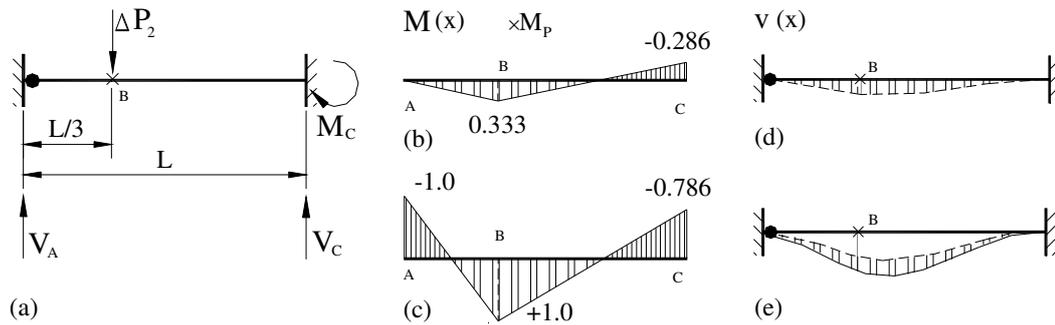
Acompanhando a Fig. 2.18a, supõe-se que atua a carga P_1 irá formar a primeira RP. Pelo diagrama de momentos elásticos da viga, na Fig. 2.18b, verifica-se que a primeira RP deverá ocorrer no apoio A, onde o momento é máximo.

Por meio de fórmulas indicadas no AISC (1978), obtêm-se os valores da primeira linha da Tab. 2.1. Deve ser observado que a relação entre os momentos é fixa, o que se fez foi arbitrar que o valor máximo seja M_p .

Agora, acompanhando a Fig. 2.19a, a viga será considerada como tendo uma rótula em A, para um acréscimo de carga ΔP_2 , que provocará o surgimento da segunda RP, na nova região mais solicitada da barra, que será o ponto B, como representado na Fig. 2.19b.



(a) Esquema estrutural (b) Diagrama de momentos (c) Diagrama de flechas
 Figura 2.18 Análise ERP da viga bi-engastada -1ª RP.



(a) Esquema estrutural (b) Diagrama de momentos (c) Diagrama de flechas
 Figura 2.19 Análise ERP da viga bi-engastada - 2ª RP.

A relação entre acréscimos de momentos em B e C é a mesma de uma viga com rótula em A e engaste em C, inclusive reações e deslocamentos.

Para se obter o estado intermediário (com P_2) da viga, após o incremento de carga, somam-se os resultados do estado anterior (com P_1) e o atual (com ΔP_2). O diagrama dos momentos que resulta desse passo, mostrado na Fig. 2.19c, é a soma dos diagramas da Fig. 2.18b e da Fig. 2.19b.

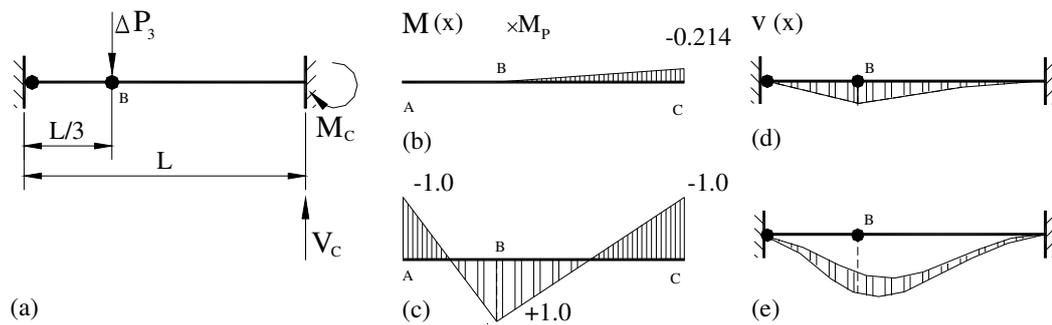
De igual forma, são computados os deslocamentos, sendo obtida a curva da Fig. 2.19e pela soma das curvas das Fig. 2.18c com Fig. 2.19d.

Os valores correspondentes são indicados na 2ª e 3ª linhas da Tab. 2.1, notando que não há acréscimo de M_A embora haja acréscimo de V_A , como esperado.

Tendo-se formado agora duas RPs na viga, para atingir o colapso basta que se forme mais uma. Com a introdução da nova RP no ponto B, a estrutura se comporta como uma viga engastada em C e livre em B, como indica a Fig. 2.20a. Ou seja, nenhum acréscimo de V_A poderá ocorrer agora.

Tab. 2.1 Carga de colapso da viga bi-engastada usando EPR.

Carga	λP	V_A	V_C	M_A	M_B	M_C	Flecha em B
P_1	27/4	5	7/4	-1	+2/3	-1/2	14
ΔP_2	27/14	1	13/14	0	+1/3	-2/7	10
P_2	243/28	6	75/28	-1	+1	-11/14	24
ΔP_3	9/28	0	9/28	0	0	-3/14	18
P_3	9	6	3	-1	1	-1	42
Fator	M_P/L	M_P/L	M_P/L	M_P	M_P	M_P	$M_P L^2 / (567EI)$



(a) Esquema estrutural (b) Diagrama de momentos (c) Diagrama de flechas
 Figura 2.20 Análise ERP de viga bi-engastada - 3ª RP.

Da mesma forma que no passo anterior, o novo acréscimo de carga ΔP_3 provocará o surgimento da última RP na nova região mais solicitada à flexão da barra, que será agora o ponto C.

Também os diagramas finais da Fig.s 2.20c e 2.20e (para P_3) se originam da soma dos diagramas das Fig.s 2.20b e 2.20d (para ΔP_3) com os correspondentes ao estado intermediário: Fig. 2.19c e Fig. 2.19e (para P_2).

Observando a Tab. 2.1, nas 4ª e 5ª linhas, podem ser verificados os passos e grandezas envolvidas, com o detalhe que o fator de colapso é o mesmo já encontrado antes na Eq. 2.30.

Sohal e Chen (1995) mostram uma estimativa mais real do deslocamento, utilizando o princípio do trabalho virtual ou do método da curvatura, o valor encontrado é $v_B = M_P L^2 / (12EI)$, 12.5% maior que o indicado na Tab. 2.1. Na última linha indicam-se os fatores multiplicadores usados em cada coluna da tabela.

Pelo exemplo, podem-se verificar facilmente as vantagens deste tipo de análise. Em primeiro lugar, determina a ordem em que são formadas as RPs, o que significa diagnosticar os pontos mais fracos da estrutura (globalmente), quanto à resistência; em segundo lugar, encontra a carga de colapso e apresenta uma estimativa dos deslocamentos que serão atingidos nessa condição.

Tin-Loi e Vimonsatit (1993) e Davies (2002) usaram do ERP com algumas melhorias para o estudo da acomodação e o efeito de cargas cíclicas.

2.6.3 Considerações Finais

Os dois métodos apresentados procuram estabelecer um limite de resistência baseado só na flexão. Dessa forma, para o dimensionamento do sistema estrutural é necessário ainda o uso das equações de interação e do coeficiente de flambagem k visto que na determinação do colapso, desconsiderou-se a presença dos esforços normais nas barras e os seus efeitos, tanto na estabilidade quanto na resistência.

Na Europa, o uso do cálculo plástico é bastante difundido, o que não acontece nos EUA. No Brasil, além de se seguir os passos dos americanos, o emprego de perfis soldados (cujas tensões residuais são reconhecidamente maiores que a dos laminados), gerou uma dificuldade adicional para a aplicação dessa análise, por não se dispor de dados ou ensaios comparativos que habilitassem o seu uso.

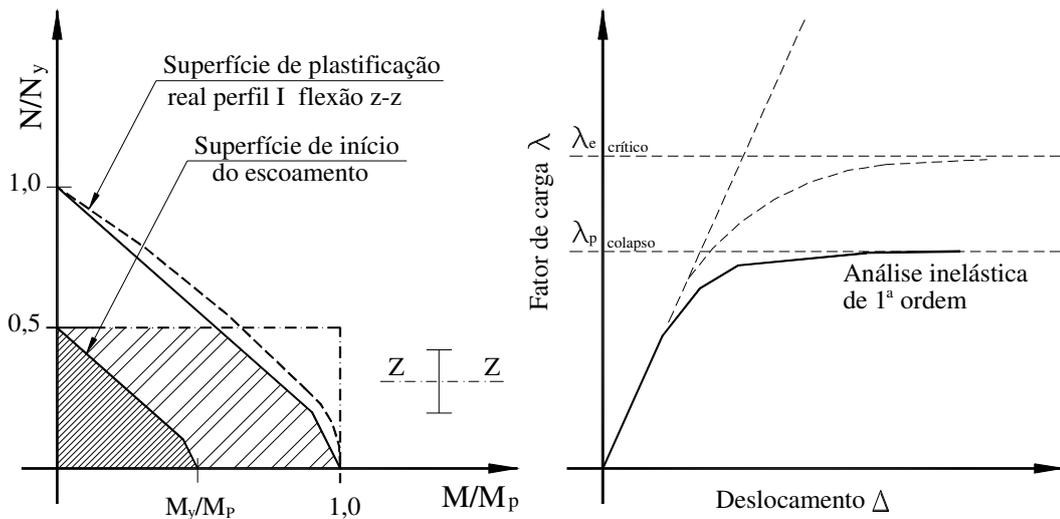
Porém, nos EUA ainda houve uma preocupação no desenvolvimento da técnica, podendo-se citar as colaborações de Higgins *et al.* (1971) bem como Chen e White (1993), já que o uso da plasticidade de primeira ordem é liberado para estruturas onde os efeitos de segunda ordem sejam desprezáveis.

Para construções de até 2 pavimentos, com cargas verticais pequenas, o ECCS (1984) libera o uso desse método, mas impõe uma série de verificações adicionais nas equações de interação, controle de flambagem local, avaliação da ductilidade e travamentos nos pontos das RPs.

Nos EUA, o dimensionamento plástico está enquadrado nas restrições do AISC LRFD (1993), sendo liberado para: vigas contínuas em pavimentos, galpões e pequenos prédios de andares múltiplos; em geral construções de menor porte.

Do ponto de vista prático, a aplicação desse método no Brasil pode ser considerada mais uma ferramenta na avaliação de capacidade, do que um recurso para dimensionamento.

Como indicado na Fig. 2.21a, na superfície de dimensionamento correspondente a esse método, pode-se tomar uma reta paralela ao eixo M/M_p , visto que se ignora a presença do esforço normal, que corresponderia ao valor limite de $N/N_y = 0.5$. Como se reproduz na Fig. 2.21b, a trajetória de equilíbrio só pode ser definida pelo ERP e será tangente a semi-reta paralela ao eixo Δ , com o valor da carga de colapso λ_p , que é a mesma definida pelo método clássico rígido-plástico.



(a) Gráfico do dimensionamento

(b) gráfico do comportamento

Figura 2.21 Resultado da análise inelástica de 1ª ordem.

Este tipo de análise também não consegue fornecer dados para o problema da estabilidade. Isso só vai ser possível, a partir do equilíbrio da estrutura na posição deformada, logo, adotando-se uma teoria de segunda ordem.

2.7 ANÁLISE INELÁSTICA DE SEGUNDA ORDEM

De maneira geral, esta análise considera o comportamento do material da mesma forma que na análise de primeira ordem: elástico-perfeitamente plástico.

Segundo Davies (2002), sua origem acontece por volta de 1960, com modestas análises procurando estudar a acomodação e o efeito de cargas cíclicas, já se identificando os falsos mecanismos.

Com o desenvolvimento de estudos e pesquisas em relação à plasticidade, chegou-se a conclusão, que em grande parte das estruturas, o fator de carga é limitado a um valor bem inferior ao da carga de flambagem elástica (λ_e) ou a carga de colapso plástico (λ_p).

Essa carga limite, conforme Galambos *et al.* (1998) “*resulta do efeito combinado de deslocamentos e deformações associados à redução de rigidez devido à plasticidade ao longo das barras e à distribuição dessa plasticidade ao longo dos diversos EFs da estrutura, de tal forma que provoca a flambagem inelástica do conjunto, antes mesmo*

do colapso por mecanismo ou da flambagem elástica”.

Estima-se, com bons resultados, usando a fórmula de Merchant-Rankine (Horne, 1979), que o valor desse fator de carga limite λ_{lim} , será aproximado pela expressão:

$$\lambda_{lim} = \lambda_p / (1 + \lambda_p / \lambda_e). \quad (2.33)$$

No caso do ECCS (1984), exige-se que $\lambda_e \geq 10 \lambda_p$ para que $\lambda_{lim} \cong 0.91 \lambda_p$ e se possa usar o ERP de primeira ordem, caso contrário obriga-se avaliar os efeitos de segunda ordem.

Todavia, o cálculo λ_{lim} dessa forma exige a determinação da carga crítica λ_e , o que significa uma análise elástica de segunda ordem, e obter o fator de colapso λ_p por uma análise inelástica de primeira ordem. A questão que imediatamente surge é: por que não determinar essa carga limite diretamente, através de uma análise inelástica de segunda ordem?

Assim, esta análise aparece com o objetivo de se determinar esse fator de carga limite com precisão.

Enquanto Vogel (1985) e Ziemian (1992) obtiveram bons resultados através da análise ERP de segunda ordem em estruturas de prédios razoavelmente regulares, King *et al.* (1992) e Liew *et al.* (1993) demonstraram que os fatores de carga limite eram superestimados nos casos em que a instabilidade da estrutura é determinada por algumas barras (e não por todo o conjunto, com várias RPs).

Ao não considerar a modificação do comportamento dos EFs (barras) a partir do início do escoamento (com a redução gradativa da rigidez e da área remanescente elástica), os valores de carga limite obtidos em certos casos são perigosamente superiores aos reproduzidos pelo método da zona plástica (ZP), relatado por McGuire (1991), White (1993) e Liew *et al.* (1994).

As exceções eram barras com esforços de compressão menores ($N \leq 0.5 N_y$), e tendo menor difusão da plasticidade ao longo do EF (barra), conforme Ziemian (1992).

Assim, para colunas trabalhando à flexo-compressão na condição de:

- a. simples curvatura com $N/N_y < 0.2$ e $A/r_z < 20$;
- b. dupla curvatura com $N/N_y < 0.3$ e $A/r_z < 40$; e
- c. colunas escura (somente compressão) com esbelteza modificada $\lambda_c < 0.4$;

(sendo a altura da coluna A , o raio de giro no eixo z da seção r_z , a esbelteza λ_c calculada pela Eq. 6.3, e as demais grandezas já foram antes descritas), os resultados são aceitáveis (com erro máximo inferior a 5 % não conservador); para os demais casos podem ocorrer erros de até 18 % (Chen *et al.*, 1996).

Esta análise surge então como uma extensão do ERP, na qual se adota agora uma superfície de plastificação, que identificará quando numa dada da seção se formará a RP, a partir do esforço normal N e momento fletor M que nela atuam. Portanto, conforme Galambos *et al.* (1998) “é baseada num critério de plastificação que avalia as tensões normais longitudinais atuantes devido à combinação de esforço axial com momento fletor, e freqüentemente, desprezando cisalhamento e torção.”

Essas superfícies de plastificação (já mostradas nos gráficos $N/N_y \times M/M_p$, como o da Fig. 2.21a), definirão a formação e o comportamento da RP. Acompanhando a Fig. 2.22, supondo que o ponto P represente o estado de uma seção hipotética plastificada, a definição de estado RP significa que se houver acréscimo da carga axial N , haveria a passagem para um ponto qualquer Q fora da superfície. Porém, como o momento plástico absorvido deverá reduzir, se aplica um vetor de correção com cargas fictícias de forma a devolver a RP à superfície, no ponto de retorno R .

Por outro lado, se houver decréscimo no axial N , o valor de M_p para atingir o estado de RP cresce, salvo descarregamento elástico.

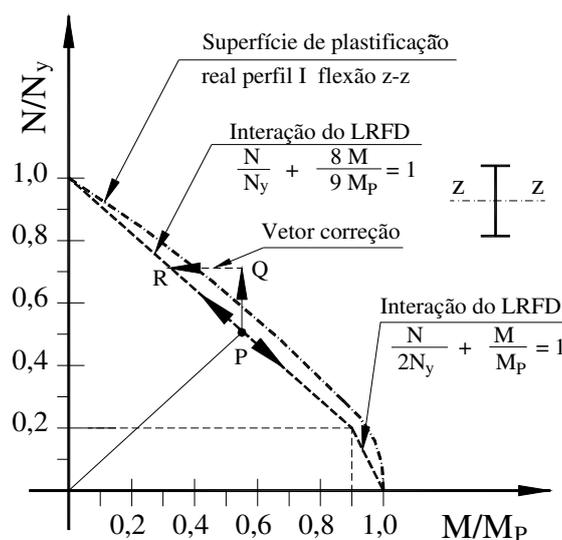


Figura 2.22 Superfície de plastificação

Dessa forma, se estabelece um padrão limite de comportamento da seção na plasticidade, impedindo que possam surgir esforços plásticos absurdos, já que a trajetória do ponto P não pode ultrapassar essa superfície, pois o material é elástico-perfeitamente plástico, (não é considerado o encruamento).

Essa superfície é normalmente estabelecida a partir das curvas de interação, como mostrado na Fig. 2.22, em que se usou a do AISC LRFD (1993) para o eixo de maior inércia (z-z) de vigas I ou H.

Outras curvas de interação foram aplicadas em outros modelos (com flexão no eixo de menor inércia de perfis I ou H), como Duan e Chen (1989), e também em alguns trabalhos (com análises em 3D, onde as superfícies de interação são mais complexas), iniciados por Orbison *et al.* em 1982. (Attalla *et al.*, 1994; Ziemian e McGuire, 2001).

O equilíbrio do sistema estrutural é então estabelecido considerando a geometria atualizada em cada etapa do processo de carregamento, ou seja, a geometria deformada participa em cada etapa da atualização da rigidez.

Reportando ao mostrado na análise elástica de segunda ordem, existem abordagens associadas à matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g bem como com as funções de estabilidade ou suas formas equivalentes (White, 1993).

O processo desta análise é incremental nas cargas e ou deslocamentos, e iterativo ao avaliar a rigidez estrutural em cada passo, assim como ao resolver o sistema de equações não-lineares, aqui são necessários: tanto uma estratégia de solução, como um critério de convergência.

Numa formulação via MEF, o equilíbrio pode ser descrito pela expressão:

$$\Sigma(\mathbf{K}_{ep} + \mathbf{K}_g) \Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{F}; \text{ ou, } \Sigma\mathbf{K}_{epg} \Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{F}; \quad (2.34a,b)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U} \text{ e } \mathbf{F} = \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}. \quad (2.34c,d)$$

No primeiro caso (2.34a), a matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g é somada à elasto-plástica \mathbf{K}_{ep} ; no segundo caso (2.37b), a matriz de rigidez \mathbf{K}_{epg} possui a parte elasto-plástica corrigida diretamente pelos efeitos das funções de estabilidade, já apresentadas.

A variação dos esforços $\Delta\mathbf{F}$ e dos deslocamentos $\Delta\mathbf{U}$ é acumulada em etapas incrementais. E como o sistema é altamente não-linear, se aplicam procedimentos iterativos que avaliam forças residuais a serem novamente equilibradas por meio de novas soluções do sistema, com as grandezas envolvidas atualizadas.

Ao se fazer a análise de segunda ordem, os efeitos da deformação da estrutura associados tanto a curvatura inicial ($P\delta$) como a fora de prumo ($P\Delta$), ambos vistos na Fig. 2.7, serão considerados na análise.

De maneira geral, entretanto, a análise elástica com RP de segunda ordem não produz resultados adequados, por isso surgem procedimentos corretivos que permitem a obtenção de bons resultados. Entre esses procedimentos destacam-se os métodos:

- elástico com rótula plástica e cargas nocionais: ERP-CN, (Liew *et al.*, 1993);
- elástico com rótula plástica refinado: ERP-R, (Liew *et al.*, 1994); e
- elástico com rótula plástica de seção montada: ERP-M, (Chan e Chui, 1997 e 2000).

Em geral, esses métodos apresentam os deslocamentos muito próximos na maioria das análises estruturais, sendo representado na Fig. 2.23 o comportamento aproximado do ERP-R. Nessa figura admite-se que foram utilizados mais EFs por barra (o que não é usual), de forma a se conhecer os deslocamentos em pontos que não são RPs.

Em contraposição aos processos que utilizam a plasticidade aproximada por RPs, denominados de plasticidade concentrada (onde o comportamento é avaliado apenas nos pontos nodais), surge um outro método, em que é considerada a difusão da plasticidade ao longo dos EFs (barras), chamado de zona plástica (ZP). Essa aproximação é a que consegue reproduzir com mais fidelidade os resultados de laboratório, por isso é considerada a “exata” entre os métodos inelásticos de segunda ordem.

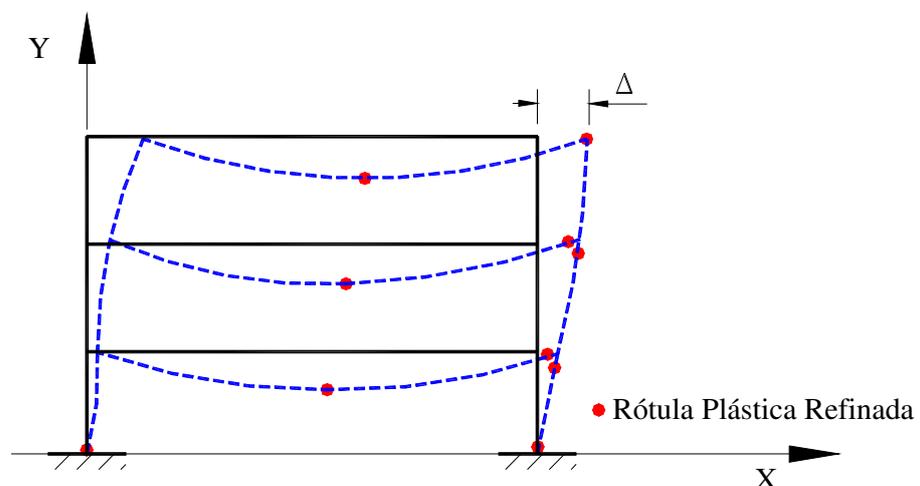


Figura 2.23 Deslocamentos no modelo ERP segunda ordem.

Entretanto, como a zona plástica exige muitos recursos computacionais, outros processos alternativos têm surgido, procurando por um lado produzir tão bons resultados quanto a ZP, e por outro reduzir o tempo e necessidades do processo eletrônico. Assim aparece o *quase RP*, entre outras aproximações (Attalla *et al.*, 1994).

Todos esses métodos pretendem definir com precisão a carga limite e dessa forma nasce o conceito da análise avançada. A seguir serão apresentados alguns detalhes dos quatro métodos principais de análise inelástica de segunda ordem, já mencionados antes.

2.7.1 ERP e Cargas Nocionais: ERP-CN

É basicamente o mesmo processo elástico de segunda ordem com rótula plástica, empregando as funções de estabilidade ou a matriz de rigidez geométrica, agora sendo inseridas diretamente as cargas nocionais gabaritadas de forma a produzir os resultados esperados.

Com o objetivo de se desenvolver a análise avançada, as cargas nocionais são aplicadas para simular tanto os efeitos da plasticidade distribuída, as imperfeições geométricas (usualmente ligadas ao fora de prumo com o efeito $P\Delta$ e a curvatura inicial com o efeito $P\delta$), como também as tensões residuais cuja modelagem nesse tipo de análise é complicada.

O Eurocode 3 (1992) exige a introdução de imperfeições geométricas, exceto se as barras em geral estiverem sujeitas a carga axial muito pequena ($N \leq 0.25 N_e$). As definições seguem Liew *et al.* (1994) e também CEC (1990), onde se tem:

- a. fora de prumo básico: $\Delta_{0*} = L/200$, corrigido por parâmetros k_c e k_s que avaliam o número de colunas envolvidas no andar e o número de andares;
- b. conforme a curva de flambagem a qual a seção do perfil pertence, o CEC (1990) atribui um arqueamento equivalente δ_{0*} , que varia de $L/400$ (curva a) até $L/150$ (curva d); já no caso do AISC LRFD (1993), o valor é fixo em $L/400$, pois só tem uma curva;
- c. as cargas nocionais que provocam $P\Delta$ são inseridas nos andares (uma para cada andar individualmente);
- d. as cargas nocionais que provocam $P\delta$ são aplicadas no meio vão das barras.

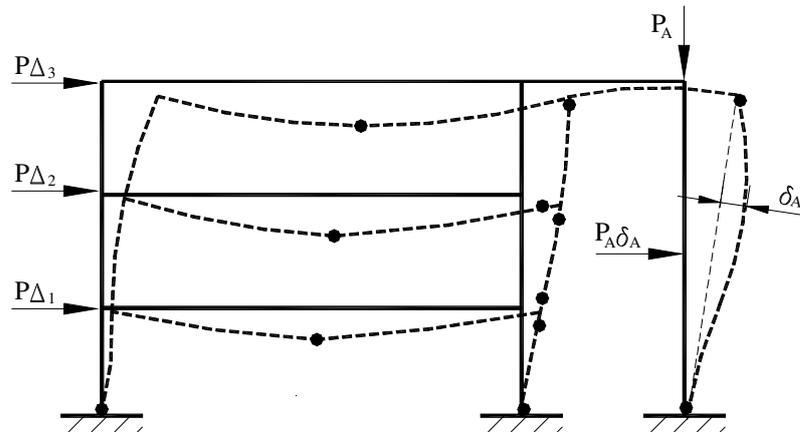


Figura 2.24 Modelo ERP 2ª ordem com cargas nocionais.

A Fig. 2.24 mostra as cargas nocionais de um modelo hipotético (representadas por $C_{ni} = P\Delta_i$, $i = 1$ a 3), observando-se também uma carga nocional que é aplicada no meio do vão da barra para simular o efeito $P\delta$, como o item (d), representada por $P_A\delta_A$. Essas indicações não são fórmulas, mas apenas referências sobre a origem dessas cargas nocionais (por exemplo: C_{nA} do efeito de P_A na curvatura da barra de segunda ordem δ_A , C_{n3} do efeito $P\Delta_3$ no andar 3).

Entre os pesquisadores que contribuíram para essa linha, destacam-se: Ziemian *et al.* (1992), Clarke *et al.* (1995) e, White e Hajjar (2000). Segundo Chen e White (1993) entre as normas que adotam este método, a canadense CSA-S16.1 é a mais adequada desde que as cargas nocionais sejam aplicadas tanto em combinações contendo somente cargas verticais, quanto nas que também existem cargas laterais.

As vantagens desse método são: a simplicidade, a rapidez de automação do modelo e obtenção de resultados. A dificuldade maior reside tanto na interpretação adequada da forma de modelar o sistema estrutural, como nas incertezas inerentes à definição dos valores das cargas nocionais, de maneira a obter resultados coerentes.

É necessário ter também uma clara avaliação de limites de aplicabilidade desse processo (casos de plasticidade distribuída que não são representáveis por essa aproximação ou de descarregamento elástico) e circunstâncias em que os momentos resultantes são exagerados.

Deve-se enfatizar também que essa abordagem numérica não é capaz de avaliar deformações axiais plásticas de forma acurada, podendo provocar resultados

inadequados em estruturas sujeitas a cargas axiais elevadas, ou combinadas com predominância do axial.

Por fim, ao exagerar na consideração de excentricidades, se pode repetir o conceito das fórmulas para colunas de Perry-Robertson (Johnston *et al.*, 1976; ver apêndice D), o que provocará um superdimensionamento desnecessário ou um dimensionamento inconsistente.

2.7.2 ERP com Refinamentos: ERP-R e ERP-M

Neste caso, o objetivo é corrigir as propriedades dos EFs (ou barras) a partir do início do escoamento, para levar em conta a degeneração da rigidez associada à plasticidade.

Para isso, à medida que o esforço axial cresce no EF após o escoamento, a rigidez é reduzida em termos de EA_e e EI_e que representam as propriedades da parte remanescente elástica (onde A_e e I_e são: a área e a inércia efetivas, respectivamente).

Este processo surge com Orbison *et al.* em 1982, descreve-se com detalhes em Chen e White (1993), Liew *et al.* (1994) e, Kim e Chen (1996), avaliando-se um parâmetro τ , representado na Fig. 2.25, que depende da curva de aproximação inelástica adotada e da relação N / N_y , conforme:

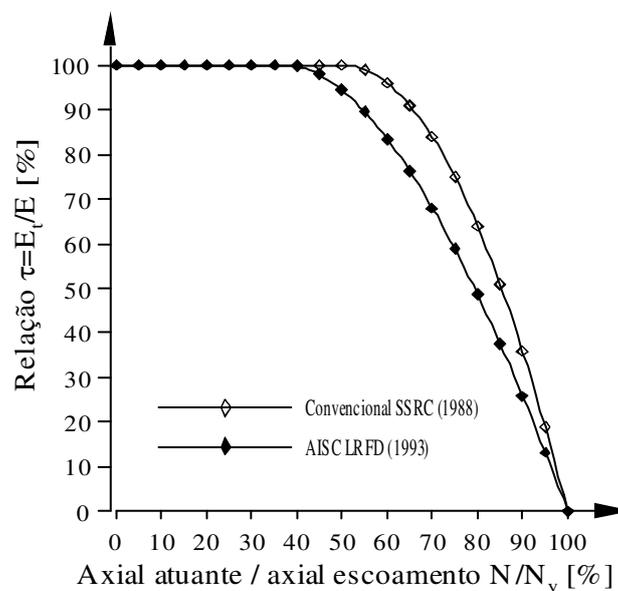


Figura 2.25 Fator τ para modelo ERP refinado.

a. a fórmula de coluna convencional do SSRC (Galambos *et al.*, 1988):

$$\tau = 4 \frac{N}{N_y} \left(1 - \frac{N}{N_y} \right), \text{ quando } N > 0.5 N_y; \tag{2.35}$$

b. a fórmula de coluna do AISC LRFD (1993):

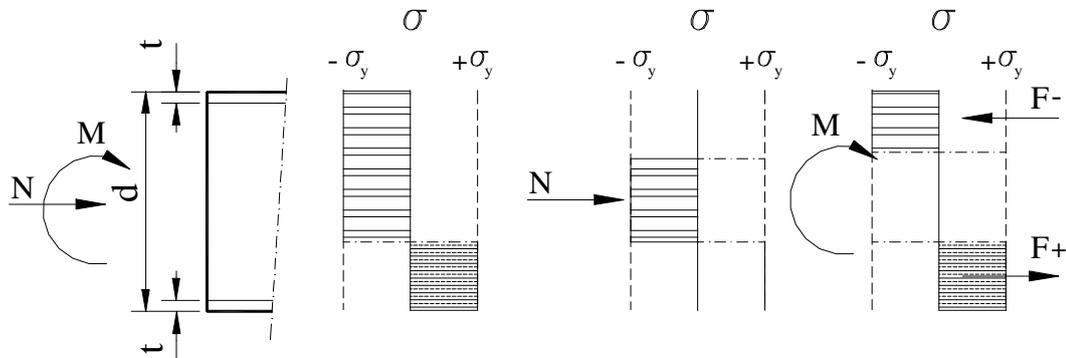
$$\tau = -2.7243 \frac{N}{N_y} \ln \left(\frac{N}{N_y} \right), \text{ quando } N > 0.39 N_y; \text{ e} \tag{2.36}$$

c. em qualquer outro caso: $\tau = 1$. (2.37)

Adicionalmente, conforme Chen e White (1993), nas fórmulas que avaliam as funções de estabilidade (ver Eq. 2.18b) deve-se usar $N^*/L = 1.14 N/L$ e o parâmetro β (ver Eq. 2.20) deverá ser corrigido para $\beta^* = 1.0678 \beta$, quando for usada a aproximação do AISC LRFD (1993). Porém a vantagem do emprego dessa aproximação é que automaticamente tanto a curvatura inicial de barra como as tensões residuais ficam implicitamente consideradas (Kim e Chen,1996).

Para se entender o conceito de plasticidade na presença do esforço normal, pode-se ver as Fig.s 2.26a,b onde se mostra o diagrama de tensões na seção, cujos valores são todos $\pm \sigma_y$, ou seja, não ocorrem tensões elásticas.

Surge daí o conceito de *seção montada* (ERP-M) mostrado na Fig. 2.26c: onde a parte central da alma da seção I resiste ao esforço normal (com a tensão σ_y diretamente) e o momento é equilibrado pelo binário gerado pelas forças resultantes ($F\cdot$), com sinais opostos, das duas partes remanescentes da seção, quando as tensões atingem σ_y .



(a) Esforços na seção (b) Efeito de N na RP (c) Equilíbrio do normal N e do momento M
 Figura 2.26 Diagramas plásticos e seção montada.

Essa última abordagem foi apresentada por Chan e Chui (1997, 2000), e permite considerar também, artificialmente, as tensões residuais, na forma de σ_r , reduzindo assim o valor do momento plástico correspondente a este normal. Com isso se determina um momento plástico reduzido M_{pr} a partir da presença de um esforço N , quando a seção é uma RP, sem precisar definir a superfície de plastificação.

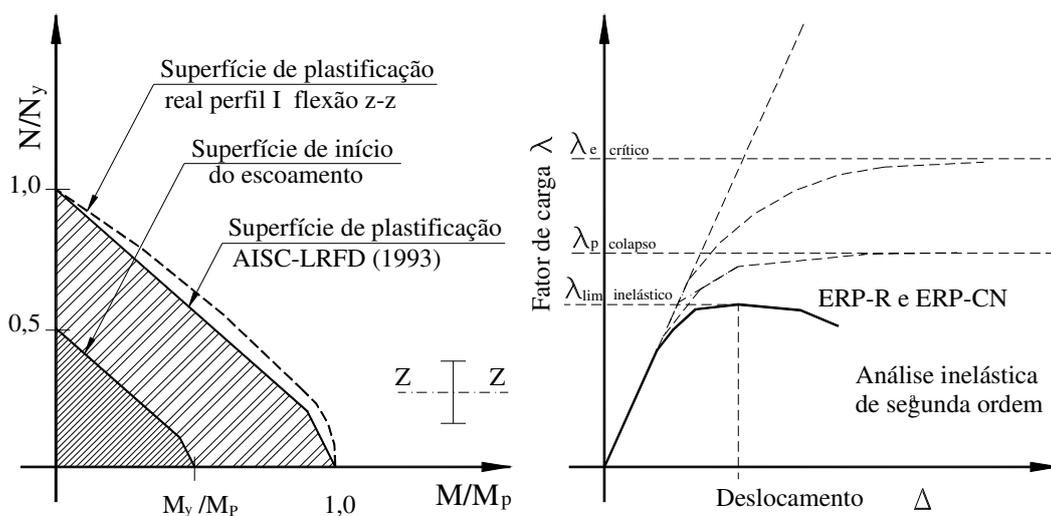
Ambos os métodos (ERP-R e ERP-M) são tratados com detalhe por Machado (2005), sendo que alguns dos seus exemplos serão também abordados no capítulo 6.

Para o dimensionamento da seção, toda a região sob a superfície de plastificação (conforme a norma ou critério) é utilizada, como mostra a Fig. 2.27a.

A Fig. 2.27b representa a curva do comportamento do pórtico que é tangente ou fica levemente acima da linha horizontal correspondente ao fator de carga limite λ_{lim} .

As vantagens dos métodos refinados são: a fácil automação, possibilidade de usar uma malha mais grossa (para se obter convergência mais rápida) e os resultados obtidos são bastante próximos do “exato”, ou daqueles provenientes do método da ZP.

As dificuldades são: a eventual presença de RP no interior do EF (abordado por Chan e Zhou, 2004) e os casos especiais de plasticidade distribuída, nos quais o uso da técnica refinada também não é suficiente. Além disso, a abordagem refinada não é adequada para os casos com reversão das deformações correspondente às hipóteses seqüenciais, ou seja: não simultâneas e nem proporcionais (Kim e Chen, 1996, 1997).



(a) Gráfico do dimensionamento

(b) Gráfico do comportamento

Figura 2.27 Comportamento dos modelos ERP refinados.

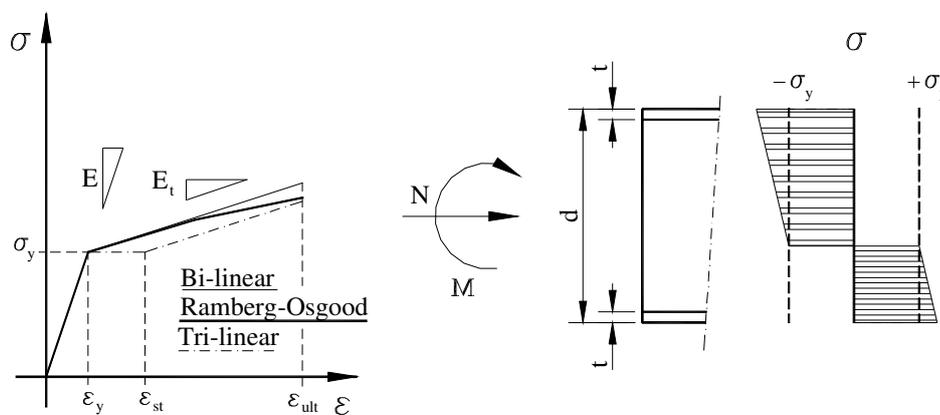
2.7.3 Método da Zona Plástica

Neste caso, a rótula puntual que representa o aparecimento da plastificação, é substituída por uma região tridimensional da barra, onde tensões iguais ou superiores às de escoamento são atingidas (dependendo do diagrama de comportamento do material da barra $\sigma \times \epsilon$, que for considerado).

No caso da zona plástica é possível modelar o encruamento, o que leva aos diagramas tensão-deformação chamados: bi-linear, tri-linear e o de Ramberg-Osgood modificado, como mostrado na Fig. 2.28a. O diagrama tri-linear tem sido adotado por alguns pesquisadores como Vogel (1985) e Clarke (1994), (pode-se ver os dados do diagrama tri-linear da AS4100 (1990), para o ASTM A 36 ou similar, no Apêndice E). Isso corresponde a um diagrama de tensões normais na seção similares aos da Fig. 2.28b, onde aparecem tensões superiores a σ_y .

Neste método procura-se monitorar o comportamento de pontos da seção, para se conhecer as tensões atuantes, se determinarem as partes com escoamento, se avaliar as deformações plásticas correspondentes, e assim corrigir as propriedades e a geometria usadas no modelo iterativamente, baseando-se nesses resultados.

Os resultados obtidos através do método ZP têm sido usados na verificação de teorias e outros métodos. Já foram desenvolvidas várias aproximações, tanto para modelos 2D (Owen e Hinton, 1980), como para modelos 3D (Teh e Clarke, 1999), de se avaliar a zona plástica.



(a) Diagramas tensão-deformação

(b) Plastificação da seção

Figura 2.28 Comportamento do material no método da zona plástica.

No contexto do MEF, este método subdivide longitudinalmente a seção em vários subelementos denominados de fatias, nos quais se monitora as tensões e deformações em cada passo incremental.

Para se avaliar esse comportamento e se obter as tensões e deformações necessárias, bem como conhecer os esforços solicitantes internos, são usadas diversas formulações, que permitem acompanhar o movimento do EF, que são normalmente as formulações Lagrangianas e/ou corrotacionais, e empregam processos de integração diversos também, entre os quais a quadratura de Gauss e a regra de Simpson.

O método da ZP aparece pela primeira vez com Ojalvo e Lu em 1961, seguido por Bernstiel e Michalos em 1963, Moses e depois Sapp em 1964, conforme Alvarez e Bernstiel (1969). Posteriormente, diversos pesquisadores como Vinnakota (1974), Kasar (1975), Chen e Atsuta (1977), Kanchanalai (1977), Swanger e Emkin (1979), El-Zanaty *et al.* (1980), Vogel (1985), Owen e Hinton (1988), White (1988), Chan e Kitipornchai (1988), Ziemian (1990), Meek e Loganathan (1990), Al-Bermani *et al.* (1988, 1992), Clarke (1994); Teh e Clarke (1998), Folley e Vinnakota (1999), Torkamani e Sonmez (2001) e Folley (2001), utilizaram este método.

A Fig. 2.29 ilustra a estrutura deformada, na qual onde apareceriam RPs concentradas puntuais existe uma região com plasticidade ao longo dos EFs, embora tenha sido representada a forma unifilar apenas, o que não é uma representação muito adequada, como se verá no capítulo 6.

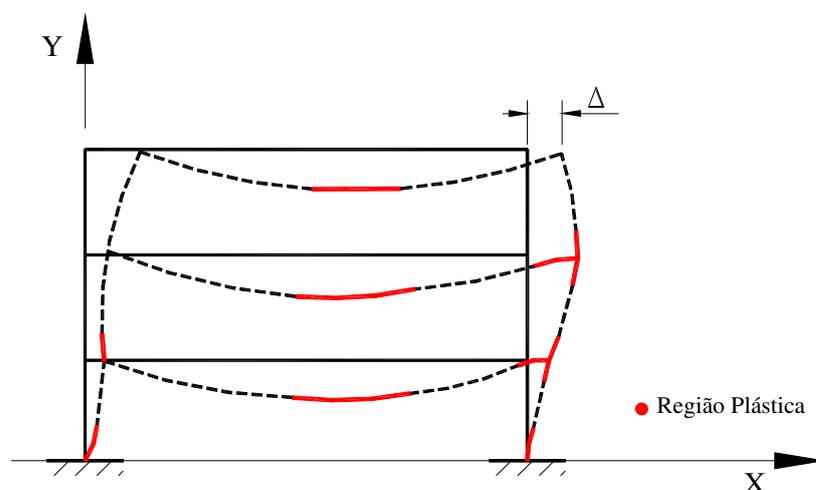


Figura 2.29 Deslocamentos no modelo de zona plástica.

A plasticidade pode assim ser acompanhada ao longo dos EFs (e barras), por todo o processo incremental, permitindo estabelecer deslocamentos, esforços, tensões e deformações com muita precisão.

A modelagem e a formulação adotadas pelos pesquisadores são bastante variáveis, porém usualmente aplicam estratégias de iteração usando Newton-Raphson.

Cook e Gerstle (1985) utilizaram apenas 9 fatias nas seções dos EFs e aplicaram o módulo secante para cada EF, em cada passo de carga.

Meek e Loganathan (1990) mostraram como a análise inelástica, no sentido de encontrar tanto o fator de carga limite como também o fator de carga de ruína final (após o fator de carga limite, na trajetória de descida), e a trajetória pós-crítica, têm apresentado dificuldades aos pesquisadores. Eles utilizaram seções de tubos retangulares e circulares (SHS e CHS, respectivamente), aplicaram o *método do segmento finito* com hipóteses de Bernoulli-Euler e adotaram a técnica de *comprimento do arco* (Ramm, 1981 e Crisfield, 1991) e a regra de Simpson para realizar as integrais de tensões e propriedades. Não consideraram, entretanto, o deslocamento do centro linear da parte remanescente elástica (!).

Torkamani e Sonmez (2001) usaram tensores de Green e teoria de viga de Timoshenko, sendo o equilíbrio formulado baseado no *princípio do incremento dos deslocamentos virtuais* de Bathe e Bolourch em 1979. Eles empregaram 20 fatias (6 em cada aba e 8 na alma) em seus modelos.

Avery e Mahendran (2000), fizeram modelos com EF casca HKS do Abakus, entre outros programas comerciais (Adina e Nastran), consideraram a *teoria do fluxo plástico associado*, adotaram superfície de escoamento de von Mises e material elástico-plástico perfeito ou com encruamento isotrópico, reproduziram bons resultados de exemplos de calibragem de Vogel (1985), incluindo ensaios experimentais.

Folley e Vinnakota (1999) usaram um modelo com 66 fatias (27 em cada aba e 12 na alma) em seus exemplos, aplicando o *princípio da mínima energia potencial* e o método de Rayleigh-Ritz para desenvolver seu EF, usando algoritmo do *passo simples* de Euler e *trabalho constante*, e consideraram o deslocamento do centro linear da parte remanescente elástica. O mesmo modelo foi adotado posteriormente por Folley (2001).

Teh e Clarke (1999) aplicaram o princípio dos trabalhos virtuais e a teoria do fluxo plástico para desenvolver um EF de Bernoulli-Euler com tensores de Green, numa

formulação corrotacional não Lagrangiana em 3D.

O método ZP é um processo muito sofisticado, mais próximo do real, e por isso mesmo exige mais recursos computacionais, para a sua aplicação.

De maneira geral, devido a sua capacidade de representar corretamente o comportamento da estrutura, o método ZP é considerado o método “exato”, sendo suas soluções usadas para gabaritar todos os demais métodos. Essa é uma das justificativas para adoção desse método também nesta dissertação.

Além da qualidade dos resultados e precisão, no caso das colunas inferiores de grandes estruturas bem como em prédios com ligações semi-rígidas em grande quantidade, o método da zona plástica consegue mostrar pontos potenciais de flambagem local e determinar as deformações adequadamente. Porém, Torkamani e Sonmez (2001) apontaram duas falhas comuns no emprego deste método, que os pesquisadores de certa forma agora procuram corrigir:

- a. não ser acurado na descrição da não-linearidade do material (plasticidade);
- b. incapacidade de capturar grandes deformações.

Eles indicaram ainda que a formulação de Hall e Challa (1994), usada extensivamente na prática, não retém as equações de equilíbrio numa configuração atualizada, o que significa o aparecimento de forças artificiais de movimento de corpo rígido e rotação. Havendo também algum debate sobre o uso de formulações Lagrangianas e corrotacionais, com relação à qualidade dos resultados.

Outra dificuldade resulta no tempo de processamento, na quantidade de memória e informações manipuladas pelo computador. Sem dúvida, a aplicabilidade para estruturas maiores (uso comercial) ainda é limitada.

Porém, Folley (2001) aponta para o futuro, no sentido de que o excessivo tempo de processamento, característico de problemas com zona plástica, pode ser resolvido por vetorização, subestruturação, condensação e processamento paralelo. Esse pesquisador conseguiu empregando uma estação Cray Y-MP 90 com 10 PCs Pentium 200 MHz calcular uma estrutura de um prédio de andares múltiplos com 15906 nós, 16200 EFs, 47700 GDLs e tendo realizado 937 incrementos de carga, gastou um pouco mais de 3 horas apenas (!).

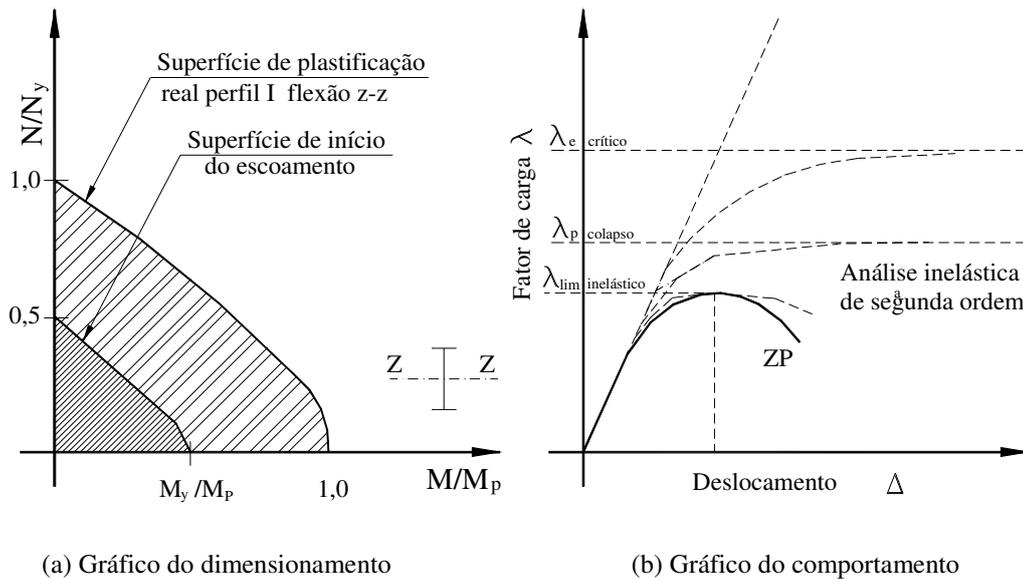


Figura 2.30 Resultado da análise com zona plástica.

Destaca-se ainda que o diagrama de dimensionamento atinge a superfície de plastificação real do perfil (e não uma função aproximada, como a equação de interação), como representado na Fig. 2.30a.

Na Fig. 2.30b se mostra a trajetória de equilíbrio, que define claramente o ponto limite, com muita precisão, sendo tangente a horizontal do λ_{lim} .

2.7.4 Quase Rótula-Plástica

Com o objetivo apenas de complementar a apresentação dos métodos inelásticos de segunda ordem, esta subseção deseja apenas indicar que existe uma série de pesquisas e outros métodos sendo desenvolvidos e propostos, em todo mundo (McGuire, 1992)

E ainda, as revistas da área de matemática aplicada e computação contêm vários trabalhos e proposições que carecem de um estudo mais profundo e investigação de uso e/ou adequação para a área estrutural metálica.

A seguir são citados alguns trabalhos mais marcantes, com ênfase direta em estruturas metálicas, ou seja:

- método das pseudocargas apresentado por Lui (1990);
- método quase rótula-plástica apresentado por Attalla *et al.* (1994);
- método com EF tipo PEP de Chan e Zhou (1994, 2004);

- d. método das pseudodeformações de Makode *et al.* (1999); e
- e. método de viga com 2 parâmetros de Morfidis e Avramidis (2002),

Por fim, tendo visto os vários tipos de análise estrutural existentes, segue-se agora para a apresentação do conceito de *análise avançada* adotado nesta dissertação.

2.8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT NBR 8800, 1986. *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*. ABCEM, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- AISC, 1972. *Manual of Steel Construction - Specification for structural steel buildings*. 7^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC, 1976. *Manual of Steel Construction - Specification for structural steel buildings*. 8^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC ASD, 1989. *Allowable Stress Design - Specification for structural steel buildings*. 9^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC LRFD, 1986. *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 1^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC LRFD, 1993. *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 2^a Ed., Chicago, Ilionois.
- Al-Bermani, FGA; Chan, SL; e outros, 1988. *Inelastic post-buckling behavior of tubular struts*.
- Al-Bermani, FGA; e Kitipornchai, S; 1992. Elasto-plastic large deformations analysis of thin walled structures. *Engineering Structures* 12 (1) pp. 108 a 127.
- Alvarez, RJ; e Birnstiel, C; 1969. Inelastic analysis of multistory multibay frames. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 95 (11) 1969, pp. 2477 a 2503.
- AS4100, 1990. *Steel Structures*. Standards Association of Australia, Sidnei, Austrália.
- Attalla, MR; Deierlein, GG; e McGuire, W; 1994. Spread of plasticity: a quasi-plastic hinge approach. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (8), pp. 2451 a 2473.
- Avery, P; e Mahendran, M; 2000. Distributed plasticity analysis of steel frame structures comprising non-compact sections. *Engineering Structures*. Vol. 22, pp. 901 a 919.
- Bathe, KJ; 1982. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Massachusetts, pp. 427.

- Bathe, KJ; e Bolourch, S; 1979. Large displacements analysis of 3D beam structures. *Int. Journal for Num. Methods in Eng.* Vol. 14, pp. 901 a 986.
- Bjorhovde, R; 1984. Effect of end-restraint on column strength – Practical applications *AISC Engineering Journal* 1/4 pp. 1 a 13.
- Bridge, RQ; e Fraser, DJ; 1987. Improved G-factor method for evaluating effective lengths of columns. *ASCE J. Struct. Division.* Vol. 113 (6), pp. 1341 a 1356.
- CEC, 1990. *EUROCODE 3 Design of steel structures.* Vol. Part 1, General rules and building rules. Commission of the European Communities, (versão de projeto).
- Chajes, A; e Churchill, JE; 1987. Nonlinear frame analysis by finite elements methods. *ASCE J. Struct. Division.* Vol. 113 (6), pp. 1221 a 1235.
- Chan, SL; e Chui, PPT; 1996. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept. *Engineering Structures.* Vol. 19 (8), pp. 628 a 636.
- Chan, SL; e Chui, PPT; 2000. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections.* Elsevier, Oxford.
- Chan, SL; e Kitipornchai, S; 1988 *Inelastic post-buckling behavior of tubular struts.*
- Chan, SL; e Zhou, ZH; 1994. Pointwise equilibrating polynomial element for nonlinear analysis of frames. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 120 (6), pp. 1703 a 1717.
- Chan, SL; e Zhou, ZH; 2004. Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member: I-one hinge along member, II- three hinges along member. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 130 (4), pp. 538 a 553.
- Chen,WF; e Atsuta, T; 1976. *Theory of beam-columns.* Vol. 1: In plane behavior and design. McGraw Hill, Nova Iorque.
- Chen, WF; Goto, Y; e Liew, JYR; 1996. *Stability design of semi-rigid frames.* John Willey and Sons, Nova Iorque.
- Chen, WF; e Kim, SE; 1997. *LRFD Steel design using advanced analysis.* CRC Press, Boca Raton.
- Chen,WF; e Lui, EM; 1987. *Structural stability – Theory and implementation.* Elsevier, Nova Iorque.
- Chen,WF; e White, DW; 1993. *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art.* SSRC, Bethlehem.
- Clarke, MJ; 1994. Em Chen, WF; e Toma, S; *Advanced analysis of steel frames, Theory*

- software and applications*. CRC Press, Boca Raton.
- Clarke, MJ e Bridge, RQ, 1995. Application of the notional load approach to the design of multistory steel frames. *Proceedings of the SSRC Annual Technical Section*, pp. 191 a 211. Cidade de Kansas, Missouri.
- Cook, NE; e Gerstle, KH; 1985. Load history effects on structural members. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 111 (3), pp. 628 a 639.
- Crisfield, MA; 1991. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 1, John Willey & sons, Nova Iorque, pp. 1 a 20.
- Davies, JM; 2002. Second-order elastic-plastic analysis of plane frame. *JSC Research*. Vol. 58, pp. 1315 a 1330.
- Disque, RQ; 1973. Inelastic K-factor for column design. *AISC Engineering Journal* 2/4 pp. 33 a 35.
- Duan, L; e Chen, WF; 1989 Design interaction equation for steel beam-columns. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 115 (5), pp. 1225 a 1243.
- Duan, L; Sohal, IS; e Chen, WF, 1989 On beam-column moment amplification factor. *AISC Engineering Journal* 4/4 pp. 130 a 135.
- Dumonteil, P; 1990 Discussion: On beam-column moment amplification factor. *AISC Engineering Journal* 4/4 pp. 168 a 172.
- Dumonteil, P; 1992. Simple equations or effective length factors. *AISC Engineering Journal* 3/4 pp. 111 a 115.
- ECCS, 1984. *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints*. Technical working group 8.2 Publicação 33. European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.
- El-Zanaty, MH; Murray, DW; e Bjorhovde, R; 1980. Inelastic behavior of multi-story steel frames. *Structural Engineering Report*. Vol. n. 83, Univ. Alberta, Canadá.
- Euler, G; 1759. *Sur les forces des colonnes*. Memoires de L'Academie Royale des Science et Belles Lettres. Vol. 13, Berlim, pp. 252. traduzido para o inglês por Van der Broek, JA; em *American Journal of Physics*. Vol. 15, (1947), pp. 309.
- Eurocode 3, 1992. *CEN EUROCODE 3 Design of steel structures*. Vol. Part 1, European Committee for Standardization, ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.
- Fertis, D; 1993. *Nonlinear mechanics*. CRC Press, Boca Raton.
- Foley, CM; 2001. Advanced analysis of steel frames using parallel processing and

- vectorization. *Computer-aided Civil and Infrastructure Eng.* Vol. 16, pp. 305 a 325.
- Foley, CM; e Vinnakota, S; 1999. Inelastic behavior of multistory partially restrained steel frames. Part I-II. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 125 (8), pp. 854 a 868.
- Galambos, TV; e outros; 1988. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 4^a Ed. John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Galambos, TV; e outros; 1998. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 5^a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Galvão, AS; 2000. *Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Gere, JM; e Weaver Jr, W; 1984. *Matrix analysis of framed structures*. 3.a Ed., Van Nostrand Reinhold, Nova Iorque, pp. 546.
- Geschwinder, LF; 1994. A practical approach to the leaning column. *AISC Engineering Journal*. 4/4 pp. 141 a 149.
- Gonçalves, R; e Camotim, D; 2004. On the application of beam-column interaction formulae to steel members with arbitrary load and support conditions. *JSC Research*. Vol. 60 pp. 433 a 450.
- Goto, Y; e Chen, WF; 1987. Second-order elastic analysis for frame design. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 113 (7), pp. 1501 a 1519.
- Hajjar, JF; e outros; 1997. *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for american steel design*. ASCE, Nova Iorque.
- Hall, JF; e Challa, MVR; 1994. Earthquake collapse analysis of steel frame. *Earthquake Engin. & Struct. Dynamics*. Vol. 23 pp. 1199 a 1218.
- Hellesland, J; e Bjorhovde, R; 1996a. Restraint demand factors and effective lengths of braced columns *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 122 (10), pp. 1216 a 1224.
- Hellesland, J; e Bjorhovde, R; 1996b. Improved frame stability analysis with effective length. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 122 (11), pp. 1.275 a 1.283.
- Higgins, TR; 1962. Column stability under elastic support. *AISC Engineering Journal*. Vol. 2/2. pp. 12.
- Higgins, TR; e outros; 1971. *Plastic design in steel- A guide and commentary*. ASCE

- WRC – *Manuals and reports on engineering practice*. Vol. 41, Nova Iorque.
- Horne, MR; 1979. *Plastic theory of structures*. 2^a Ed. Pergamon Press, Oxford pp. 179.
- Hsieh, SH; Deierlein, GG; McGuire, W; e Abel, JF; 1989. Technical manual for CU-
Stand. *Struct. Eng. Report*. Vol. 13, Cornell Univ., Ithaca, Nova Iorque.
- Hu, KK; e Lai, DC; 1986. Effective length for restrained beam-column. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 112 (2), pp. 241 a 255.
- Iwankin, NR; 1984. Note on Beam-column moment amplification factor *AISC Engineering Journal* 1/4 pp. 21 a 23.
- Johnston, BG; e outros; 1976. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 3^a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Julian, OG; e Lawrence, LS; 1959. *Notes on J and L nomographs for determination of effective lengths*. Reportagem não publicada de propriedade de Jackson & Moreland Eng. Boston, Massachusetts (1959).
- Kanchanalai, T; 1977. The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames *AISI Project 189 Rep. 2*. Univ. Texas, Austin. CE/Structural Research Lab.
- Kasar, T; 1975. *Finite element formulation for inelastic equilibrium and buckling of thin-walled structural systems*. Tese PHD, Minesota, Minneapolis.
- Kavanaugh, TC; 1962. Effective length of framed columns. *Trans. of ASCE* Vol. 127 pp. 81 a 101
- Kim, SE; e Chen, WF; 1996. Practical advanced analysis for unbraced steel frame design. Practical Advanced Analysis for Braced Steel Frame Design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 122 (11), pp. 1259 a 1274.
- Kim, SE; Kim MK; e Chen, WF; 2000. Improved refined plastic hinge analysis accounting for strain reversal. *Engineering Structures*, 22 pp. 15 a 25.
- King, WS; White, DW; e Chen, WF; 1992. Second-order inelastic analysis methods for steel-frame design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 118 (2) pp. 408 a 428.
- Kishi, N; Komuro, M; e Chen, WF; 1995, Governing equations for K-factor of columns in semi-rigid sway frames. *Steel Structures 4 PSSC*. Vol. 1, Singapura, pp. 55 a 62.
- LeMesurier, WJ; 1976. A practical method for second-order analysis. Part 1 Pin jointed systems. *AISC Engineering Journal* 4/4 pp. 89 a 96.
- LeMesurier, WJ; 1977. A practical method for second-order analysis. Part 2 Rigid

- frames. *AISC Engineering Journal* 2/4 pp. 49 a 67.
- LeMesurier, WJ; 1995. Simplified K-factors for stiffness controlled designs. *Proceedings of ASCE*, Congresso em Nova Iorque, pp. 1797 a 1812.
- Li, GQ; e Shen, ZY; 1995 Effective length of columns employed in braced steel frames. *Steel Structures 4 PSSC*. Vol. 1, Singapura, pp. 63 a 70.
- Liew, JYR; White, DW; e Chen, WF; 1993. Second-order refined plastic-hinge analysis for Frame Design. Part I-II. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 119 (11), pp. 3196 a 3237.
- Liew, JYR; White, DW; e Chen, WF; 1994. Notional load plastic-hinge method for frame design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (5), pp. 1434 a 1454.
- Lim, LC; e McNamara, RJ; 1972. *Stability of a novel building system. structural design of tall buildings*. Vol. II Bethlehem, Pensilvânia, pp. 1448 a 1461.
- Lu, WL; 1965. Inelastic buckling of steel frames. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 91 (6), pp. 185.
- Lui, EM; 1988. A practical P-delta analysis method for type Fr and Pr frames. *AISC Engineering Journal* 3/4 pp. 85 a 99.
- Lui, EM; 1992. A novel approach for K factor determination. *AISC Engineering Journal*. 4/4 pp. 150 a 159.
- Lui, EM; e Zhang, CY; 1990. Nonlinear frame analysis by the pseudo load method. *Computers & Structures*. Vol. 37 (5), pp. 707 a 716.
- Makode, PV; Corotis, RB; e Ramirez, MR; 1999. Geometric non-linear analysis of frame structures by pseudodistortion. *ASCE J. Struct. Engineer*. pp. 1318 a 1327.
- McGuire, W; 1991. Refining the plastic-hinge concept. *Proceedings 1991 Annual Tech. Section SSRC*, Chicago, Illinois.
- McGuire, W; 1992. Computers and Steel Design. *AISC Engineering Journal* 4/4 pp. 160 a 167.
- Meek, JL; e Loganathan S; 1990. Geometric and material nonlinear behaviour of beam-columns. *Computers & Structures*. Vol. 34 (1), pp. 87 a 100.
- Moore, DB; Nethercot, DA; e Kirby, PA; 1993. Testing steel frames at full scale. Appraisal of results and implications to design. *The Structural Engineer*. Vol. 71 (23/24), pp. 418 a 435.
- Moore II, WE; 1993. Discussion on Simple equations or effective length factors. *AISC*

- Engineering Journal* 1/4 pp. 37.
- Moreira, DF; 1977. *Análise matricial das estruturas*. Ed. Univ. de São Paulo, Livros Técnicos e Científicos Ed., Rio de Janeiro. pp. 390.
- Morfidis, K; e Avramidis, IE; 2002. Formulation of a generalized beam element on a two-parameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid off-sets. *Computers and Structures*. Vol. 80, pp. 1919 a 1934.
- Neal, BG; 1977. *The Plastic methods of structural analysis*. 3^a Ed., Chapman and Hall, Londres, RU.
- Nethercot, DA; 2000 Frame structures: global performance. Static and stability behaviour – General report. *JSC Research*. Vol. 55, pp. 109 a 124.
- Olsen, PC; 1999. Rigid plastic analysis of plane frame structures. *Computer Methods in applied Mechanics and Eng*. Vol. 179, pp. 19 a 30.
- Orbison, JB; McGuire, W; e Abel, JF; 1982. Yield surface applications in nonlinear steel frames analysis. *Comp. Methods in Appl. Mech. Engr*. Vol. 33 (1) pp. 557 a 573.
- Owen, DRJ; e Hinton, E; 1980. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Pineridge Press Ltd., Swansea, RU
- Queiroz, G; 1993. *Elementos das estruturas de aço*. 4^a ed. Belo Horizonte.
- Ramm, E; 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Em *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*. Bathe, KJ; Wunderlich, W; Stein, E; pp. 63 a 69. Springer, Berlim.
- Saje, M; Planinc, I; Turk, G; e Vratnar, P; 1996. A cinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames. *Comp. Meth. Appl. Mechanics and Engineering*. Vol. 144, pp. 125 a151.
- Shanmugam, NE; e Chen, WF; 1995. An Assessment of K factor formulas. *AISC Engineering Journal* 1/4 pp. 3 a 11.
- Siat-Moy, FC; 1986. K-factor paradox. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 112 (8), pp. 1747 a 1760.
- Siat-Moy, FC; 1999. An improved K-factor formula. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 125 (2) 1999, pp. 169 a 174.
- Sohal, I; e Chen,WF; 1995. *Plastic design and second-order analysis of steel frames*. Spring-Verlag, Nova Iorque.
- Sonmez, M; 1996. *Second-order analysis of elastic plane frames using finite element*

methods. MSc Tese, Univ. da Pensilvânia.

- Swanger, MH; e Emkin, LZ; 1979. A fibre element model for nonlinear frame analysis. Proceedings. 7th Congress on Electronic Computation, ASCE, Nova Iorque pp. 510 a 536.
- Teh, LH; e Clarke, MJ; 1999. Plastic-zone analysis of 3D steel frames using beam elements. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 125 (11), pp. 1328 a 1337.
- Timoshenko, SP; e Gere, JM; 1961. *Theory of elastic stability*. Mac Grow Hill, Nova Iorque, Toronto, Londres, Tóquio 2^a Ed.
- Tin-Loi, F; e Vimonsatit, V; 1993. Shakedown of frames with semi-rigid connections. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 119 (6), pp. 1694 a 1760.
- Torkamani, MAM; e Sonmez, M; 2001. Inelastic large deflections modeling of beam-columns. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 123 (9), pp. 1225 a 1235.
- Torkamani, MAM; Sonmez, M; e Cao, J; 1997. Second-order elastic plane-frame analysis using finite-element method. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 127 (8), pp. 876 a 887.
- Vasconcelos Fi., A; 1981. *Técnicas aproximadas de análise de edifícios altos*. EEUFGM, Belo Horizonte.
- Vinnakota, S; 1974. Elasto-plastic stability of frames. *Int. Civil Engineer*. Vol. III pp. 37 a 48; Israel.
- Visser, M; 1995. Steel frame stability design. *AISC Engineer. Journal* 1/4 pp. 12 a 20.
- Vogel, U; 1985. Calibrating Frames. *Stahlbau*. Vol. 10, pp. 295 a 301.
- Weston, G; Nethercot, DA; e Crisfield, MA; 1991. Lateral buckling in continuous composite bridge girders. *The Structural Engineer*. Vol. 69 (5), pp. 79 a 87.
- White, DW; 1993. Plastic hinge methods for advanced analysis of steel frames. *JSC Research*, (9), pp. 121 a 152.
- White, DW; e Hajjar, JF; 1991. Application of second-order elastic analysis in LRFD-Research to practice. *AISC Engineering Journal* 4/4 pp. 133 a 148.
- White, DW; e Hajjar, JF; 1994. The accuracy of comum stability calculations in unbraced frames and the influence of columns with effective length factors less than one. *AISC Engineering Journal* 3/4 pp. 81 a 90.
- White, DW; e Hajjar, JF; 2000. Stability of steel frames: then cases for simple elastic and rigorous inelastic analysis/design procedure. *Engineering Structures*. Vol. 22,

pp. 155 a 167.

- Wong, MB; e Tin-Loi, F; 1990. Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. *Computers & Structures*. Vol. 34 (4), pp. 641 a 646.
- Yura, JA; 1971. The effective length of columns in unbraced frames. *AISC Engineering Journal* pp. 37 a 42.
- Ziemian, RD; McGuire, W; e Deierlein, GG; 1992. Inelastic limit states design, part I: Planar frames studies; part II: Three-dimensional frame study. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 118 (9), pp. 2352 a 2568.
- Ziemian, RD; e McGuire, W; 2001. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 128 (10), pp. 1301 a 1307.
- Zhou, ZH; e Chan, SL; 1996. Refined second-order analysis of frames with members under lateral and axial loads *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 122 (5), pp. 548 a 554.
- Zuraski, PD; 1992. The significance and application of C_b in beam design. *AISC Engineering Journal*. Vol. 1 /4, pp. 20 a 25.

3 ANÁLISE AVANÇADA

SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
3.1	Introdução	75
3.2	Conceitos e Definição	75
3.3	Características e Exigências	79
3.3.1	Atributos de uma Análise Avançada	79
3.3.2	Requisitos para uma Análise Avançada	81
3.4	Aplicação da Análise Avançada nesta Dissertação	83
3.5	Aspectos Importantes Estudados nesta Dissertação	85
3.5.1	Curvatura Inicial	86
3.5.2	Fora de Prumo	88
3.5.3	Tensões Residuais	90
3.6	Referências bibliográficas	95

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem a finalidade de apresentar a análise avançada que será realizada, com suas características, exigências e formas de aplicação. Por ser um novo conceito de análise, mais amplo que o de uma simples análise estrutural, justifica-se a sua colocação num capítulo isolado.

Na seção seguinte são apresentados os conceitos envolvidos nessa análise, para se poder estabelecer uma definição precisa.

Na seção 3.3 é indicada uma série de atributos, que representam características ou limites do que é considerado numa determinada análise avançada para atingir o dimensionamento, são mostradas as exigências impostas e também como as análises inelásticas de segunda ordem podem ser qualificadas por avançadas.

Na seção 3.4, a forma de análise avançada adotada nesta dissertação é descrita, ao nível de método de análise, atributos considerados e exigências que são atendidas.

A seção 3.5 apresenta os aspectos importantes, que são: a curvatura inicial, o fora de prumo e as tensões residuais. Nessa seção são indicados: a sua origem, a forma como são introduzidos na análise, e de que forma os pesquisadores e as normas estabelecem os parâmetros ou os critérios, para a sua consideração.

Finalmente, as referências bibliográficas do capítulo são mostradas na seção 3.6

3.2 CONCEITOS E DEFINIÇÃO

No início, o termo *análise inelástica avançada* foi aplicado por alguns pesquisadores americanos, com uma certa cautela (segundo Galambos *et al.*, 1998), para indicar uma análise inelástica de segunda ordem rigorosa, onde seriam incluídos os efeitos não-lineares: físicos e geométricos.

Isso ocorreu porque a norma australiana AS4100 (1990) foi a primeira a reconhecer que, se todos os aspectos significativos do comportamento da estrutura no plano são adequadamente modelados numa análise inelástica de segunda ordem, a verificação de barras à flexo-compressão por fórmulas de interação seria desnecessária.

Assim, emprega-se “*avançada*” como um termo indicando que a análise estrutural também representa um dimensionamento, um avanço (um passo adiante) na direção de projeto estrutural.

Posteriormente à norma australiana, o Eurocode 3 (1992), com certas restrições, também aprovou a utilização da análise avançada para projeto. Os canadenses seguiram o mesmo exemplo dos europeus, editando versões de projeto da CSA S16 (1994).

Finalmente, a partir de 1993, nos EUA, vários pesquisadores, unidos em grupos (comitê técnico 117 do AISC sobre *análise inelástica e dimensionamento* e o grupo 29 do SSRC sobre *análise inelástica de segunda ordem para cálculo de pórticos*), desenvolveram uma força tarefa no sentido de realizar eventos sobre o estado da arte, estabelecer uma metodologia e divulgação de trabalhos científicos, incluindo debates e conferências, de forma a introduzir e expandir esses conceitos na área educacional e de pesquisa em geral; e assim recuperar a sua posição de hegemonia no cenário mundial.

Dentro desses grupos, destacaram-se DD White, JYR Liew e WF Chen, autores do relatório para o SSRC, em 1991, “*Towards Advanced Analysis in LRF*” (Chen e White, 1993), entre vários colaboradores, que se encarregaram de desenvolver material bibliográfico adequado, que são hoje as principais fontes de informações sobre a análise avançada. Esse material constitui a mais valiosa referência utilizada nesta dissertação (Chen e White, 1993; Liew et al., 1993 e 1994; Chen e Toma, 1994; Chen e Sohal, 1995; Chen *et al.*, 1996).

No desejo de se poder reproduzir, através da análise estrutural, os resultados obtidos por ensaios de laboratório em modelos reais, os pesquisadores verificaram que os modelos com zona plástica (ZP), quando considerando adicionalmente circunstâncias naturais dos materiais e da construção metálica (como a curvatura inicial, o fora de prumo, as tensões residuais, etc.), produziam resultados extremamente precisos.

Por outro lado, distorções constatadas ao se empregar a análise de segunda ordem elástica com rótula plástica (ERP), foram corrigidas adotando cargas nocionais ou refinamentos, e assim começaram também a reproduzir resultados comparáveis aos da ZP (com ERP-CN, ERP-R e ERP-M).

Algumas técnicas modernas como *quase rótula plástica* (QRP) de Attalla *et al.* (1994) também apareceram, pretendendo se credenciar como uma análise inelástica de segunda ordem precisa, porém não tiveram ainda um reconhecimento maior perante a comunidade científica, de forma a serem também adotadas.

Assim, hoje é possível realizar a análise avançada porque se dispõe de vários métodos capazes de efetuar uma análise inelástica de segunda ordem acurada.

Portanto, ao se determinar a carga limite usando uma análise inelástica de segunda ordem precisa, incluindo-se os efeitos das imperfeições físicas e geométricas, serão investigadas a plasticidade e a estabilidade dos pórticos.

Comprovando-se essa estabilidade e resistência do conjunto no seu plano, fica sem sentido qualquer verificação isolada de barra em relação aos esforços nesse plano (não é necessário usar as equações de interação).

Também, a carga limite assim determinada será mais precisa, semelhante a que se obtém ao realizar um ensaio de laboratório reproduzindo o modelo do problema, ou seja, é o valor de maior confiabilidade.

Então se pode definir que *a análise avançada é uma forma de análise estrutural em que se faz também a verificação da resistência e da estabilidade das barras e do conjunto, estabelecendo uma carga limite real, de maneira que não são necessárias outras verificações de barras no(s) plano(s) da análise (em 3D).*

A norma australiana AS4100 (1990) foi a que primeiro definiu o termo *análise avançada* e possibilitou sua aplicação direta na engenharia estrutural, sendo que, para isso, foi incorporada uma série de requerimentos (exigências) e se indicou também diversas características (atributos) para que se pudesse *qualificar* a análise inelástica de segunda ordem como *avançada*; isso aprimorou o novo conceito.

Trata-se assim de um conceito que nasce não apenas com o intuito de se realizar uma análise inelástica de segunda ordem precisa, mas também de se considerar nos modelos, de forma obrigatória, as chamadas imperfeições físicas e geométricas, que levam ao modelo matemático usualmente perfeito, as condições reais do dia a dia, dos limites da técnica das construções e dos materiais.

Ou seja, se procura introduzir no modelo variantes que captam o comportamento de peças metálicas reais, que poderiam sofrer ensaios em laboratório, e reproduzir resultados similares.

Como esses resultados são tão corretos quanto os que produziram as normas que são utilizadas, não haveria razão para se fazer verificações adicionais no plano da análise. Mais ainda, aos modelos que utilizam conceitos como o ERP refinado, qualquer verificação adicional seria totalmente sem sentido, já que o comportamento das barras é limitado pela superfície de plastificação, que é a equação de interação da norma, como foi visto na seção 2.7 (Fig. 2.27 da subseção 2.7.2). Além disso, ao considerar a redução

de propriedades usando o fator τ ($= E_r/E$) pelo AISC LRFD (1993) introduz-se implicitamente na análise tanto as tensões residuais quanto a curvatura inicial.

Chen e White (1993) enfatizam ainda que os valores de cargas limites obtidos dessa forma possuem já um pequeno coeficiente de segurança, resultando em valores ligeiramente menores que os da zona plástica.

Na AS4100 (1990) não foi liberado o emprego do método ERP com as cargas nocionais de forma genérica, pois essa aproximação tende a majorar somente os momentos, e nem sempre os efeitos de segunda ordem ou da plasticidade distribuída podem ser simulados como um fator de $P\Delta$.

Já o ECCS (1984) faz certa liberação, porque sabiamente as cargas nocionais incluem efeitos $P\Delta$ excessivos. Para as obras que deveriam ser calculadas com outros métodos, o resultado de empregar ERP-CN será o inevitável superdimensionamento. Com isso, o projeto ficará antieconômico, provocando então a utilização de outros métodos indiretamente. É apenas uma forma politicamente correta de atuar numa norma, que atinge vários países e profissionais: ao invés de proibir ou criar restrições, majora as cargas (!).

A norma AS4100 (1990) é a mais direta, pois habilita o emprego do método da zona plástica, e abre espaço para processos alternativos impondo exigências.

O AISC LRFD (1993) é omissivo em relação à análise avançada, e por iniciativa dos comitês inclusive o próprio Grupo 29 e o SSRC, (mantendo contato com diversos pesquisadores de outros países de forma a adquirir informações sobre o andamento e conseqüências da homologação dessa análise nesses países, para levar tal conhecimento para os EUA), estabeleceram em conjunto critérios a serem adotados para se fazer a análise avançada dentro das perspectivas do AISC LRFD (1993), cujo teor pode ser apreciado em Chen e White (1993).

Se nos EUA a possibilidade de se realizar uma análise avançada é pequena, no Brasil, com certeza, existe uma enorme distância a ser percorrida, e uma das proposições deste trabalho é iniciar uma caminhada nessa direção.

Numa visão superior, sugere-se (o início de debates, palestras e contatos com outros pesquisadores estrangeiros...), tudo enfim com o objetivo de no futuro se editar *Diretrizes para a Análise Avançada na NBR 8800*, liberando também o uso desta ferramenta para os engenheiros do nosso país.

3.3 CARACTERÍSTICAS E EXIGÊNCIAS

Portanto, para se realizar uma análise avançada, diversas atribuições podem ser estabelecidas e várias exigências deverão ser cumpridas.

Chen e White (1993) forneceram um sumário de atributos que podem ser considerados em uma análise avançada.

Por outro lado, também são exigidos requerimentos especiais para se qualificar uma análise inelástica de segunda ordem, de forma a poder utilizá-la como uma análise avançada. Nas subseções seguintes, serão indicados primeiramente os atributos, e em seguida serão indicados os requerimentos necessários para uma análise avançada.

3.3.1 Atributos de uma Análise Avançada

Os atributos são características ou considerações que serão adotadas ao se desenvolver uma dada análise avançada. Esses atributos serão listados a seguir, sendo sua origem relacionada ao famoso *memorando técnico número 5*, editado pelo SSRC em 1979 (Vinnakota, 1982), com os complementos tanto de Birnstiel e Iffland em 1980, McGuire em 1992, como Chen e White (1993), indicados por Galambos (1998).

Nesta dissertação, alguns atributos foram inseridos nessa lista com o objetivo de atualização, e é possível incluir vários outros no futuro.

Entretanto, mesmo com os poderosos recursos computacionais hoje disponíveis, parece impossível incluir todos esses atributos numa análise numérica estrutural.

De fato, isso é a tarefa maior da engenharia, e nem todos esses atributos estão presentes ou precisarão ser considerados em todos os projetos.

O objetivo aqui é apenas elucidar e mostrar a vastidão de aspectos a serem avaliados e considerados, que torna a total submissão aos resultados obtidos através de análises computacionais, algo ainda longe da realidade.

No mínimo, alguns desses atributos devem ser necessariamente incluídos na análise avançada. Tais atributos definem os limites ou características dos resultados obtidos.

1- Não-linearidade geométrica

- a. $P\Delta$: efeito da carga axial atuando nos deslocamentos associados com a rotação da corda que liga os nós extremos do EF ou barra;
- b. $P\delta$: efeito da carga axial atuando nos deslocamentos associados à curvatura do EF ou barra;
- c. efeito Wagner: associado à carga axial e aos momentos fletores atuando nos deslocamentos relacionados à torção do EF ou barra;
- d. encurtamento devido à curvatura: efeito da curvatura nos deslocamentos longitudinais das extremidades do EF ou barra;
- e. encurtamento no deslocamento lateral: efeito de grandes rotações da corda do EF ($M\Phi$) nos deslocamentos longitudinais das extremidades do EF ou barra;
- f. flambagem lateral por torção;
- g. flambagens locais e distorções locais;
- h. interação entre flambagem local e flambagem da barra (ou EF);
- i. efeitos do bi-momento e do empenamento da seção;
- j. condições de apoio e vínculos;
- k. dimensões de linhas de centro e detalhes de ligações; etc.

2- Não-linearidade física

- a. variação das propriedades físicas: real \times nominal;
- b. escoamento: plasticidade concentrada (RP) ou distribuída (ZP);
- c. endurecimento sob tração e leis de encruamento;
- d. descarregamento elástico;
- e. efeito da plasticidade multi-dimensional (2D e 3D);
- f. influência do histórico: seqüência do carregamento na plasticidade dependente da trajetória;
- g. plasticidade cíclica: acomodação elástica, efeito Bauschinger;
- h. encruamento cíclico, colapso incremental e fadiga de baixo ciclo;
- i. envelhecimento sob tensão e fragilidade à frio;
- j. efeitos térmicos e condições de incêndio;
- k. efeito de punção e concentração de tensões;

- l. efeitos do rasgamento, do cisalhamento e do esmagamento;
- m. efeito da vibração e fadiga;
- n. efeito e comportamento conjugado com as fundações, incluindo recalques; etc.

3- Atributos físicos

- a. imperfeições geométricas iniciais: fora de prumo, curvatura inicial, distorção da seção, excentricidades das ligações, etc;
- b. tensões residuais iniciais;
- c. travamento à torção positiva da extremidade da barra (ou EF);
- d. travamento à torção negativa da barra (ou EF);
- e. simetria ou assimetria da seção;
- f. barras prismáticas ou não;
- g. localização e rigidez dos travamentos;
- h. interconexão composta com as lajes dos pisos;
- i. enrijecimento ou não de painéis;
- j. ligações e seu comportamento: diagrama momento \times rotação, capacidade de rotação, momento último, resistência, ductilidade, excentricidades, entre outros;
- k. ponto de aplicação, distribuição, forma e duração das cargas;
- l. cargas conservativas ou não;
- m. seqüência de montagem e construção; etc.

3.3.2 Requisitos para uma Análise Avançada

Não é correto denominar qualquer análise inelástica de segunda ordem, por mais acurada que seja, como uma *análise avançada*. Para isso, como ressalta Chen e White (1993), uma série de exigências deve ser cumprida, ou seja:

- a. usar uma formulação matemática rigorosa fundamentada em teorias bem conhecidas da mecânica de sólidos e dos materiais;
- b. as resistências, as deformações, as distribuições internas dos esforços, tensões, etc. devem ser confrontadas previamente com resultados de bancos de prova: ensaios de escala real ou pórticos de calibragem, contidos na literatura

- mundial, (Vogel, 1985; El-Zanaty *et al.*, 1980; Chen e Toma, 1994). A carga limite encontrada, seja de resistência ou de estabilidade, não poderá ser superior em 5% (não conservativa) aos resultados dos bancos de prova;
- c. deverão ser incluídos os efeitos de segunda ordem $P\Delta$ e $P\delta$ no mínimo;
 - d. os esforços solicitantes nas seções não podem violar a resistência máxima definida pela condição de plasticidade completa da seção;
 - e. a plasticidade distribuída deve ser avaliada tanto na deformação axial como na deformação por flexão ou combinadas; e quando a seção solicitada está num ponto da superfície de plastificação, acréscimos de esforço axial devem provocar a redução do momento plástico correspondente;
 - f. as imperfeições geométricas e os efeitos das tensões residuais devem ser incluídos, seja de forma implícita (superfícies de plastificação baseadas em curvas de interação, como a do AISC LRFD, 1993) ou de forma explícita.

O objetivo deste trabalho, como já mencionado antes, é exatamente avaliar essa última exigência, isto é: os efeitos das imperfeições geométricas (na forma de fora de prumo e curvatura inicial das barras apenas) e das tensões residuais em estruturas mais simples e mais sensíveis (as colunas isoladas, primeiramente e, em seguida, os portais).

São admitidas apenas três linhas principais ou metodologias para se realizar uma análise estrutural considerando os efeitos inelásticos do aço, quais sejam:

- a. o método da zona plástica (ZP), como já foi definido no capítulo anterior, no qual a estrutura é modelada por uma malha mais refinada, onde se pretende monitorar a formação das zonas plásticas. Trata-se de um método mais preciso, porém exige grande esforço computacional. Destacam-se nessa linha, os trabalhos de Clarke (1994), Foley e Vinnakota (1999) e Folley (2001). No Brasil, os trabalhos de Lavall (1996) e Pimenta (1996) empregam esse método, mas com a utilização de uma aproximação denominada de *Técnica das Fatias*, que também será adotada no presente trabalho;
- b. o método elástico com rótula plástica e cargas nocionais (ERP-CN) para se aproximar os efeitos da plasticidade distribuída, (ECCS, 1984); sujeito às restrições já apresentadas. Embora o emprego do método de rótula plástica seja simples, a dificuldade dessa abordagem reside na introdução de cargas nocionais cuja avaliação é complexa; nessa linha podem ser encontrados os

trabalhos de Clarke e Bridge (1995) e Liew *et al.* (1994);

- c. o método elástico com rótula plástica e refinado (ERP-R), onde se considera a degeneração da rigidez da barra, com o módulo tangente sendo usado para reduzir as propriedades da seção a partir do início do escoamento; (com base numa a curva representativa da superfície limite a ser empregada, acompanhando a norma, além de outros requerimentos adicionais, conforme Chen e White, 1993). Ao exigir menor recurso computacional e obter bons resultados, é uma linha com muitos pesquisadores, onde se destacam os trabalhos de Chen *et al.* (1996), Ziemian e McGuire (2001) além de Liew *et al.* (1993ab). No Brasil, destacam-se os trabalhos de Landesmann (1999), Assaid (2001), Machado (2005) e, Machado e Silveira (2005). Há uma linha refinada paralela, usando o conceito da seção montada (ERP-M), na qual podem ser citados os trabalhos de Chan e Chui (1997, 2000) e também Machado (2005).

Esses métodos foram abordados com detalhes no capítulo anterior, exatamente porque são os únicos adequados a desenvolver a análise avançada, e o método da zona plástica é o único que não apresenta restrições. Por isso, embora haja uma grande dificuldade a ser superada com relação ao tempo de processamento, no ritmo em que os recursos computacionais estão se desenvolvendo, em breve será o método mais usado.

3.4 APLICAÇÃO DA ANÁLISE AVANÇADA NESTA DISSERTAÇÃO

Nesta dissertação será empregado o método da zona plástica (ZP) através da *técnica das fatias*, em que se estabelece um elemento finito descrito num sistema Lagrangiano corrotacional (Pimenta, 1986).

A formulação dessa técnica das fatias utiliza basicamente os conceitos de barra à flexo-compressão segundo a teoria de Euler-Bernoulli, em contraposição à abordagem de Owen e Hinton (1980), que empregaram o conceito de viga de Timoshenko. Essa formulação foi desenvolvida por Lavall (1996) e será apresentada no capítulo 4.

A seguir são descritos os atributos a serem considerados no presente trabalho:

1- Não-linearidade geométrica

Serão observados os itens relativos às considerações de segunda ordem:

- a. efeito $P\Delta$;
- b. efeito $P\delta$; e
- e. efeito $M\Phi$.

2- Não-linearidade física

Serão considerados os itens:

- b. o escoamento com a plasticidade distribuída (ZP);
- d. descarregamento elástico, e, eventualmente;
- f. a influência do histórico: seqüência do carregamento na plasticidade.

3- Atributos físicos

Serão incluídos os itens:

- a. as imperfeições geométricas iniciais: fora de prumo e curvatura inicial;
- b. as tensões residuais iniciais, com diversos diagramas;
- c. os EFs são todos travados fora do plano;
- e. a seção é geometricamente simétrica;
- f. as barras (ou EFs) são prismáticos;
- i. todos os painéis são rígidos;
- j. todas as ligações são infinitamente rígidas;
- k. todas as cargas são centradas, estáticas e dos tipos: ou incremental, ou fixa;
- l. todas as cargas são conservativas.

Não serão considerados os demais atributos, (não participam das análises do presente trabalho).

Para que essa abordagem de ZP seja habilitada a realizar uma análise avançada, primeiro devem-se cumprir as exigências básicas estabelecidas em Chen *et al.* (1996), comprovando que a formulação é capaz de definir com precisão:

4- Sem tensões residuais

- a. carga de escoamento à tração ou a compressão (sem flambagem) N_y ;
- b. momento de plastificação de uma viga simples (sem flambagem) M_p ;
- c. carga de flambagem elástica, sem plasticidade, N_e ;
- d. carga de flambagem inelástica, com plasticidade, N_a ;
- e. efeitos de segunda ordem em viga bi-apoiada com carga simples no meio vão; e axial de compressão na extremidade, sem flambagem;
- f. item e., com flambagem elástica;
- g. item e., com flambagem plástica; e
- h. flexão infinitamente elástica.

5- Com tensões residuais

Repetir os itens a, b, d, g anteriores.

Tendo em vista a dimensão deste trabalho, nem todos esses resultados serão apresentados, embora se deva indicar que em todas as análises, de maneira geral, os resultados verificados foram coerentes. Com o capítulo 6, na seção 6.2 se comprova os casos 4b e 5b, na seção 6.3 os casos 4c,d e 5b,d; e na seção 6.4 os casos 4a e 5b,d,g.

Nota-se, é claro, que essa formulação não é adequada a problemas envolvendo grandes deformações, inclusive requerendo, às vezes, um maior número de passos incrementais, no sentido de que as hipóteses utilizadas nas deduções sejam cumpridas, ou seja, procurando minimizar os desvios.

3.5 ASPECTOS IMPORTANTES ESTUDADOS NESTA DISSERTAÇÃO

As imperfeições geométricas iniciais nascem da realidade da construção, e segundo Galambos (1998), podem ser citadas, entre outras:

- a. comprimento de colunas em duas peças, com emendas no meio vão;
- b. comprimento da viga real (entre ligações) e as ligações;
- c. inevitáveis excentricidades nas ligações e fundações;
- d. ponto e forma de aplicação das cargas infinitamente variável; etc.

As imperfeições geométricas que mais afetam a estabilidade estrutural são a curvatura inicial das barras (subseção 3.5.1) e o fora de prumo das colunas (subseção 3.5.2). Essas imperfeições são tratadas pelas normas, que algumas vezes incluem nessas grandezas os efeitos de outras imperfeições geométricas não citadas.

Ao aplicar a análise avançada, essas imperfeições geométricas devem ser de forma obrigatória consideradas, porém cabe ao engenheiro avaliar a introdução de outras, adotar critérios mais rigorosos ou necessidades adicionais, conforme o projeto a ser desenvolvido, (exemplo: considerar emendas nos perfis aumentando a curvatura).

Nas imperfeições físicas, destaca-se a variação do comportamento do material na avaliação da plasticidade. Essa variação é decorrente dos processos de obtenção das matérias primas, ou perfis (laminados, soldados, dobrados, etc), e dos processos de fabricação ou montagem, ao se utilizar a soldagem ou o dobramento. Esta imperfeição física é denominada tensões residuais (subseção 3.5.3).

Este trabalho aborda esses *aspectos importantes*, que são requerimentos mínimos, os quais a seguir serão tratados na forma teórica. Alguns detalhes dos procedimentos computacionais para programar esses aspectos serão apresentados no capítulo 5.

3.5.1 Curvatura Inicial

Desde que a análise avançada não requer verificação isolada de barra no plano do pórtico, torna-se necessária a inclusão da curvatura inicial (CI) de forma explícita, nas análises empregando o método ZP.

As normas AISC LRFD (1993), NBR 8800 (1986), CSA S16 (1994), AS4100 (1990) e Eurocode 3 (1992), de uma forma geral, não abordam diretamente o assunto, uma vez que esse efeito já está incluído quando se usam as curvas de resistência à flambagem para o dimensionamento dos perfis.

Também na plasticidade avaliada pelo método ERP-R, quando se define a superfície de plastificação usando uma curva de interação mostrada na seção 2.7, Fig. 2.22, por exemplo, esse efeito já é considerado.

A curvatura inicial é usualmente parametrizada como uma curva senoidal uniforme, com a flecha máxima δ_0 no meio vão da barra, como é mostrado na Fig. 3.1a. Alguns pesquisadores utilizam também a forma parabólica (Kim e Lee, 2002).

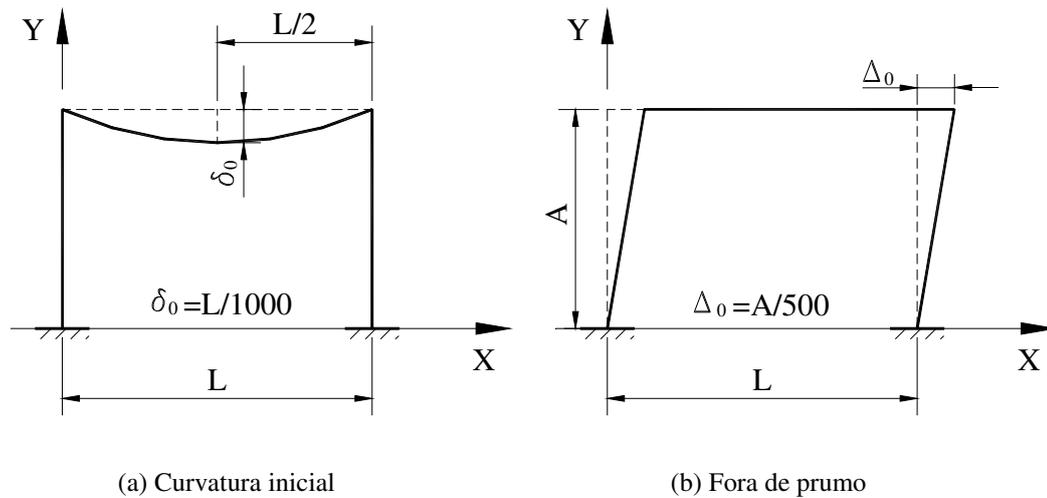


Figura 3. 1 Imperfeições geométricas.

Essas variações para aproximar a CI serão abordadas no capítulo 5, com relação a modelagem empregada neste trabalho: o arco de círculo (substituindo a forma senoidal), que produziu bons resultados, como será mostrado na seção 6.4 do capítulo 6.

O valor do parâmetro δ_0 , como ilustrado na Fig. 3.1a nasce das tolerâncias exigidas de fabricação, sendo o limite usual para aprovação das peças no Brasil e em geral (EUA, Canadá, Europa) é $\delta_0 \leq L/1000$. Na AS4100 (1990) se usa $L/1000$ também, porém limitado a no mínimo 3 mm (!). No Eurocode 3, adota-se o valor $L/500$ para seções vazadas (tubos), e $L/1000$ para os demais. Conforme Chen e White (1993) as tolerâncias na Europa são menores: o valor exigido nas Normas é $L/1500$.

Segundo Bjorhovde (1988) $L/1500$ é uma média estatística, o que pode ser considerado mais adequado, sendo adotado para a análise avançada nos EUA.

Todavia, a influência de δ_0 depende da magnitude das cargas axiais em relação aos momentos na barra. Isso significa a obtenção do acréscimo $dM = P\delta_0$, se os momentos primários causam simples ou dupla-curvatura na barra. Quando a relação dM/M_n é inferior a 5 %, esse acréscimo poderá ser desprezado (Galambos *et al.*, 1998). Chen e White (1993) sugerem também que quando a relação $N_d/N_n \leq 0.2$, o valor desse acréscimo é pequeno, da ordem de 5 %.

A influência de CI também varia com a esbelteza: se a barra for compacta o efeito poderá ser pequeno (Galambos *et al.*, 1998). No ECCS (1984), a CI é desprezada quando na barra $L/\sqrt{N/EI_z} \geq 1.6$, ou se a carga axial é inferior a $N_d \leq 0.26 N_e$, sendo N_e a carga crítica de Euler, (Chen *et al.*, 1996).

3.5.2 Fora de Prumo

É a imperfeição mais perigosa quando a estrutura está sujeita a elevadas cargas verticais. O conhecido efeito $P\Delta$ de amplificação dos momentos na estabilidade já é considerado no cálculo estrutural usando uma abordagem elástica há muito tempo (Timoshenko e Gere, 1961).

Decorrente a princípio das tolerâncias de fabricação e da montagem, no Brasil procura-se limitar essa medida a $\Delta_0 \leq A/600$, onde A seria a dimensão entre as linhas de centro de vigas de dois pavimentos consecutivos ou da estrutura como um todo. Na Fig. 3.1b, o fora de prumo (FP) foi tomado em relação à altura total A da estrutura.

Para efeito de considerações de cálculo, a norma NBR 8800 (1986) recomenda o valor $A/400$. Nos EUA, o valor recomendado é $A/500$, que se baseia em Galambos *et al.* (1988), que controla as condições de aprovação das montagens. Para ZP recomenda-se:

$$\Delta_0 = (1 + 1/n_c)A/600, \quad (3.1)$$

em que n_c é o número de colunas do andar (ECCS, 1984).

Na Europa, segundo Chen e White (1993) o valor adotado é de $A/300$. Com isso o Eurocode 3 (1992) pretende incluir também outras considerações como a falta de aperto dos parafusos e/ou apoio preciso, e as inevitáveis excentricidades presentes na prática; ou seja, adota-se a mesma majoração indicada para as cargas nocionais (ERP-CN).

Segundo Chen e Toma (1994), Beaulieu em 1977, apresentou a fórmula do SSRC (Galambos *et al.*, 1988) baseada em considerações estatísticas, ou seja:

$$\Delta_0 = 0.006 \frac{A}{n_c^{0.455}}. \quad (3.2)$$

Para os casos de prédios de andares múltiplos, Hajjar *et al.* (1997) recomenda avaliar duas circunstâncias: o efeito de fora de prumo de um determinado andar específico (jogar todo o fora de prumo local), ou usar um giro angular provocando um fora de prumo proporcional, ao longo de todos os andares.

De toda forma, modelar a imperfeição geométrica não parece ser tão simples, razão pela qual há uma tendência em adotar cargas nocionais que majorem essas imperfeições, com uma atitude de superdimensionamento proposital (!).

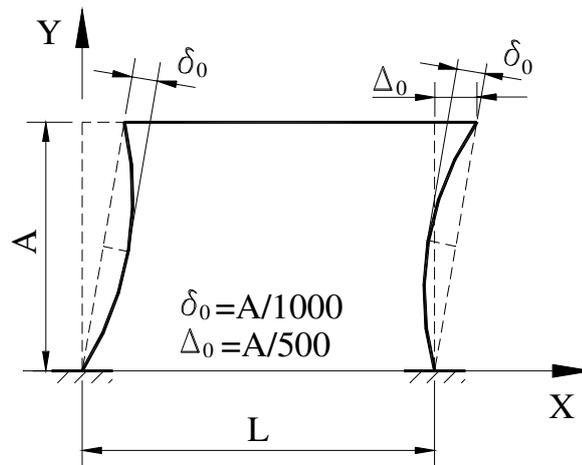


Figura 3. 2 Imperfeições geométricas combinadas.

Verifica-se na Fig. 3.2 que a presença das imperfeições geométricas faz surgir uma série de possibilidades de imperfeições combinadas, que deverão ser analisadas pelo projetista, como se verá no capítulo 6 (seções 6.4 e 6.7).

Galambos *et al.* (1998) indicam condições que tornam necessário avaliar a influência do fora de prumo, em estruturas sob cargas verticais apenas:

- a. quando a geometria é assimétrica, provocando deslocamento lateral significativo (da ordem de $A/670$);
- b. se ocorrerem momentos e cortantes elevados nas colunas; e
- c. para pequeno valor da relação N_d/N_n , indicando maior sensibilidade ao $P\Delta$.

Embora seja indicado que podem ocorrer graves efeitos também para colunas com alto valor de axial, e pequeno valor de deslocamento lateral, recomendando a inclusão das cargas nocionais de 0.2 % ΣP , (como já visto na seção 2.7.1).

Clarke e Bridge (1995) indicam que, em prédios de andares múltiplos, a estabilidade é governada por um andar específico, sendo razoável ou não exagerado considerar um fora de prumo global de $A/500$ para toda a estrutura.

Em prédios mais esbeltos isso não é correto, pois provocaria momentos de tombamento exagerados, sendo necessária outra estratégia.

Para prédios de andares múltiplos apresenta-se a relação:

$$\Delta_0 / A = 0.35\% / \sqrt{n_s}, \quad (3.3)$$

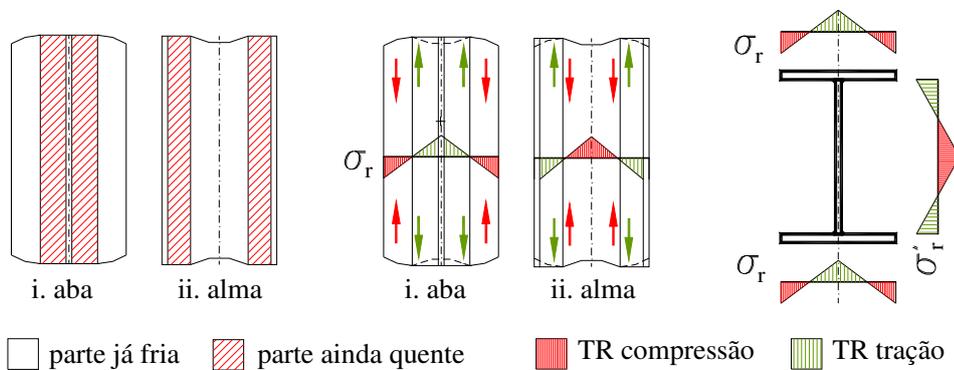
sendo n_s é o número de andares até a altura A . Para $A > 136$ m, o valor máximo considerado é 73.5 mm (ECCS, 1984).

Todavia, é necessário considerar limites no fora de prumo quando aplicado em prédios de andares múltiplos. De acordo com o AISC LRFD (1993), até 20 andares, o limite é de 25 mm para dentro e de 50 mm para fora. A partir daí, acréscimos de 1.6 mm/andar, até o máximo de 50 mm para dentro e 75 mm para fora. No caso de colunas adjacentes a elevadores, os limites aplicáveis são as metades dos indicados. Valores alternativos de outras normas são indicados por Hajjar *et al.* (1997).

3.5.3 Tensões Residuais

As tensões residuais (TR) aparecem com o resfriamento desigual das diversas partes dos perfis, seja depois da laminação, seja por causa do corte a maçarico seguido de soldagem (no caso dos perfis soldados no Brasil), seja por causa da soldagem de chapas laminadas em tiras (no caso de diversos perfis soldados na Europa ou nos EUA), e também devido ao resfriamento após dobramento a quente ou nos tubos depois de serem estrudados ou trefilados.

Pode-se entender a origem das TRs acompanhando a Fig. 3.3. Quando a temperatura do material decresce a partir de valores superiores a 1000 °C, (decorrentes dos processos acima), até a temperatura ambiente, as partes mais externas e em contato maior com o ar se resfriam primeiro. As partes mais internas, mais protegidas e mais espessas, mantêm a temperatura elevada por mais tempo (ver Fig. 3.3a).



(a) Contração da parte já fria (b) Parte antes quente impedida de contrair (c) TR resultantes

Figura 3.3 Origem das tensões residuais no perfil I laminado.

Logo o resfriamento mais rápido provoca uma menor redução do tamanho nas partes mais frias, do que nas partes ainda quentes. Com isso, a parte que já esfriou fica pressionada no sentido de reduzir ainda mais seu tamanho, criando deformações plásticas de compressão. Para equilibrar esse efeito, as partes que demoraram a esfriar são impedidas de se contrair mais, criando assim deformações plásticas de tração (ver Fig. 3.3b). Assim surgem as TRs auto equilibradas (as resultantes são nulas), que são mostradas na Fig. 3.3c, para o perfil I laminado.

As tensões residuais também podem ter natureza mecânica, no caso do dobramento a frio. Nesse caso, Errera *et al.* (1987) detectou um comportamento melhor do perfil (aumento das tensões de escoamento e redução da ductilidade), porém tal efeito favorável normalmente não é levado em conta no dimensionamento.

Diversos ensaios de laboratório permitiram o aparecimento de modelos simplificados que são usados para representar as tensões residuais. No entanto, nas peças reais, o comportamento individual é bastante variável e apresenta um campo de pesquisas ainda extenso a ser explorado.

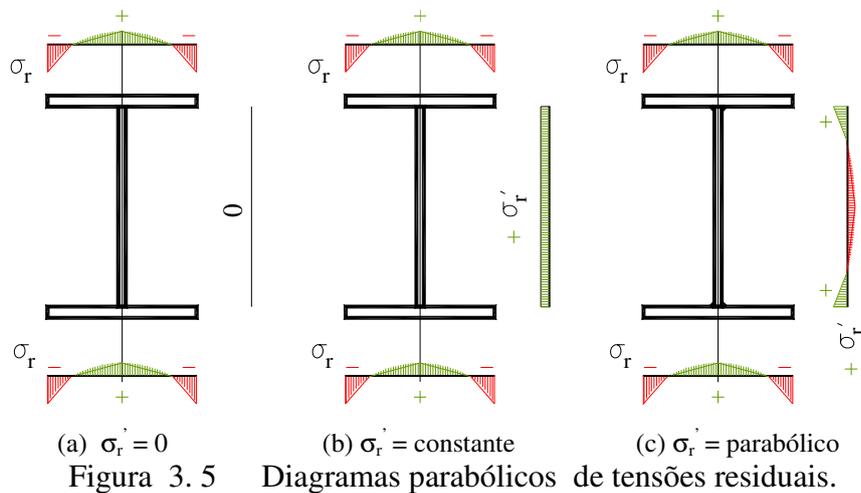
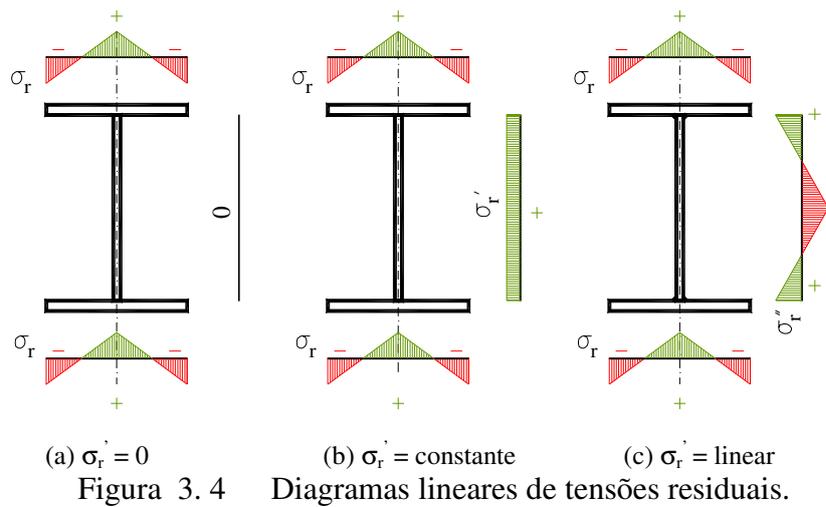
No caso de perfis laminados, os resultados dos trabalhos de Galambos e Ketter (1957) tem sido comprovados na prática, sendo adotados diretamente pelo AISC LRFD (1986), citando Kanchanalai (1977) dentre os pesquisadores que tornaram isso viável.

As pesquisas de Bjorhovde *et al.* (1972) e, Davids e Hancock (1985) procuraram obter resultados similares tanto para perfis soldados com chapas de média e grande bitola, como para os perfis I laminados padrões europeus.

O mesmo desenvolveu Pimenta (1996) para perfis I soldados com chapas cortadas ao maçarico (com padrões brasileiros). Mesmo reconhecendo a dificuldade de se produzir tais ensaios (custo e equipamento necessários), assim como a própria natureza do que se deseja medir ou aproximar, esses resultados não tiveram boa divulgação e em geral, não são citados ou usados por outros pesquisadores.

A origem das diversas curvas de resistência à flambagem, como as do SSRC (Galambos *et al.*, 1988) e do ECCS (1984) é tentar preencher essa lacuna de informações, incluindo esses efeitos nas curvas através dos resultados de ensaios dos perfis de forma direta, nos quais automaticamente as TRs já estão incluídas.

Como a análise avançada requer a inclusão dessa imperfeição física, o uso de modelos simplificados é inevitável na abordagem com ZP.



Os diagramas representativos aproximados mais usados são os lineares ou os parabólicos, como representados na Fig. 3.4 e 3.5, respectivamente.

As tensões residuais maiores ocorrem nas abas, sendo o valor máximo σ_r que é normalmente fixado em relação à tensão de escoamento σ_y .

Nos diagramas mais usados, existem três opções de tensões na alma:

- são desconsideradas;
- são constantes; e
- são do mesmo tipo das tensões da aba (lineares ou parabólicas).

O valor máximo de tensões na alma é σ_r' e normalmente é estabelecido por considerações de equilíbrio, sendo seu valor coincidente com a tensão residual do ponto médio da aba do perfil ($b/2$). Galambos e Ketter (1957) indicaram um diagrama linear de TR com tensão constante na alma, (ver Fig. 3.4b), com o valor de $\sigma_r = 0.3 \sigma_y$.

No Eurocode 3 (1992), é usual se empregar o diagrama linear de TR da Fig. 3.4c, e o valor máximo é determinado pelo *aspecto* da seção do perfil, (relação entre altura da seção e dimensão da aba: d/b), conforme:

- a. $d/b \leq 1.2$ então $\sigma_r = 0.5 \sigma_y$;
- b. $d/b > 1.2$ então $\sigma_r = 0.3 \sigma_y$.

Torkamani e Sonmez (2001), entre outros, adotaram o uso do diagrama parabólico da Fig. 3.5c para suas análises com ZP, e consideraram as mesmas relações d/b . Isso foi utilizado para resolver os problemas de calibragem de Vogel (1985). O mesmo fez Kim e Lee (2002), porém usando o programa comercial Abacus (geração de TR automática).

Trahair e Bradford (1991) também utilizaram o diagrama parabólico representado na Fig. 3.5c, variando as TR no intervalo de -0.35 a $+0.5 \sigma_y$. Posteriormente, surgiu o modelo simplificado linear de Bild e Trahair (1989), mostrado na Fig. 3.6b, adotado pela AS4100 (1990).

Meek e Loganathan (1990) apresentaram gráficos experimentais de tensões residuais em tubo retangulares dobrados a frio (SHS), obtidos por Key e Hancock em 1985, onde existem tanto tensões de dobramento (maiores nos cantos) como de membrana, com máximos de $\pm 0.35 \sigma_y$ para as primeiras, e -0.1 a $+0.075 \sigma_y$ para as últimas, adotando uma distribuição linear na espessura da parede.

Os perfis soldados, conforme esclareceram Beedle e Tall (1960), possuem diagramas diversos dos laminados, e as suas tensões residuais dependem do processo de constituição do mesmo.

Existem dois tipos construtivos básicos de I com chapas soldadas entre si:

- a. os compostos de chapas laminadas; e
- b. os compostos de chapas cortadas ao maçarico.

A explicação é que as chapas laminadas e as chapas cortadas possuem tensões residuais iniciais diferentes, e com a soldagem, o diagrama resultante é ainda mais diverso (Bjorhovde et al., 1972).

Acompanhando a Fig. 3.6a, verifica-se que na chapa laminada as bordas possuem pequena compressão e na parte central uma longa tração (de pequeno valor também).

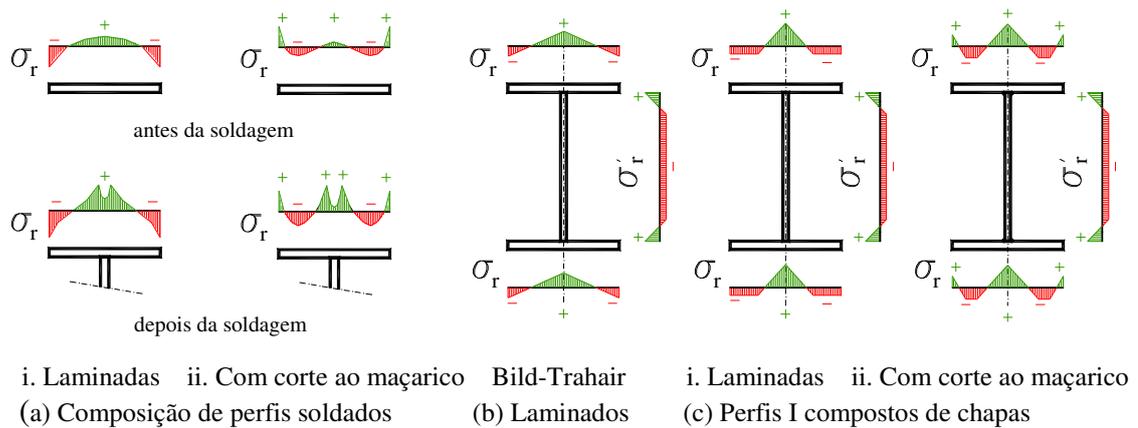


Figura 3.6 Tensões residuais de modelos alternativos.

Na chapa cortada ao maçarico, o diagrama sofre uma reversão nas bordas com picos de tração, seguidos de uma leve compressão e um trecho ainda com tração central, que depende da espessura e da dimensão da chapa.

Ao se realizar a soldagem dessa chapa (que será então a aba) à alma do perfil, a deposição dos filetes gera intensos picos de tração, na parte central, aumentando as tensões de compressão, no trecho adjacente. Isso é mostrado na parte inferior da Fig. 3.6a (adaptado de Galambos, 1988).

Weston *et al.* (1976) indicaram diagramas aproximados para perfis soldados compostos de chapas laminadas ou cortados a frio (guilhotina), usuais na Europa e nos EUA, quando se fazem as chamadas vigas-mestras, usadas em prédios e pontes.

Bjorhovde *et al.* (1972) nos seus ensaios experimentais utilizaram chapas médias e grossas (ou placas), e indicaram elevadas tensões máximas, da ordem de σ_y .

McFalls e Tall (1969) indicaram genericamente diagramas parabólicos, já Lui e Chen (1983) apresentaram também modelos simplificados como os indicados na Fig. 3.6c, para I soldados compostos por: (i) chapas laminadas e (ii) chapas cortadas ao maçarico, também com tensões residuais máximas da ordem de σ_y nas regiões da soldagem (tração), sem entretanto indicar parâmetros.

Para os perfis soldados com chapas cortadas ao maçarico, que são comuns no Brasil, Pimenta (1996) indicou, citando diversos pesquisadores, que podem ocorrer valores locais de σ_r próximos de σ_y . Porém não indicou na sua dissertação qual o diagrama de TR que foi empregado nos seus modelos, ou como foi realizada a modelagem dessas TR (uma forma que permita representar essas TR de maneira adequada).

Por fim, tendo apresentado quais são os *aspectos importantes* que devem ser considerados numa análise inelástica de segunda ordem, para que esta seja qualificada avançada, fica claro o objetivo do presente trabalho: estudar o efeito isolado ou o combinado das imperfeições geométricas (curvatura inicial e fora de prumo), sem e com as tensões residuais.

A seguir será apresentada a formulação numérica da zona plástica baseada na técnica das fatias.

3.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT NBR 8800, 1986. *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*. ABCEM, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- AISC LRFD, 1986. *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 1ª Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC LRFD, 1993. *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 2ª Ed., Chicago, Ilionois.
- AS4100, 1990. *Steel structures*. Standards association of Australia, Sidnei, Austrália.
- Assaid, LMB; 2001. *Método plástico aplicado às estruturas aporticadas de aço*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Attalla, MR; Deierlein, GG; e McGuire, W; 1994. Spread of plasticity: a quasi-plastic hinge approach. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (8) 1994, pp. 2451 a 2473.
- Beedle, LS; e Tall, L; 1960. Basic column strength. *ASCE J. Struct. Division*. Vol. 86 (7) 1960, pp. 139 a 172.
- Bild, S; e Trahair, NS; 1989. In plane strengths of steel columns and beam-columns. *JSC Research*. Vol. 13 (1), 1989, pp. 1 a 22.
- Bjorhovde, R; Brozzetti, J; Alpstein, GA; e Tall, L; 1972; Residual stresses in thick welded plates. Welding research supplement. *AWS Welding Journal*. Vol. 8, pp. 392 a 405.
- Bjorhovde, R.; 1988. Column: from theory to practice. *AISC Engineering Journal*. Vol. 1/4, pp. 21 a 33.
- Chan, SL; e Chui, PPT; 1996. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept. *Engineering Structures*. Vol. 19 (8) 1996

pp. 628 a 636.

- Chan, SL; e Chui, PPT; 2000. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Elsevier, Oxford.
- Chen, WF; Goto, Y; e Liew, JYR; 1996. *Stability design of semi-rigid frames*. John Willey and Sons, Nova Iorque.
- Chen,WF; e Sohal, I; 1995. *Plastic design and second-order analysis of steel frames*. Springer-Verlag, Nova Iorque.
- Chen, WF; e Toma, S; 1994. *Advanced analysis of steel frames, theory software and applications*. CRC Press, Boca Raton.
- Chen,WF; e White, DW; 1993. Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art. SSRC, Bethlehem.
- Clarke, MJ; 1994. Em Chen, WF; e Toma, S; *Advanced analysis of steel frames, theory software and applications*. CRC Press, Boca Raton.
- Clarke, MJ e Bridge, RQ; 1995. Application of the notional load approach to the design of multistory steel frames. *Proceedings of the SSRC Annual Technical Section*, pp. 191 a 211, Cidade de Kansas, Missouri.
- CSA S16, 1994. *Limit states design of steel structures*. CAN/CSA-S16.1-M94 Canadian Standards Association. Rexdale, Ontário.
- Davids, AJ; e Hancock, GJ; 1985. Compression tests of long welded I section columns. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 111 (2), pp. 2381 a 2390.
- ECCS, 1984. *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints*. Technical working group 8.2 Publicação 33. European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.
- El-Zanaty, MH; Murray, DW; e Bjorhovde, R; 1980. Inelastic behavior of multi-story steel frames. *Structural Engineering Report*. Vol. n. 83, Univ. Alberta, Canadá.
- Errera, SJ; e outros; 1987. *AISI Cold-formed steel design manual*. Washington.
- Eurocode 3; 1992. *CEN EUROCODE 3 Design of steel structures*. Vol. Part 1, European Committee for Standardization, ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.
- Foley, CM; e Vinnakota, S; 1999. Inelastic behavior of multistory partially restrained steel frames. Part I-II. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 125 (8), pp. 854 a 868.
- Foley, CM; 2001. Advanced analysis of steel frames using parallel processing and vectorization. *Computer-aided Civil and Infrastruct. Eng*. Vol. 16, pp. 305 a 325.

- Galambos, TV; e outros; 1988. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 4ª Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Galambos, TV; e outros; 1998. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 5ª Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Galambos, TV; e Ketter, RL; 1957. Em Columns under combined bending and thrust. *Transactions ASCE*. Vol. 126 (1), (1961), pp. 1 a 25.
- Hajjar, JF; e outros, 1997. *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – implications for american steel design*. ASCE, Nova Iorque.
- Kanchanalai, T; 1977. The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames *AISI Project 189 Rep. 2*. Univ. Texas, Austin, Civil Eng./Structural Research Lab.
- Kim, SE; e Lee, DH; 2002. Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames. *Engineering Structures*. Vol 24, pp. 735 a 744.
- Landesman, A; 1999. *Análise e implementação de modelo plástico para estruturas metálicas apertadas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Lavall, ACC; 1996. *Uma formulação teórica consistente para a análise não-linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal*. Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP, Brasil.
- Liew, JYR; White, DW; e Chen, WF; 1993. Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design. Part I-II. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 119 (11), pp.3196 a 3237.
- Liew, JYR; White, DW; e Chen, WF; 1994. Notional load plastic-hinge method for frame design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (5), pp. 1434 a 1454.
- Lui, EM; e Chen, WF; 1983. Strength of H-columns with small end restraints. *The Structural Engineer*. Vol. 61 (3), 1983, pg. 17 a 26.
- McFalls, RK; e Tall, L; 1969. A study of welded columns manufactured from flame-cut plates. Welding research supplement. *AWS Welding Journal*. Vol. (4) 1969, pp. 141 a 154.
- Machado, FCS; 2005. *Análise Inelástica de Segunda Ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia

- Civil, EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Machado, FCS; e Silveira, RAM; 2005. Formulação inelástica de segunda ordem para sistemas estruturados em aço. *Revista Escola de Minas (REM)*. Vol. 58 (3) pp. 267 a 277.
- Meek, JL; e Loganathan S; 1990. Geometric and material nonlinear behaviour of beam-columns. *Computers & Structures*. Vol. 34 (1) 1990, pp. 87 a 100.
- Owen, DRJ; e Hinton, E; 1980. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Pineridge Press Ltd., Swansea, RU.
- Pimenta, PM; 1986. Aspectos da análise não-linear de estruturas reticuladas. *Anais do 7º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*. São Carlos, São Paulo.
- Pimenta, RJ; 1996. *Proposição de uma curva de flambagem para perfis I soldados formados por chapas cortadas a maçarico*. Dissertação de Mestrado, EEUFMG, Belo Horizonte/MG, Brasil.
- Timoshenko, SP; e Gere, JM; 1961. *Theory of elastic stability*. Mac Grow Hill – Nova Iorque, Toronto, Londres, Tóquio 2ª Ed.
- Torkamani, MAM; e Sonmez, M; 2001. Inelastic large deflections modeling of beam-columns. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 123 (9) 1997, pp. 1225 a 1235.
- Trahair, NS; e Bradford, MA; 1991. *The behaviour and design os steel structures*. 2ª Ed., Chapman & Hall, Londres.
- Vinnakota, S; 1982. Planar strength of restrained beam columns. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 108 (11) 1982, pp. 2496 a 2516.
- Vogel, U; 1985. Calibrating Frames. *Stahlbau*. Vol. 10 1985, pp. 295 a 301.
- Weston, G; Nethercot, DA; e Crisfield, MA; 1991. Lateral buckling in continuous composite bridge girders. *The Structural Engineer*. Vol. 69 (5), pp. 79 a 87.
- White, DW; 1993. Plastic hinge methods for advanced analysis of steel frames. *JSC Research*. Vol. (9) 1993, pp. 121 a 152.
- Ziemian, RD; e McGuire, W; 2001. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 128 (10), pp. 1301 a 1307.

4

FORMULAÇÃO NUMÉRICA

SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
4.1	Introdução	100
4.2	Elemento, Fibra e Fatia	100
4.3	Relação Constitutiva na Fibra	102
4.4	Relações no Elemento Finito	105
4.5	Sistema Lagrangiano Corrotacional	110
4.6	Matrizes de Rigidez	112
4.7	Propriedades Elasto-Plásticas	117
4.8	Esforços Corrotacionais	118
4.9	Solução do Problema Não-Linear	118
4.10	Integração Iterativa dos Esforços Normais	119
4.11	Referências Bibliográficas	123

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem a finalidade de apresentar a formulação numérica adotada, denominada de *técnica das fatias*, com suas hipóteses básicas, suas características e modelos, dedução das equações de equilíbrio, estabelecendo o elemento finito (EF) com suas matrizes de rigidez e esforços solicitantes.

Essa formulação numérica é desenvolvida sob a abordagem do método da zona plástica (ZP). Assim, na seção 4.2, são introduzidos os conceitos de EF, fatia e fibra.

Em seguida, na seção 4.3 é desenvolvida a relação constitutiva no domínio da fibra. A partir dessas definições, o conceito é estendido ao EF, na seção 4.4. Partindo-se então para a formulação do equilíbrio num sistema de coordenadas corrotacional, adotando o referencial Lagrangiano atualizado, descrito na seção 4.5, se obtém as matrizes de rigidez, tanto a constitutiva como a geométrica, na seção 4.6.

As propriedades elasto-plásticas são avaliadas na seção 4.7 e, complementando, encontram-se os esforços corrotacionais, que posteriormente, como as demais grandezas, são convertidos em valores no sistema global de referência (original), como mostra a seção 4.8.

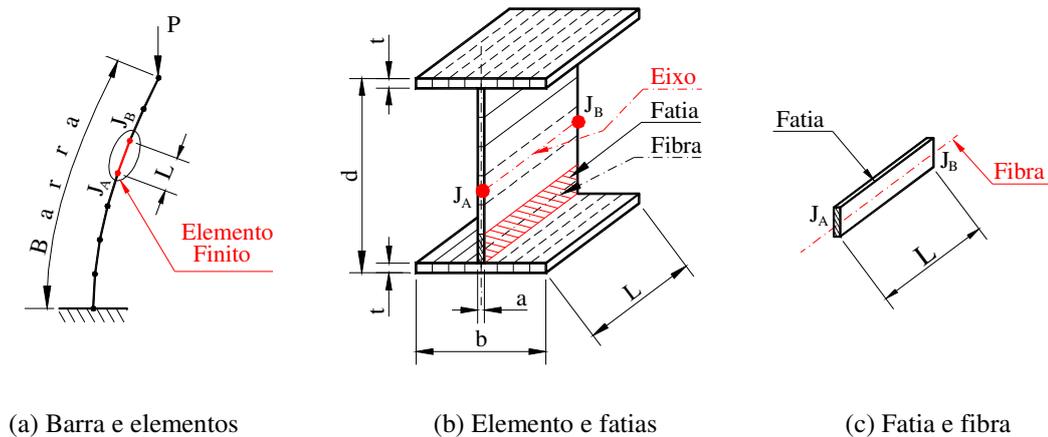
A técnica adotada para a solução do problema não-linear é descrita na seção 4.9, sendo a seguir mostrada a contribuição original desse trabalho denominada *integração iterativa dos esforços normais*, na seção 4.10.

Finalizando, as referências bibliográficas são apresentadas na seção 4.11.

4.2 ELEMENTO, FATIA E FIBRA

O método da zona plástica, na forma apresentada por Owen e Hinton (1980), considera que as barras utilizadas na modelagem são prismáticas, compostas de EF interligados, cada elemento com extensão L , conectado a dois nós (A e B), como mostra a Fig. 4.1a.

Todas as barras (e os EFs) possuem seções homogêneas, que nesta dissertação serão perfis I de aço, duplamente simétricos, com as almas contidas no plano da análise (sempre o de maior inércia do perfil), tendo as dimensões: altura (d), largura (b), espessuras da aba (t) e da alma (a), como representado na Fig. 4.1b.



(a) Barra e elementos

(b) Elemento e fatias

(c) Fatia e fibra

Figura 4.1 Modelagem da zona plástica.

Por sua vez, cada EF é composto de subdivisões retangulares longitudinais denominadas fatias e através dessas fatias se avalia a zona plástica, ou como se distribui a plasticidade.

Deve-se esclarecer que cada fatia está limitada pela seção do perfil, no nó inicial (J_A) e no nó final (J_B) do elemento, ou seja, a fatia tem características avaliadas no nó inicial e no nó final (exemplo: a tensão da fatia no nó inicial não é necessariamente a mesma do nó final; aliás, normalmente é diferente).

As coordenadas que posicionam a fatia em relação ao centróide do EF bem como a sua área geométrica (que não depende do estado de tensões) são grandezas fixas ao longo de todo o processo, estabelecidas no início de cada problema.

As linhas de centro das fatias são denominadas fibras, como mostra a Fig. 4.1c. Na técnica das fatias considera-se que o estado da fatia, a cada passo ω (de uma iteração de dado incremento), naquele nó, é determinado pelo o estado de tensão e de deformação da fibra correspondente naquele nó.

Note-se, portanto, como já mencionado, que as tensões e deformações da fibra são normalmente diferentes no nó inicial e final, ou seja: não existe um equilíbrio de tensões e deformações da fibra. A fibra é apenas um meio através do qual, por um ponto infinitesimal, se avalia a pequena área elementar que é a seção da fatia.

O estado de todas as fatias em conjunto, num determinado nó, estabelece o estado da seção no nó. Conhecendo-se o estado das seções em ambos os nós das extremidades do EF, então se define o estado do próprio EF, avaliando assim a zona plástica.

A técnica da fatia, empregada neste trabalho, é bem simplificada em relação a que utilizaram tanto Clarke (1994) como Teh e Clarke (1999). Embora sem mostrar maiores detalhes da implementação computacional e das fórmulas que adotaram, ambos indicaram que são monitorados 9 pontos ou fibras por fatia, sendo: 4 fibras nos cantos, 4 fibras nas metades dos lados e a fibra central. Além do que, utilizaram também a mesma fibra em várias fatias, no caso das fronteiras entre fatias. Por essa razão, o monitoramento obtido por esses pesquisadores é mais fino e mais sensível, ao custo de maior número de informações manipuladas e o uso de uma integração numérica sofisticada através de uma versão do método de Simpson, aplicada ao volume.

No capítulo 6 será mostrado que se procurou aqui compensar o emprego de apenas uma fibra nas avaliações das fatias, através do uso de uma maior quantidade de fatias, ou seja, uma malha mais fina geometricamente.

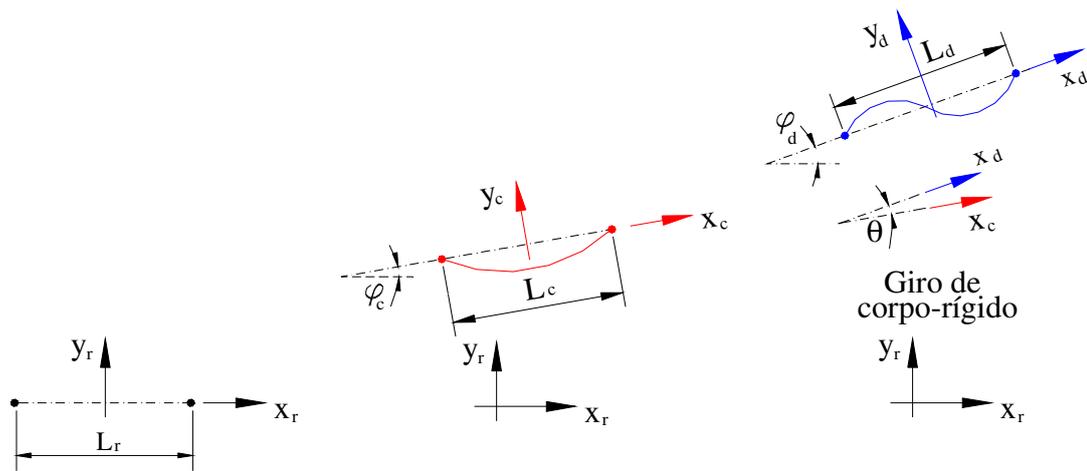
A formulação a seguir apresentada foi desenvolvida por Lavall (1996), seguindo também os conceitos e modelagem básica apresentados por Owen e Hinton (1980), porém o último utilizando o EF sob a ótica de viga de Timoshenko. Já as demonstrações de convergência (solução única) foram realizadas anteriormente por Pimenta (1986).

4.3 RELAÇÃO CONSTITUTIVA NA FATIA

Esta formulação é estabelecida utilizando o *referencial Lagrangiano atualizado* (RLA). Isso significa que todos os deslocamentos no sistema local, referentes à configuração atual ($\omega + 1$), que é deformada ou *desconhecida* (com subscritos d) são relacionados ou descritos em relação a uma configuração anterior, denominada *conhecida*, (com subscritos c), em cada passo (ω) do processo incremental-iterativo, como mostram as Fig.s 4.2 b,c.

Conforme Silveira (1995), ao se adotar o RLA, procura-se garantir que a configuração deformada esteja próxima da conhecida, de tal forma que as rotações de corpo rígido ($\theta = \varphi_d - \varphi_c$), indicadas na Fig. 4.2c, serão minimizadas, melhorando as aproximações das funções de interpolação.

É sabido que tais rotações costumam gerar resultados espúrios, por isso se adotará no estabelecimento do EF também o sistema corrotacional; ou seja, de início adota-se uma solução que permita um resultado numérico de qualidade.



(a) Referência: $\omega=0$ (b) Conhecida: passo ω (c) Deformada: passo $\omega+1$
 Figura 4.2 Configurações do referencial Lagrangiano atualizado.

Além disso, deve-se salientar que existem grandezas fixas em toda a análise (independentes do passo ω). Assim, a primeira configuração conhecida é a que estabelece o problema estrutural ($\omega = 0$), sendo usada em todo o processo como um parâmetro fixo, por isso denominada de *referência* (com subscrito r, ver Fig. 4.2a).

As definições dessas três configurações são de fundamental importância para o desenvolvimento das equações e da formulação seguinte, visto que em determinadas etapas serão estabelecidas grandezas desconhecidas (a serem determinadas), a partir das conhecidas (que serão atualizadas) e das de referência (fixas e estabelecidas no início do problema) para todos os passos.

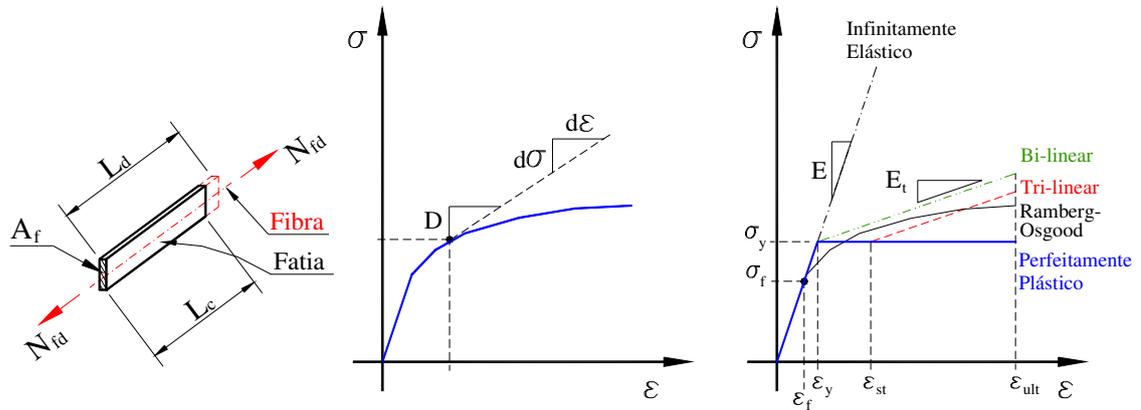
Além disso, existe o aspecto computacional, em que a ordem em que são obtidos os resultados, implica na forma como essas grandezas são avaliadas, de maneira a permitir seu ajuste através de processos iterativos, como se verá adiante.

Considerando que uma fibra tenha seu comprimento na posição conhecida (ou anterior) L_c , modificado para o comprimento deformado (ou atual) L_d , como mostra a Fig. 4.3a, então se pode definir o estiramento da fibra ξ por:

$$\xi = L_d / L_c. \tag{4.1}$$

O alongamento linear (ou alongamento técnico) da fibra é então definido como:

$$\varepsilon = \xi - 1. \tag{4.2}$$



(a) Estiramento da fibra (b) Módulo de rigidez D (c) Diagrama tensão-deformação

Figura 4.3 Comportamento da fibra e do material.

Sabendo que a fibra possui uma seção transversal na posição atual (do passo de carga) de área A_f , onde é aplicado um esforço normal N_{fd} , que causa este estiramento, pode-se definir então a tensão nominal (de Biot, 1939) da fibra σ , naquele nó, por:

$$\sigma = N_{fd} / A_f. \tag{4.3}$$

As grandezas σ e ϵ formam um par de medidas conjugadas, que são relacionadas entre si por uma lei constitutiva, onde se pode dizer que:

$$\sigma = \sigma(\epsilon), \tag{4.4}$$

e, portanto, o módulo de rigidez do material é a tangente à curva do diagrama tensão-deformação $\sigma \times \epsilon$ (ver Fig. 4.3b), ou seja:

$$D = d\sigma(\epsilon)/d\epsilon. \tag{4.5}$$

O valor de D depende do nível de tensão da fibra, e poderá ser:

- a. E, o Módulo de Young (ou Elástico), quando no regime elástico: $\sigma < \sigma_y$, sendo σ_y a tensão de escoamento do material; ou
- b. E_t , o Módulo Tangente, quando ocorre um carregamento plástico, ou seja, quando $\sigma \geq \sigma_y$.

Ao se adotar o método da zona plástica, o material pode ter seu comportamento descrito através de diversos diagramas tensão-deformação (ver Fig. 4.3c), como já mostrado na seção 2.7.3.

Nesta dissertação, o material será sempre considerado elástico e perfeitamente plástico (como na plasticidade clássica), portanto $E_t = 0$.

Estabelecido o comportamento da fibra, deve-se agora definir o comportamento da barra (seção e elemento).

4.4 RELAÇÕES NO ELEMENTO FINITO

Para se definir o elemento finito dessa formulação, cumpre antes estabelecer as seguintes hipóteses de simplificação, indicando também os seus autores:

- a. Euler: as seções permanecem ortogonais ao eixo da barra, ou seja, não ocorrerão distorções nas seções;
- b. Bernoulli: o efeito de Poisson é desprezado, portanto, as deformações transversais ao eixo do EF são desprezadas, o que acarreta que a área geométrica das seções e das fatias é constante (fixa no processo incremental);
- c. Navier: seções transversais planas permanecem planas após introdução dos carregamentos, ou seja, não ocorre empenamento;
- d. Vlassov (1962): todas as barras (vigas e/ou colunas) estarão travadas fora do plano de forma a conter a instabilidade lateral por flexo-torção ou empenamento. Isso implica que a esbeltez transversal deverá ser limitada:
 - i. próximo às RPs (ZP): $A/r_y = 25 + 955/\sigma_y$, ou
 - ii. trechos elásticos: $A/r_y = (60 + 40\beta)\sqrt{25/\sigma_y} \leq 70$;
 onde r_y é o raio de giração da seção no eixo de menor inércia (y), A é a distancia entre travamentos, e a relação β_M entre os momentos atuante e plástico é dada por: $-0.625 \leq \beta_M = M_d/M_p \leq 1.0$, (Higgins *et al.*, 1971);
- e. Neal (1977): os esforços de cisalhamento não são expressivos, de forma que não será reduzida a tensão de escoamento sob tensões combinadas. Portanto, os valores de M_p ou de N_y não são reduzidos por causa do cisalhamento. Dessa forma, se obriga que os cortantes sejam: $V_d \leq 0.577\sigma_y a_d$ (Higgins *et al.*,

1971), em que d_a é a altura livre da alma (no presente trabalho: $d_a \cong d - 4t$);

f. Galambos (1982): todas as seções (perfis I) são compactas, tal que não ocorrerá a instabilidade local das chapas componentes, antes que ocorra a carga limite do sistema estrutural. Na prática, isso significa limitar as relações de esbeltez das chapas componentes dos perfis segundo:

i. para a aba: $b/t \leq 108.3/\sqrt{\sigma_y}$,

ii. para a alma de colunas (com ou sem flexão): $d_a/a \leq 158/\sqrt{\sigma_y}$,

iii. para a alma de vigas (somente flexão): $d_a/a \leq 533/\sqrt{\sigma_y}$;

como recomenda o LRFD, (Salmon e Johnson, 1995), sendo σ_y expresso em kN/cm^2 em todos os casos;

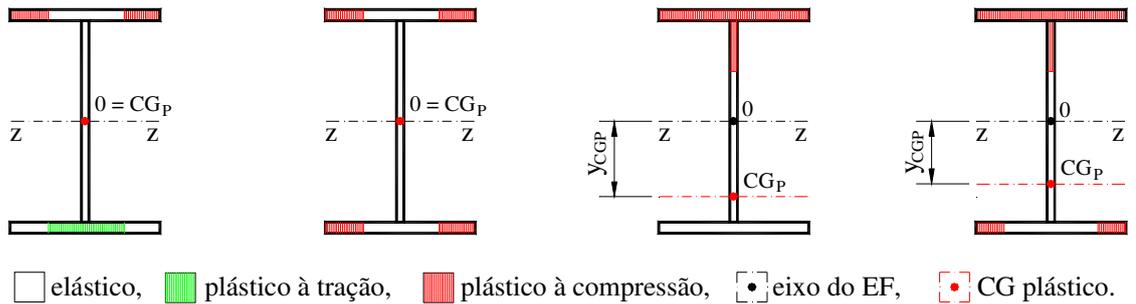
g. não é verificado o atendimento à lei do regime de fluxo plástico, ou a teoria de menor deformação J_2 (Chen e Han, 1987). Nem tampouco é verificado se há atendimento ao critério de von Mises ou a qualquer outro com relação ao escoamento, porque somente se consideram tensões normais atuantes nas fibras, assim o escoamento é estabelecido apenas pelo diagrama de tensão–deformação do material, sendo por isso exigido o item (e);

h. é considerado que todas as ligações entre a viga e as colunas são rígidas. Para tanto, supõe-se que serão ligações totalmente soldadas, com penetração total nas abas e filetes na alma, capazes de transmitir M_p ;

i. considera-se ainda que os painéis das colunas são rígidos não apresentando distorções, mesmo na presença de elevados momentos e cortantes, ou seja, serão colocados enrijecedores adequados nas colunas (horizontais na direção dos flanges das vigas e em diagonal para o cisalhamento).

Será aplicada agora a cinemática elemental considerando que qualquer ponto da seção pode ter o seu comportamento (tensões e deformações) estabelecido ao se conhecer o comportamento do centróide da seção (0), que por sua vez, na fase elástica, está contido no eixo do EF.

Na fase elasto-plástica, se ocorrer apenas flexão ou apenas compressão, a plastificação ocorre de forma simétrica na seção, e o centróide da seção continua contido no eixo do EF ($z-z, y_{CGp}=0$), como é ilustrado nas Fig.s 4.4a,b.



(a) Flexão pura (b) Compressão pura (c) ZP em 1 lado (d) ZP nos 2 lados
 Figura 4. 4 Zonas plásticas na seção.

Mas, como as barras (EFs) são solicitadas normalmente à flexo-compressão, esse alinhamento desaparece. Em geral, uma das abas e trecho da alma próxima, em um dos lados, plastificam, enquanto a outra parte da seção permanece elástica. Em outros casos, ambas as abas plastificam, porém em quantidades de fatias (e posição) diferentes, ou seja com ZPs diferentes. Logo a plastificação também é assimétrica como mostram as Fig.s 4.4c,d.

Em ambas as condições, ocorre o aparecimento de um centro de gravidade plástico (CG_P), que não mais coincide com o centróide original (0) da seção elástica ($y_{CG_P} \neq 0$), que pertencia também à linha de centro do EF (eixo X).

Acompanhando agora a Fig. 4.5a, os deslocamentos (u_d, v_d) de um ponto P genérico da seção podem ser relacionados diretamente aos deslocamentos do centróide 0 (u_{0d}, v_{0d}) dessa seção pelas expressões:

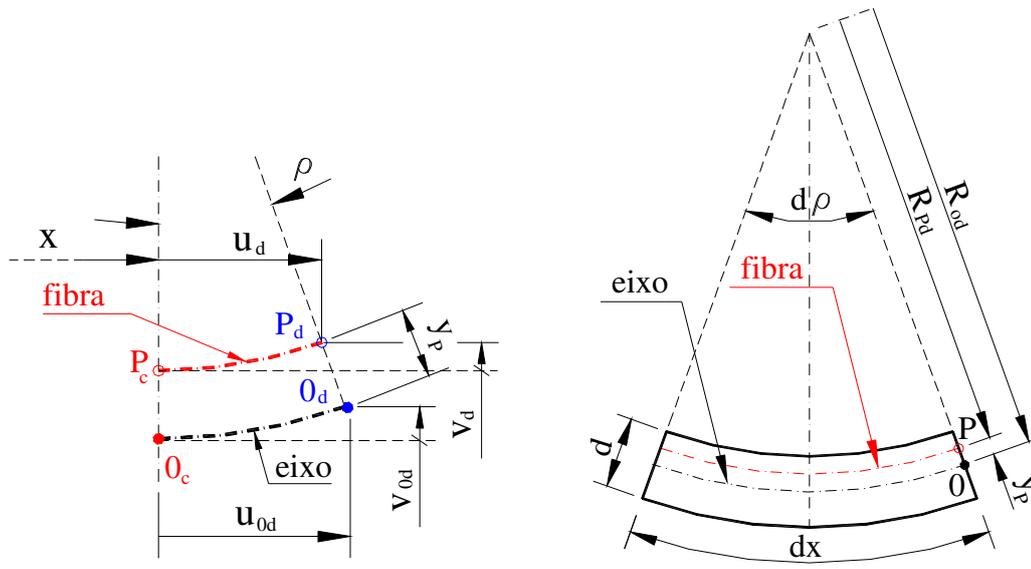
$$u_d(x, y_P) = u_{0d}(x) - y_P \text{sen}\rho, \tag{4.6a}$$

$$v_d(x, y_P) = v_{0d}(x) - y_P(1 - \text{cosp}), \tag{4.6b}$$

sendo x a posição da seção que contém esse ponto, no sistema local, na configuração deformada, y_P a distância do ponto P ao centróide e ρ é o ângulo de giro do eixo que contém a seção, como mostra a Fig. 4.5a.

O conceito de alongamento da fibra foi apresentado anteriormente considerando uma fatia isolada. Agora, por analogia, se procura expressar esse mesmo alongamento em relação ao alongamento da fibra que corresponde ao eixo do elemento.

Isso será feito a seguir, acompanhando a Fig. 4.5b, onde se mostra um elemento diferencial de barra, de comprimento dx, limitado por duas seções.



(a) Deslocamentos de P em relação ao centróide O

(b) Curvatura do elemento

Figura 4.5 Relação entre a fibra e o eixo.

Na Fig. 4.5b d é a altura da seção, R_{0d} é o raio de curvatura do eixo da seção e R_{Pd} é o raio de curvatura de uma fibra locada por um ponto genérico P.

Assim, pode-se relacionar o ponto genérico P na seção (que pertence à fibra) com o centróide O (ponto que pertence ao eixo) através da expressão:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - y_P \rho', \tag{4.7}$$

na qual ε_0 é o alongamento da fibra no eixo e $\rho' = d\rho/dx$ é a variação do ângulo de giro da corda relativamente ao eixo global, sendo y_P a coordenada conhecida do ponto P da seção considerada, que pode se alterar ao longo do processo de solução (a seguir indicada mais precisamente y_c).

É importante observar que:

- ρ' somente se confunde com a curvatura, quando não existirem esforços normais atuando no EF e quando se despreza a curvatura do eixo do EF. Conforme Pimenta (1986), ρ' é uma rotação específica, conjugada energeticamente ao momento fletor;
- y_c somente coincide com y_r (cota de referência) no regime elástico, visto que no estado elasto-plástico (mostrado nas Fig.s 4.4c,d), o centróide da seção elástica remanescente (CG_P) não mais coincide com a linha de centro do EF, e,

portanto, y_c é atualizado para y_d após cada iteração;

- c. a formulação usada neste trabalho considera que a corda e a tangente ao eixo do EF coincidem, desprezando o possível ângulo inicial de curvatura ρ_0 do eixo, considerado por Lavall (1996).

Usando as relações geométricas das figuras, com as Eqs. (4.1) e (4.2), pode-se expressar ε_0 em relação às variações dos deslocamentos u_{0d} e v_{0d} , isto é:

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\left[\left(1 + u'_{0d}\right)^2 + \left(v'_{0d}\right)^2 \right]} - 1 \cong \left(\frac{1 + u'_{0d}}{\cos \rho} \right) - 1. \quad (4.8)$$

Reescrevendo a Eq. 4.7 utilizando a equação anterior, e usando a definição de secante de ρ ($\sec \rho$), chega-se a:

$$\varepsilon = \left(1 + u'_{0d}\right) (\sec \rho) - 1 - y_c \rho'. \quad (4.9)$$

Considerando então que os ângulos sejam muito pequenos, são válidas as seguintes aproximações:

$$\text{sen} \rho \cong \tan \rho \cong \rho, \quad \text{cosp} \cong 1 - \rho^2/2 \quad \text{e} \quad \text{sec} \rho \cong 1 + \rho^2/2. \quad (4.10a-c)$$

Com essas aproximações, após algum algebrismo, obtêm-se as expressões para ρ e ρ' ($d\rho/dx$), ou seja:

$$\rho = \frac{v'_{0d}}{(1 + u'_{0d})} \quad \text{e} \quad \rho' = \frac{(v''_{0d} \cos^2 \rho - u''_{0d} \cos \rho \text{sen} \rho)}{(1 + u'_{0d})}, \quad (4.11a,b)$$

e fazendo-se $u''_{0d} = 0$, chega-se então na relação que define o campo de deformações do elemento, que é básica para todo o desenvolvimento posterior da formulação, isto é:

$$\varepsilon = \left(1 + u'_{0d}\right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v'_{0d}}{1 + u'_{0d}} \right)^2 \right] - 1 - y_c \frac{v''_{0d}}{(1 + u'_{0d})}. \quad (4.12)$$

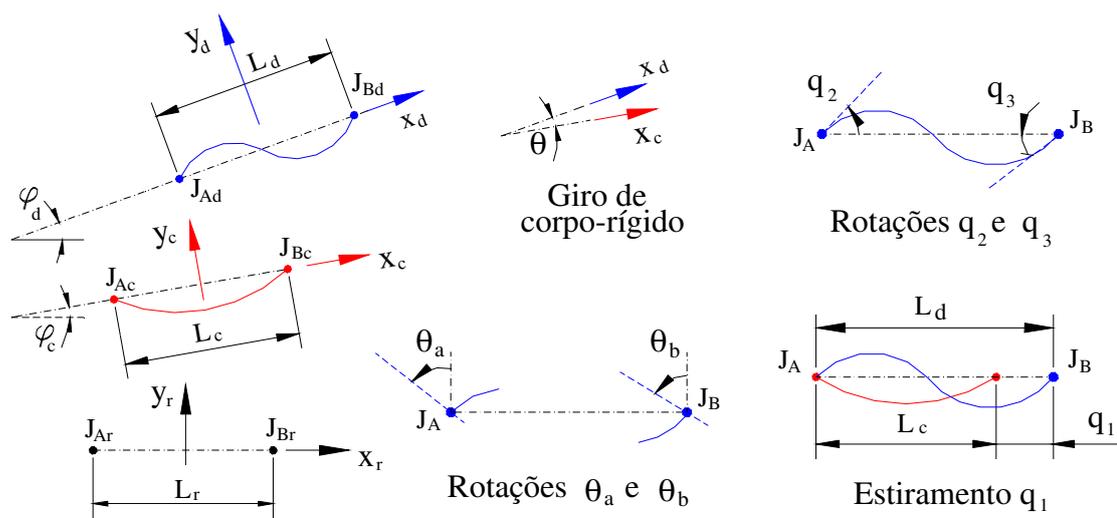
4.5 SISTEMA LAGRANGIANO CORROTACIONAL

É necessário estabelecer ainda um sistema de coordenadas para a análise, que tanto seja capaz de capturar o movimento do EF, como de avaliar o campo de deformações expresso pela Eq. 4.12, de forma adequada.

Para isso, o elemento finito é descrito por uma formulação Lagrangiana atualizada corrotacional, ou seja: a configuração deformada ou atual (x_d, y_d) no sistema corrotacional (que acompanha o elemento em cada instante), é relacionada ao sistema local corrotacional conhecido ou anterior (x_c, y_c), a partir dos deslocamentos no sistema global fixo arbitrado de referência (x_r, y_r), como mostra a Fig. 4.6a.

É importante salientar que a configuração conhecida e a deformada são decorrentes do processo incremental-iterativo, onde em cada passo ω , a configuração conhecida é atualizada pela deformada. Assim, as rotações das extremidades do EF (θ_a e θ_b), representadas na Fig. 4.6b, incluem o giro de corpo rígido do EF (θ).

Nesse sistema local corrotacional que acompanha cada EF, são estabelecidas três componentes de deslocamento, definidas aqui como grandezas objetivas, que não são afetadas por giro de corpo rígido do elemento (θ), e, portanto, espelham um campo de deformações. Essas grandezas formam o vetor $\mathbf{q} = q_\alpha$, $\alpha = 1$ a 3, acompanhando a Fig. 4.6c, e são definidas pelas expressões:



(a) Posição e configurações (b) Rotações envolvidas (c) Significado das grandezas

Figura 4.6 Sistema corrotacional.

$$q_1 = L_d - L_c, \quad q_2 = \theta_a - \theta, \quad q_3 = \theta_b - \theta, \quad (4.13a-c)$$

onde a rotação $\theta = \varphi_d - \varphi_c$, representa a rotação de corpo rígido do elemento, parcela que é retirada das rotações θ_a e θ_b , para se definir q_2 e q_3 ; q_1 é a variação da corda do elemento, ou a distância entre os nós.

Esses nós também estão relacionados ao sistema cartesiano global (fixo) do problema, havendo três graus de liberdade por nó (u, v, θ), seis para cada EF, armazenados no vetor $\mathbf{p} = p_i, i = 1$ a 6, ou seja (ver a Fig. 4.7a):

$$\text{Nó inicial } J_A: p_1 = u_a, \quad p_2 = v_a, \quad p_3 = \theta_a, \quad (4.14a)$$

$$\text{Nó final } J_B: p_4 = u_b, \quad p_5 = v_b, \quad p_6 = \theta_b. \quad (4.14b)$$

Nessas expressões, os subscritos a e b se referem ao nó inicial (J_A) e ao nó final (J_B) do elemento, respectivamente. Nota-se que os deslocamentos q_α e p_i estão correlacionados geometricamente. Por sua vez, os esforços também podem ser relacionados entre si, como mostra a Fig. 4.7b, na qual se tem tanto os esforços corrotacionais: vetor $\mathbf{Q} = Q_\alpha, \alpha = 1$ a 3; como os globais: vetor $\mathbf{P} = P_i (i = 1$ a 6), constituído pelas forças F_1, F_2, F_4 e F_5 , e pelos momentos M_3 e M_6 .

No contexto do método dos elementos finitos (MEF), tem-se que agora os deslocamentos do centróide u_{0d} e v_{0d} serão aproximados por funções de interpolação em x na configuração de referência.

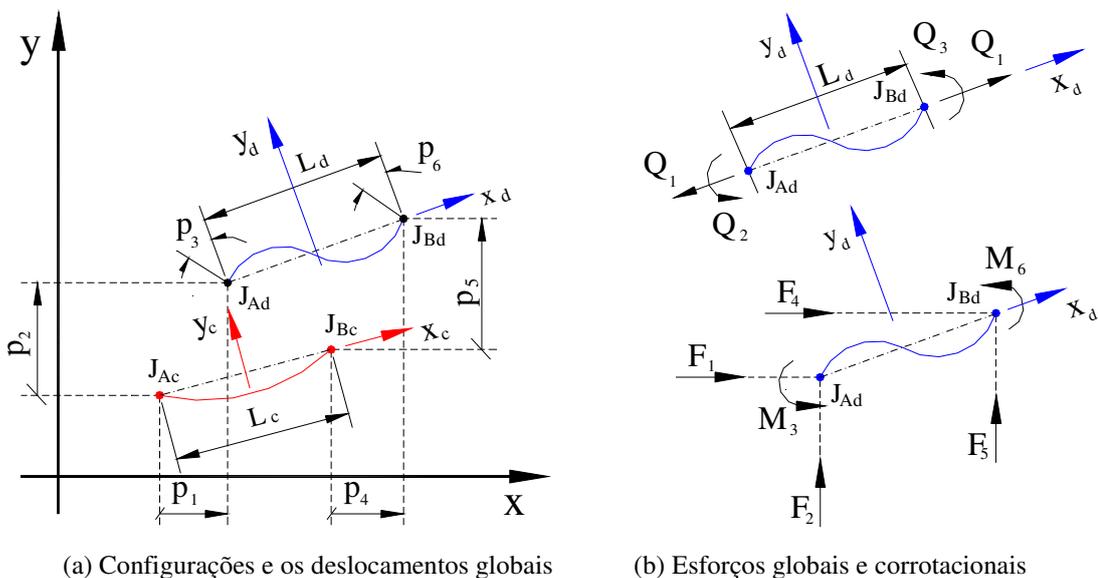


Figura 4.7 Sistema global e corrotacional.

Essas funções são estabelecidas a partir das condições de contorno do elemento e das coordenadas corrotacionais q_α , e são deduzidas no apêndice F.

Assim, o deslocamento axial u_{0d} é aproximado utilizando uma função linear em x ; e para o deslocamento transversal v_{0d} , um polinômio do terceiro grau em x , ou seja:

$$u_{0d}(x) = \left[\frac{x}{L_r} + \frac{1}{2} \right] q_1 = \Psi_1 q_1, \quad (4.15)$$

$$v_{0d}(x) = \left[1 + \frac{q_1}{L_r} \right] [\Psi_2 \tan q_2 + \Psi_3 \tan q_3] \cong \left[1 + \frac{q_1}{L_r} \right] [\Psi_2 q_2 + \Psi_3 q_3], \quad (4.16)$$

sendo que:

$$\Psi_2(x) = \frac{8x^3 - 4L_r x^2 - 2L_r^2 x + L_r^3}{8L_r^2} \quad e \quad (4.17a)$$

$$\Psi_3(x) = \frac{8x^3 + 4L_r x^2 - 2L_r^2 x - L_r^3}{8L_r^2}. \quad (4.17b)$$

Observe que L_r é o comprimento original, pois as funções de interpolação são estabelecidas no passo $\omega = 0$, onde $L_c = L_r$.

4.6 MATRIZES DE RIGIDEZ

Estabelecendo-se então o equilíbrio do elemento através do princípio dos trabalhos virtuais (PTV), aplicado ao volume de referência, escreve-se:

$$\int_{V_r} \sigma \delta \varepsilon dV_r = \sum_{i=1a6} P_i \delta p_i. \quad (4.18)$$

Observe que a variação de $\delta \varepsilon$ pode ser obtida aplicando-se a regra da cadeia (sabendo que ε é função de q_α , e colocando q_α em função de p_i), com a expressão:

$$\delta \varepsilon = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\alpha} \right) \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i} \right) \delta p_i, \quad (4.19)$$

e desde que $\delta p_i \neq 0$, obtém-se, substituindo a relação anterior na Eq. 4.18:

$$P_i = \int_{V_r} \sigma \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\alpha} \right) \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i} \right) dV_r = Q_\alpha \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i} \right), \quad (4.20a)$$

ou, na forma matricial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}_0^T \mathbf{Q}, \quad (4.20b)$$

que representa o equilíbrio do elemento finito sob forma indicial (ou matricial); em (4.20b) \mathbf{B}_0 é a *matriz de incidência cinemática* e \mathbf{Q} é um vetor cujas componentes são dadas por:

$$Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\alpha} \right) dV_r. \quad (4.21)$$

De acordo com as expressões anteriores, verifica-se que é necessário conhecer então a variação das grandezas corrotacionais (ou objetivas) em relação às globais, o que significa diferenciar q_α em relação às p_i . Considerando inicialmente a influência do ângulo φ_d , tem-se:

$$q_{\alpha,i} = \frac{\partial q_\alpha(\varphi_d)}{\partial p_i}, \quad (4.22)$$

com $\alpha = 1$ a 3 e $i = 1$ a 6; o que determina a denominada *matriz de mudança instantânea de coordenadas* $\mathbf{B}(\varphi_d)$, de dimensões [3 x 6], conforme expressão abaixo:

$$\mathbf{B}(\varphi_d) = \frac{1}{L_d} \begin{bmatrix} -L_d \cos \varphi_d & -L_d \sin \varphi_d & 0 & L_d \cos \varphi_d & L_d \sin \varphi_d & 0 \\ -\sin \varphi_d & \cos \varphi_d & L_d & \sin \varphi_d & -\cos \varphi_d & 0 \\ -\sin \varphi_d & \cos \varphi_d & 0 & \sin \varphi_d & -\cos \varphi_d & L_d \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Essa matriz é indicada também por Haldar e Nee em 1988 (Gao e Haldar, 1995). Como não se conhece a priori o ângulo de giro φ_d , procura-se estabelecer a relação $q_{\alpha,i}$

fazendo-se $\varphi_d = 0$ na equação anterior, com o que se obtém então a *matriz de incidência cinemática* \mathbf{B}_0 , já indicada na Eq. 4.20b, que é representada por:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{L_d} \begin{bmatrix} -L_d & 0 & 0 & L_d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_d & 0 & -1 & 0 \\ L_d & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & L_d \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Pode-se agora obter a matriz de rigidez do elemento referida ao sistema global derivando-se a Eq. 4.20a em relação às componentes dos deslocamentos globais p_j , lembrando-se que existe adicionalmente uma parcela advinda do movimento de corpo rígido, ligada à compatibilidade geométrica. Dessa forma chega-se à expressão:

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial p_j} + Q_\alpha \frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial p_i \partial p_j}. \quad (4.25)$$

Note que a primeira parcela da equação anterior pode ser obtida derivando-se a Eq. 4.21 em relação à q_β , ou seja:

$$Q_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta}, \quad (4.26)$$

onde:

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\alpha} \right) D \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\beta} \right) dV_r, \text{ e} \quad (4.27a)$$

$$H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right) dV_r. \quad (4.27b)$$

E substituindo agora a Eq. 4.26 na Eq. 4.25, pode-se escrever:

$$\mathbf{K}_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} (D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta}) q_{\beta,j}}_{\text{Grandezas Objetivas}} + \underbrace{Q_\alpha q_{\alpha,i j}}_{\text{Corpo rígido}}, \quad (4.28)$$

sendo as duas primeiras parcelas consequência das grandezas objetivas (que causam deformações no elemento) e a última devido ao movimento de corpo rígido do EF.

Através da reordenação dos termos da Eq. 4.28, encontra-se, finalmente:

$$\mathbf{K}_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} \mathbf{D}_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{Parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} \mathbf{H}_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{Curvatura do elemento}} + \underbrace{Q_{\alpha} q_{\alpha,i,j}}_{\text{P}\Delta \text{ e M}\phi}, \quad (4.29)$$

com a primeira parcela representando a lei constitutiva do material e as últimas caracterizando os efeitos de segunda ordem: a curvatura do elemento (P δ) com a segunda parcela; e o movimento de corpo rígido (P Δ) e (M ϕ), ambos na última parcela. Esses efeitos de segunda ordem já foram mostrados na Fig. 2.7.

Observe também que as derivadas de segunda ordem de q_{α} em relação à p_j , podem ser obtidas diretamente da Eq. 4.22 fazendo-se $\varphi_d = 0$, isto é:

$$q_{\alpha,i,j} = \frac{\partial^2 q_{\alpha} (\varphi_d = 0)}{\partial p_i \partial p_j}, \quad (4.30)$$

com $\alpha = 1$ a 3, $i = 1$ a 6, e $j = 1$ a 6. Como resultados dessas diferenciações são encontradas três matrizes, uma matriz para cada α , de dimensões [6 x 6], chamadas de *matrizes de compatibilidade geométrica* \mathbf{G}_{α} .

Pode-se então agora reescrever a Eq. 4.29 na forma matricial, ou seja:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ep} + \mathbf{K}_g, \quad (4.31a)$$

com:

$$\mathbf{K}_{ep} = \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0, \text{ e} \quad (4.31b)$$

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}_0^T \mathbf{H} \mathbf{B}_0 + \sum_{\alpha=1}^3 Q_{\alpha} \mathbf{G}_{\alpha} = \mathbf{K}_h + \mathbf{K}_{g\alpha}, \quad (4.31c)$$

sendo \mathbf{K}_{ep} definida a matriz de rigidez constitutiva e \mathbf{K}_g a matriz de rigidez geométrica.

Dessa forma, para cada elemento finito será obtida sua matriz de rigidez elasto-plástica com a rigidez geométrica incluída. Essas matrizes (\mathbf{K}_{ep} , \mathbf{K}_h e $\mathbf{K}_{g\alpha}$) são simétricas de dimensão [6x6] e podem ser apresentadas na forma:

$$\mathbf{K}_{ep} = \begin{bmatrix} A & 0 & B & -A & 0 & B \\ & C & D & 0 & -C & D \\ & & E & B & -D & E/2 \\ & sim. & & A & 0 & -B \\ & & & & C & -D \\ & & & & & E \end{bmatrix}, \quad (4.32a)$$

$$\mathbf{K}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F & G & 0 & -F & G \\ & & H & 0 & -G & -J \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & sim. & & & F & -G \\ & & & & & H \end{bmatrix} e \quad (4.32b)$$

$$\mathbf{K}_{g\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & M & 0 & 0 & -M & 0 \\ & N & 0 & -M & -N & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & M & 0 \\ & sim. & & & N & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.32c)$$

onde os termos dentro das matrizes valem:

$$\begin{aligned} A &= D_{1m} / L_r, & B &= D_{2m} / L_r, & C &= 12D_{3m} / (L_r L_d^2), \\ D &= 6D_{3m} / (L_r L_d), & E &= 4D_{3m} / L_r, & F &= 6H_m, \\ G &= 3H_m L_d, & H &= 4J, & J &= H_m L_d^2, \\ N &= Q_1 / L_d, & M &= (Q_2 + Q_3) / L_d^2, & H_m &= Q_1 / (30L_d). \end{aligned} \quad (4.33a-1)$$

Nas relações anteriores deve-se observar que há termos relacionados tanto com o comprimento deformado (L_d), que é o atualizado, quanto com o de referência (L_r), que é fixo.

Além dos esforços corrotacionais (Q_α), aparecem as grandezas D_{1m} , D_{2m} , e D_{3m} , que representam as *propriedades elasto-plásticas* a serem avaliadas no EF em cada etapa do processo incremental-iterativo.

As matrizes \mathbf{K}_{ep} , \mathbf{K}_h e $\mathbf{K}_{g\alpha}$ são obtidas partindo-se das relações já apresentadas, considerando as formas simplificadas das matrizes \mathbf{B}_0 , \mathbf{D} , \mathbf{G}_α e \mathbf{H} , e utilizando métodos numéricos, como mostra o apêndice G. Proceda-se posteriormente a uma rotação de eixos (θ) para expressar os valores da matriz local em relação ao sistema global.

4.7 PROPRIEDADES ELASTO-PLÁSTICAS

Dessa forma, as integrais no volume de referência (V_r), como as indicadas nas Eq. 4.21 e Eqs. 4.27a,b, são transformadas em somatórios no elemento. Isso pode ser apresentado, de maneira geral, através da expressão:

$$\int_{V_r} X(x) dV_r = \frac{L_r}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} [X_i(x_j) dA_{ri}], \quad (4.34)$$

onde j é o índice do nó inicial ($1 = a$) ou final ($2 = b$); i se refere à fatia de cada seção, onde se está integrando; $X_i(x_j)$ representa a grandeza avaliada na fatia i , no nó j ; dA_{ri} é a área de referência da fatia; e L_r é o comprimento de referência do EF. Note que é feita a média das integrais das propriedades nas áreas do nó inicial e final.

Esse processo caracteriza a integração numérica de Newton-Cotes, e justifica-se porque se conhecem as propriedades das fatias nos pontos extremos do EF. O uso de outras formas de integração (requerendo dados em outros pontos) torna-se ineficiente. Essas formas são comparadas com a quadratura de Gauss por Saje *et al.* (1996), onde se indica que “*integrações reduzidas são requeridas em análises elasto-plásticas por MEF*”, e adotaram então a integração de Lobato, que é realizada também com pontos nos extremos do domínio, tendo obtido resultados adequados.

Assim, as propriedades elasto-plásticas já mencionadas serão obtidas em termos médios usando:

$$D_{km} = 0.5(D_{ka} + D_{kb}), \text{ com } 1 \leq k \leq 3, \quad (4.35)$$

em que se avalia no nó índice j (a ou b):

$$D_{kj} = \int_{A_r} D_j(y_c)^{(k-1)} dA_r = \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} [D_{ij}(y_{ci})^{(k-1)} dA_{ri}], \quad (4.36)$$

ou seja: D_{1j} avalia numericamente a integral de $D dA$, D_{2j} de $D y_c dA$ e D_{3j} de $D y_c^2 dA$, no nó j (somando em todas as fatias da seção), e D_{ij} é obtido de acordo com Eq. 4.5, para cada fatia i do nó j . Note-se que agora o valor de y_c é o conhecido (não é o de

referência, $y_c \neq y_r$), porque com a plasticidade o centróide da área remanescente elástica não mais necessariamente coincide com o eixo do EF, (ver Fig. 4.4).

4.8 ESFORÇOS CORROTACIONAIS

Agora serão obtidos os esforços corrotacionais resultantes no EF, iniciando por:

$$Q_1 = N_m = 0.5(N_a + N_b), \quad (4.37a)$$

que representa o esforço normal atuante, como uma média dos valores N_j , j sendo (a) ou (b), encontrados nas integrações dos nós (J_A e J_B), isto é:

$$N_j = \int_{A_r} \sigma dA_r = \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} [\sigma_i dA_{ri}]. \quad (4.37b)$$

Já os momentos $Q_2 = -M_a$ e $Q_3 = M_b$, são dados por:

$$M_j = \int_{A_r} \sigma y_c dA_r = \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} [\sigma_i y_{ci} dA_{ri}]. \quad (4.38)$$

4.9 SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

Com as propriedades definidas, chega-se nas matrizes de rigidez \mathbf{K} dos elementos, e somando-se a contribuição de todos os elementos (m), realizando antes as rotações matriciais necessárias, obtém-se a matriz de rigidez global \mathbf{S} do sistema estrutural:

$$\mathbf{S} = \sum_{m=1}^{n \text{ elementos}} \mathbf{K}(m). \quad (4.39)$$

Como a análise é incremental, uma fração do carregamento nodal equivalente é aplicada em cada instante. Então se forma o sistema de equações lineares, característico dos métodos inelásticos de segunda ordem (seção 2.7), indicado pela Eq. 2.34a, que é resolvido por redução de Gauss, com substituição retroativa (Owen e Hinton, 1980). Determinam-se assim, os acréscimos de deslocamentos e de reações.

Como etapa seguinte, são obtidas: a deformação e a tensão de cada fatia, de cada seção (nó inicial e final de cada elemento), e integrados os esforços internos.

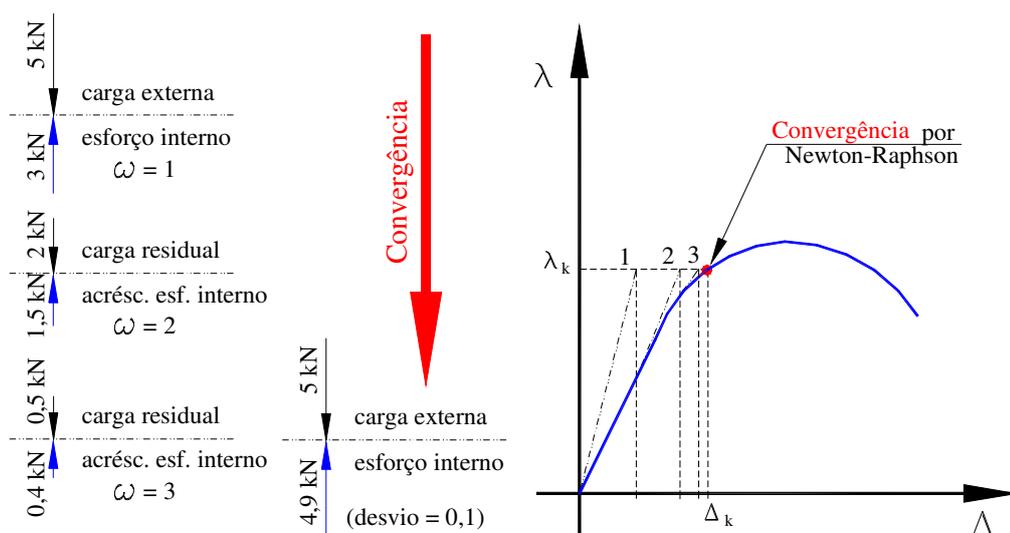
Os esforços desequilibrados do sistema estrutural são obtidos através da diferença entre as cargas aplicadas (externas) e os esforços internos nodais (ver Fig. 4.8a).

Essas forças desequilibradas são então eliminadas aplicando-se iterações do tipo Newton-Raphson, conforme mostrado na Fig. 4.8b. O processo é repetido até que uma determinada tolerância seja atingida, definida através de um critério de convergência, como o da norma dos deslocamentos, que é a adotada em geral (Clarke, 1994). No presente trabalho adotou-se a norma dos deslocamentos lineares e a norma das rotações, em separado (Kassimali, 1983). Deve-se indicar que os critérios de forças residuais e de norma dos deslocamentos, foram monitorados nos exemplos do capítulo 6, e que em todos os casos o adotado (em separado) foi governante (ou seja, o mais exigente).

4.10 INTEGRAÇÃO ITERATIVA DOS ESFORÇOS NORMAIS

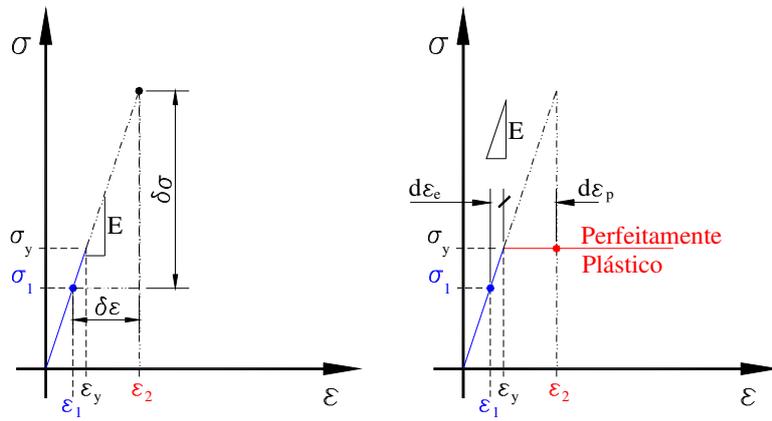
Acompanhando a Fig. 4.9a, quando uma determinada fibra estiver no regime elástico, a uma deformação ϵ_1 corresponderá uma tensão $\sigma_1 < \sigma_y$, tal que:

$$\epsilon_1 = \sigma_1/E < \epsilon_y. \tag{4.40}$$



(a) Definir as cargas residuais (b) Correção da rigidez iterativamente

Figura 4. 8 Solução do problema não-linear.



(a) Escoamento: $\sigma_1 + \delta\sigma > \sigma_y$ (b) Deformação permanente: $d\epsilon_p$

Figura 4.9 Início da plastificação da fatia (fibra).

Porém quando ocorrer um acréscimo de deformação, num dado passo de carga do processo incremental-iterativo, tal que:

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 + \delta\epsilon \geq \epsilon_y, \tag{4.41}$$

então a tensão encontrada na fibra será:

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \delta\sigma = \sigma_1 + E\delta\epsilon > \sigma_y \therefore \sigma_2 = \sigma_y, \tag{4.42}$$

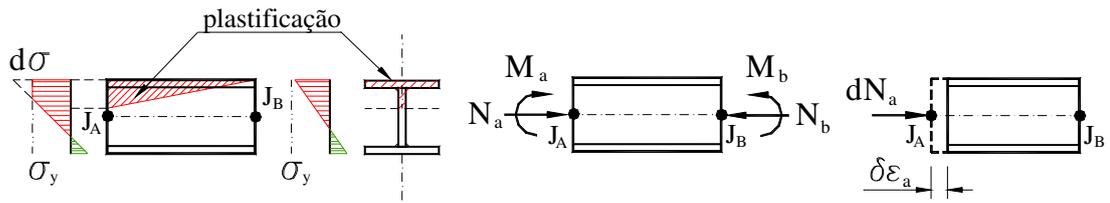
e a fibra estará em regime de plastificação.

Haverá então uma deformação permanente (plástica) $d\epsilon_p$, mostrada na Fig. 4.9b, e uma deformação elástica $d\epsilon_e = (\epsilon_y - \epsilon_1)$, de tal forma que:

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 + d\epsilon_e + d\epsilon_p = \epsilon_y + d\epsilon_p > \epsilon_y. \tag{4.43}$$

A Fig. 4.10a mostra a situação em que o nó J_A de um EF plastifica, e do outro lado, no nó J_B , as fibras permanecem no regime elástico. Haverá então uma faixa de plastificação (uma ZP) ao longo do EF.

Observe também que a Eq. 4.42 só pode ser definida considerando uma redução da tensão, antes avaliada como sendo superior a σ_y . Assim ocorrerá naturalmente uma parcela de tensão $d\sigma$ não equilibrada. Integrando-se as tensões em todas as fatias das seções, nos nós inicial e final desse EF, obter-se-á o vetor de esforços internos:



(a) ZP causa $d\sigma$ desequilibrado (b) Esforços internos no EF (c) Deformação adicional
 Figura 4. 10 Formação de ZP em um nó do EF.

$$\mathbf{P} = \{N_a, -M_a, N_b, M_b\}^T = \{Q_1, Q_2, Q_3\}^T = \mathbf{Q}. \tag{4.44}$$

Ocorre que esses esforços apresentarão uma parcela de desequilíbrio no esforço normal, causada pelos valores $d\sigma$ não equilibrados:

$$dN_a = N_a - N_b \neq 0. \tag{4.45}$$

Foi verificado que essa diferença não pode ser restaurada através do processo iterativo de Newton-Raphson. Para ajustar tensões de forma a equilibrar os esforços normais, este trabalho apresenta um novo processo iterativo, aplicado a todos os elementos que tenham fibras plastificadas, nos quais, enquanto houver uma diferença $|dN_j| > \text{tolerância} (\cong 0.1\%)$, será calculada uma deformação axial adicional no nó índice j (a ou b), onde ocorreu dN_j , com a expressão:

$$\delta\epsilon_j = dN_j/A_{cj}, \tag{4.46}$$

na qual A_{cj} é a área da seção conhecida (naquela iteração), avaliada no nó de índice j (a ou b), que será atualizada iterativamente. Assim, novas tensões são obtidas e também outros esforços \mathbf{P} , e o ciclo será repetido até se atingir a convergência do processo.

O objetivo dessa tarefa é garantir que em cada EF ter-se-á sempre $N_a \cong N_b \cong Q_1$, visto que o esforço normal deverá ser constante (inalterado entre os extremos do EF), já que não há carga axial externa aplicada no interior do EF.

Não é necessário fazer o mesmo para o momento, que é avaliado linearmente ao longo do EF, sendo possível seu equilíbrio ou ajuste na iteração seguinte usando apenas o esquema de Newton-Raphson.

Adicionalmente, deve-se esclarecer que esse processo tem o intuito de devolver (ou trazer) a seção que plastifica à superfície limite, corrigindo distorções naturais da integração dos esforços em seções sujeitas à plasticidade.

Essa etapa é similar ao que ocorre na Fig. 2.22, quando se utiliza o método ERP de segunda ordem, que usa o artifício de um vetor de carga fictício (vetor correção) para manter o ponto na curva de interação, ou seja: quando o esforço axial aumenta é necessário reduzir o momento plástico (Machado, 2005).

A justificativa desse processo pode ser expressa como: “*os esforços nodais de EF baseados em deslocamentos não devem ser recuperados através da integração direta das tensões nas fibras ao longo das seções nas extremidades do EF, porque, em geral, as equações diferenciais de equilíbrio não são atendidas ali (para formulações fracas que assumem alguma função de forma para aproximar o EF deformado), quando ocorre a plasticidade. Tampouco a matriz de rigidez tangente do EF deve ser usada para recuperar os esforços incrementais do EF*”, já que “*essa não pode capturar a não-linearidade do material que aparece no atual passo de carga*” ω (Teh e Clarke, 1999).

Pi e Trahair (1994) explicam que “*termos significativos são perdidos com as aproximações usuais da engenharia ($\cos \theta_d \approx 1$, $\sin \theta_d \approx \theta_d$ e $1 + \varepsilon \approx 1$) nas fases iniciais das derivações das relações não-lineares*”, o que torna essas formulações mais fracas.

Alvarez e Birnstiel (1969), nos primórdios da técnica de ZP, já indicavam a “*necessidade de correção iterativa de (N_j e M_j) no próprio passo de carga ω* ”, notando que “ *M_j depende de N_j e da deflexão, e que o ajuste de M_j deveria ser feito após isso, em outro processo iterativo*”.

Torkamani e Sonmez (2001) indicam que, em algumas formulações de EF para ZP, como a de Hall e Challa (1994); a matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g viola o princípio dos movimentos de corpo rígido, ou seja: deslocamento e giro produzindo esforços espúrios. Mas esse não é o caso em questão: se os esforços são espúrios, a integração iterativa apenas do normal não conseguiria corrigi-los.

Pode-se considerar então que o procedimento adotado tem uma justificativa teórica, além de um significado físico, razão pelo qual os resultados obtidos parecem ter uma razoável coerência, como será visto no capítulo 6.

Por fim, vale enfatizar que esse ajuste na integração de esforços é uma inovação, contribuição do presente trabalho para essa linha de pesquisa.

4.11 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarez, RJ; e Birnstiel, C; 1969. Inelastic analysis of multistory multibay frames. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 95 (11) 1969, pp. 2477 a 2503.
- Biot, 1939. Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for body under initial stress. *Philosophical Magazine.* Vol. 27 pp. 468 a 485.
- Chen, WF; e Han, DJ; 1987. *Plasticity for structural engineers.* Spring-Verlag, Nova Iorque.
- Clarke, MJ; 1994. Em Chen, WF; e Toma, S; *Advanced analysis of steel frames: theory, software and applications.* CRC Press, Boca Raton.
- Galambos, TV; 1982. *Structural members and frames.* Dept. Civil Engineering. Un. Minnesota, Mineapolis, pp. 373.
- Gao, L; e Haldar, A; 1995. Safety evaluation of frames with PR connections. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 121 (7), pp. 1101 a 1109.
- Hall, JF; e Challa, MVR; 1994. Earthquake collapse analysis of steel frame. *Earthquake Engin. & Struct. Dynamics.* Vol. 23 pp. 1199 a 1218.
- Higgins, TR; e outros, 1971. Plastic Design in Steel- A guide and commentary. ASCE WRC. *Manuals and reports on engineering practice.* Vol. 41, Nova Iorque.
- Kassimali, A; 1983. Large deformation analysis of elastic-plastic frames. *ASCE J. Struct. Division.* Vol. 109 (8) 1983, pp. 1869 a 1886.
- Lavall, ACC; 1996. *Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal.* Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP, Brasil.
- Machado, FCS; 2005. *Análise Inelástica de Segunda Ordem de Sistemas Estruturais Metálicos.* Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Neal, BG; 1977. *The Plastic Methods of Structural Analysis.* 3^a Ed., Chapman and Hall, Londres, RU.
- Owen, DRJ; e Hinton, E; 1980. *Finite elements in plasticity: theory and practice.* Pineridge. Press Ltd, Swansea, RU.
- Pi, YL; e Trahair, NS; 1994. Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns. I- Theory e II- Applications. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 120 (7) pp. 2041 a

2083.

- Pimenta, PM; 1986. Aspectos da análise não-linear de estruturas reticuladas. *Anais do 7º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*. São Carlos/SP, Brasil.
- Saje, M; Planinc, I; Turk, G; e Vrtanar, P; 1996. A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames. *Comp. Meth. Appl. Mechanics and Engineering*. Vol. 144, pp. 125-151.
- Salmon, CG; e Johnson, JE; 1995. *Steel structures – Design and behavior – Emphasizing load and resistance factor design*. Harper Collins Publishers, 3ª Ed., pp. 1096.
- Silveira, RAM; 1995. *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC/RJ, Rio de Janeiro/MG, Brasil.
- Teh, LH; e Clarke, MJ; 1999. Plastic-zone analysis of 3D steel frames using beam elements. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 125 (11) 1999, pg. 1328 a 1337.
- Discussão: Xu, Y; e Liang, S; 2002. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 128 (9) 2002, pp. 1236 a 1239.
- Torkamani, MAM; e Sonmez, M; 2001. Inelastic large deflections modeling of beam-columns. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 123 (9) 1997, pp. 1225 a 1235.
- Vlassov, BE, 1962. Em Mori, DD; 1988. *Flexo-torção: Teorias de 1ª e 2ª ordem, automatização do cálculo*. Dissertação de Mestrado. EESC/USP São Carlos/SP, Brasil.

5

ASPECTOS COMPUTACIONAIS

SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
5.1	Introdução..	126
5.2	Generalidades	126
5.3	Processo Incremental-Iterativo	129
5.4	Integração Iterativa dos Esforços Normais	132
5.5	Aspectos Importantes	133
5.6	Fluxograma Geral	137
5.7	Referências Bibliográficas	140

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão descritos alguns aspectos da implementação computacional realizada, embora não seja objetivo desta dissertação o desenvolvimento de qualquer programa de computador. Por isso, os aspectos abordados serão de cunho absolutamente geral.

Na próxima seção procura-se mostrar algumas características básicas que devem ser observadas em qualquer ferramenta computacional que se propõe a realizar uma análise avançada.

A seção 5.3 fornece alguns comentários adicionais pertinentes ao processo de solução de sistemas não-lineares. A abordagem de alguns detalhes referentes à implementação da integração iterativa dos esforços normais é mostrada na seção 5.4; e a referente aos aspectos importantes (curvatura inicial, fora de prumo e tensões residuais) na seção 5.5. Um fluxograma geral do processo de solução está na seção 5.6.

Finalmente, as referências bibliográficas usadas estão na última seção.

5.2 GENERALIDADES

Foi utilizado um conjunto de programas interligados, denominado PPLANAV*, com algoritmo e codificação geral próprios, para o qual todas as fases de testes dos diversos módulos foram realizadas individualmente e globalmente.

Esse conjunto foi codificado usando a linguagem Turbo-Basic da Borland International Inc. ®, sob o sistema operacional DOS, sendo escolhida essa linguagem devido ao maior domínio do autor sob a mesma. Tendo em vista toda a complexidade do processo, e as diversas possibilidades existentes de se desenvolver essa programação, fica claro que uma linguagem adequada deve ser: versátil, clara, provida de recursos especiais, e capaz de gerar códigos executáveis eficientes (Miller, 1987).

A linguagem Fortran, já com as melhorias introduzidas nas versões 77, 90 e agora Intel (antes Compac), possui uma série de enxertos da linguagem C++, que são altamente dependentes das versões do sistema Windows e das máquinas onde os mesmos recursos ora funcionam ora não, causando uma série de dificuldades adicionais (extraprogramação), porque como antigamente, o Fortran não atende ao apelo do usuário (Farrer *et al.*, 1992).

Assim, as definições limitadas à eletrônica, que antes eram amarradas no antigo “assembler” da máquina, foram agora atreladas ao C++ (o novo assembler), onde cada hora se tem resultados diferentes para os mesmos comandos. Por exemplo: se a matriz for indexada por linha e coluna da forma tradicional, o programa fica pelo menos 3 vezes mais lento, ou seja, se obriga a mudar todos os índices do problema, que será agora indexada por coluna e linha, para atender “exigências” desse Fortran (!).

Dessa forma, se optou por uma linguagem menos dependente de condições da eletrônica e que gera um código compacto e eficiente.

São características dessa implementação:

- a. executa o cálculo de pórticos planos de aço, onde os perfis de todas as barras são de seção I, com a alma contida no plano do pórtico;
- b. os programas PPLANAV* são independentes, com tarefas específicas, de tal sorte que todos os dados, lidos ou produzidos, são colocados em disco;
- c. todos os resultados produzidos são armazenados em arquivos, exceto a MRG, que é destruída no final do processo, por ser normalmente muito grande;
- d. a parte já processada é colocada em arquivos no disco rígido e as partes em processamento na chamada memória virtual (exemplo: o portal de Vogel, 1985, a ser analisado na seção 6.6; gerou 25 Mb de arquivos finais e apenas 2.5 Mb operados diretamente na memória virtual de capacidade 17 Mb, em cada iteração);
- e. tendo em vista o excessivo uso de memória em disco, não é possível desenvolver o mesmo em sistemas Windows, pois ficaria extremamente lento e ineficiente;
- f. o sistema utilizado não é compatível com nenhuma versão do sistema Windows e a tentativa de forçar a máquina, em versões com DOS simulado, provoca danos ao disco rígido (e possível perda do HD, visto que o programa não reconhece tentativas de proteção de áreas pelo Windows);
- g. a geometria é definida por barras compostas de EFs interligados, sendo no início lida a configuração perfeita;
- h. os materiais obedecem às leis constitutivas indicadas na seção 4.3, (como já visto na Fig. 4.3c), porém neste trabalho é utilizado apenas o tipo elástico perfeitamente-plástico;

- i. são lidas as dimensões dos perfis e são calculadas as propriedades elásticas das seções (A_g , W_z e I_z), bem como o módulo plástico (Z_z);
- j. os carregamentos são compostos de cargas nodais concentradas, e no caso de cargas distribuídas nas barras, as forças nodais equivalentes são geradas;
- k. todos os carregamentos podem ser fatorados, combinados; e ainda serem processados segundo condições diferentes, em hipóteses diferentes;
- l. todas as cargas e os carregamentos são classificados em fixos ou incrementais;
- m. são definidas hipóteses com situações de carregamentos combinados, fatorados ou não, sujeitos a um histórico, ou seja, um processo incremental;
- n. cada hipótese é processada independentemente, na ordem, e usando a mesma configuração de referência do problema, com imperfeições ou não;
- o. cada hipótese segue um histórico, que é iniciado com a aplicação de todas as cargas fixas, fatoradas ou não, de todos carregamentos considerados fixos na hipótese, podendo haver cargas fixas de um carregamento incremental se selecionados naquela hipótese;
- p. todas as cargas incrementais, de todos os carregamentos incrementais, fatoradas ou não, entram no processo incremental da hipótese, podendo haver cargas incrementais de um carregamento fixo;
- q. são possíveis até 10 tipos de passos incrementais constantes, em qualquer ordem, e com qualquer número de repetições. Cada passo incremental, na sua ordem, é aplicado a todo o conjunto. Pode(m) haver carregamento(s) não utilizado(s) na hipótese, e também ocorrer o mesmo carregamento com fatores e considerações diferentes (parte fixo e parte incremental) na mesma hipótese;
- r. como o objetivo inicial dessa pesquisa (em 2004) era ligações, partes referentes foram desenvolvidas, embora não-operacionais, na fase atual, tornam o corpo do processo maior.

É gerado um relatório onde todos os dados de geometria perfeita e da configuração original, carregamentos, cargas, hipóteses e todos os dados fornecidos ou gerados são apresentados e checados. Complementando, são apresentados, para cada hipótese, a cada passo incremental: o fator de carga, o valor do critério de convergência obtido e o número de iterações realizadas até a convergência; os deslocamentos nodais, as reações e os esforços solicitantes nos EFs.

Também são indicados os valores máximos e mínimos dos esforços nos EFs, e onde ocorreram. Para cada EF, em cada seção, são apresentadas as fatias de maiores tensões e maiores deformações plásticas (se houverem), o número de fatias plastificadas, a relação de área e inércia remanescente elástica em relação às propriedades originais.

Cada hipótese analisada termina quando ocorre uma das situações:

- a. final do histórico incremental sem colapso;
- b. parada solicitada após ser atingido o número máximo de iterações sem convergir, a pedido do operador;
- c. encontrado colapso: detectou-se singularidade ou valor negativo de pivô no processo de resolução do sistema de equações por Gauss;
- d. estouro de capacidade de memória ou de arquivos em disco, em função do tamanho do problema;
- e. erros genéricos do programa, com diagnóstico direto na tela.

Finalizando, tendo em vista a grande quantidade de dados manipulados, os programas podem fornecer a saída de todos os resultados produzidos, em tempo de execução, com paradas, o que permite desenvolver a depuração e a checagem de diversas etapas. Por outro lado, essa capacidade também aumenta o código correspondente, o que torna, mais uma vez, o processo com elevado tempo de processamento. A alternativa de retirar esses comandos representa refazer um sistema computacional longo, onde qualquer passo, fora de ordem, é extremamente difícil de detectar, e compromete seriamente os resultados finais, razão pela qual não foi feita.

5.3 PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

Para solução do problema não-linear é utilizada a técnica incremental-iterativa, o que significa aplicar incrementos de carga estipulados com o objetivo de:

- a. determinar o início do escoamento, tanto o maior fator de carga para o qual nenhuma fibra escoou, quanto o menor fator de carga para o qual alguma fibra escoou;
- b. monitorar o processo de plastificação da estrutura, de forma a poder determinar aproximadamente o surgimento das zonas plásticas (ordem e

- posição), e as partes onde a plastificação é mais intensa ou mais distribuída;
- c. estabelecer a carga limite, tanto o maior fator de carga para o qual o colapso ainda não ocorreu, quanto o menor fator de carga em que o colapso ocorreu.

Estabelecer esses passos incrementais exige uma série de tentativas (execuções preliminares de cada cálculo), de forma a determinar intervalos cada vez menores, em que tanto o escoamento, quanto o colapso, ocorreu, cada vez com um campo menor (exemplo: inicialmente com passos de 10 ou 5 %, a seguir com passos de 1 % e na versão final 0.1 % em todos os casos).

Procurou-se neste trabalho, sempre que possível, estabelecer esses limites com uma precisão de 0.1 %. Talvez, para uso prático, poder-se-ia usar valores maiores (0.5 ou até 1 %). Note que quanto mais rigorosa essa precisão, maior também é o tempo de processamento, pois quanto mais próximo do colapso, mais a curva que representa a trajetória de equilíbrio do sistema se torna horizontal, ou seja, mais a rigidez tangente possui uma inclinação menor, levando a mais ciclos iterativos.

O processo iterativo procura estabelecer dois estados consecutivos, em que as diferenças encontradas na avaliação de um dado critério de convergência, se tornam menores que o valor estabelecido de desvio, denominado de tolerância. Na verdade, essa tolerância pode ser vista como um erro aceitável, inevitável e natural ao se adotar soluções numéricas.

A adoção dessa tolerância não significa que os resultados serão mais ou menos corretos, significa que dois estados consecutivos de iteração apresentaram aproximadamente o mesmo comportamento, o processo iterativo repetiu a mesma situação duas vezes, o que indica uma convergência de resultados. Quando isso acontece considera-se o processo iterativo concluído para aquele incremento, e segue-se com a última configuração obtida para o incremento seguinte.

A estratégia adotada para o processo iterativo segue a técnica de Newton-Raphson padrão, isto significa que a geometria e as propriedades da configuração resultante na iteração anterior (agora configuração conhecida) são utilizadas para se obter as matrizes de rigidez constitutiva e geométrica, já definidas na seção 4.6.

Em seguida é montado um sistema de equações composto pelo vetor de cargas nodais equivalentes e da MRG atualizada (Eq. 2.34a), e são obtidas as variações dos deslocamentos naquela iteração.

Os deslocamentos totais são atualizados somando-se essas variações aos valores totais já acumulados, da mesma forma, até a iteração anterior (Eq. 2.34c).

Com esses deslocamentos totais (recém obtidos) é determinada a nova configuração da geometria e dos EFs (configuração deformada). Prosseguindo, são avaliados os deslocamentos corrotacionais correspondentes da iteração atual (q_1 , q_2 e q_3). Aplicando então as funções de interpolação (ϵ_m e α), parametrizadas com esses deslocamentos corrotacionais, são obtidos os acréscimos de deformação e de tensão em cada fatia, para cada nó, de todos EFs.

Pelo conhecimento do estado anterior de cada fatia e do diagrama tensão-deformação sendo empregado, é estabelecido o estado final correspondente de cada fatia e de cada nó. A partir daí se determina o estado elasto-plástico dos EFs, e finalmente os esforços internos de equilíbrio.

A diferença entre o vetor de cargas total aplicado e os esforços equilibrados, gera o vetor de cargas residuais da iteração seguinte.

O processo iterativo continua até que o critério de convergência seja atendido (tolerância de 0.1 %), como já indicado.

Podem ser utilizados os seguintes critérios de convergência em PPLANAV*:

- a. norma do resíduo das cargas aplicadas, em relação à norma do vetor de cargas da primeira iteração do atual passo de carga;
- b. idem (a), porém consideram-se, em separado, as forças e os momentos;
- c. norma dos deslocamentos residuais, comparado com a norma dos deslocamentos da primeira iteração do atual passo de carga;
- d. idem (c), porém consideram-se, em separado, os deslocamentos lineares e as rotações; e
- e. um critério de energia corrotacional, que avalia a variação da energia corrotacional (trabalho de deformação), em relação ao trabalho produzido na primeira iteração do atual passo de carga ($\sum Q_i q_i$).

Os resultados produzidos neste trabalho, (ver capítulo 6) foram obtidos utilizando o critério d, embora qualquer outro critério, pudesse ser escolhido. Verificou-se, entretanto, em diversas análises, onde os critérios das forças residuais (em conjunto ou em separado) teriam indicado convergência, o adotado requeria nova iteração.

Além disso, ao separar deslocamentos lineares das rotações, a avaliação também fica mais rigorosa, principalmente nos casos de elevada flexão, onde existem variações de rotações no processo que são significativas, mas pode ser mascarada ao se adotar a norma dos deslocamentos conjuntos, na medida em que a grandeza unitária é menor.

Por fim, o critério da energia tende a ficar mínimo, porém não necessariamente na iteração correspondente à indicada pelo critério (d), ou seja, às vezes aponta para uma iteração que não seria necessariamente a de melhor escolha, e sim a que produziu menor consumo de trabalho em relação a anterior. Assim, algumas vezes apontava para iteração onde havia cargas residuais ou deslocamentos residuais não desprezáveis. Note que isso sugere a necessidade de estabelecer um outro critério, (exemplo: que use o total de energia, trabalho total), talvez objetivo de uma pesquisa futura.

Nesse sistema PPLANAV* é permitido controlar o número máximo de iterações. Portanto, quando este número for superado, o analista pode aumentar o seu valor, ou parar o processo de solução.

É possível também estipular um número mínimo de iterações que devem ser realizadas, mesmo se o critério de convergência já tenha sido atendido. Isso permite zerar o vetor de cargas residuais quando a estrutura ainda está em regime elástico.

É feito também um registro do processo iterativo para checagem das etapas realizadas e se ter uma avaliação do critério adotado para a convergência.

5.4 INTEGRAÇÃO ITERATIVA DOS ESFORÇOS NORMAIS

Como já se indicou na seção 4.10, esta etapa é uma contribuição original deste trabalho. Então é apresentada a seguir a seqüência de operações para realizar essa tarefa, na forma de um algoritmo mostrado na Fig. 5.1.

Percebe-se dessa forma que se cria um ciclo iniciado na terceira linha, rótulo L_A , onde enquanto a avaliação de dN (provocada pela plastificação desigual) retornar um valor absoluto superior a 0.001, serão feitas correções nas tensões e deformações das fatias, a partir do valor de $d\epsilon$ calculado no nó onde ocorreu maior plasticidade ($NFP[1] > NFP[2]$ ou não), que é o causador da diferença. Se não existe dN então não são realizadas iterações nem correções de tensões ou deformações ($d\epsilon = 0$).

Obviamente, esse algoritmo deve ser introduzido na rotina onde se procede a avaliação dos esforços, passando a fazer parte da mesma, de preferência!

```

    Para m=1 a NELE { elementos } faça
      de[2] =0; de[1] =0;
    LA: Para j= 1 a 2 { nó inicial e final } faça
      N[j]=0; M[j]=0; NFP[j]=0;
      Se de[j] = 0
        então Calcula(ε[j], α[j]);
        senão ε[j]= ε[j] +de[j]; de[j] = 0;
      f.se;
      Para i=1 a NFA { fatias } faça
        Calcula(Afatia, yfatia);
        Calcula(εfatia[i], σfatia[i], icar[i]);
        N[j]= N[j]+ Afatia σfatia[i];
        M[j]= M[j]+ Afatia σfatia[i] yfatia;
        Se icar[i] > 0 então NFP[j]= NFP[j] +1; f.se;
      Fim faça(i);
    Fim faça (j);
    dN= N[2]-N[1];
    Se abs(dN) > 0.001 então
      Se NFP[1] > NFP[2]
        então de[2]= dN/Aefet[2]; volta em LA;
        senão de[1]= dN/Aefet[1] volta em LA;
      f.se;
    senão de[2] =0; de[1] =0;
    f.se;
  fim faça(m);

```

Figura 5. 1 Algoritmo da integração iterativa dos esforços normais.

5.5 ASPECTOS IMPORTANTES

A análise avançada é introduzida aqui no estudo de um problema estrutural geral, ao serem considerados isoladamente ou combinados os seguintes efeitos:

- curvatura inicial* (CI): os nós dos EFs que compõem as barras se deslocam para a forma de um arco senoidal em relação à corda que une as extremidades da barra, supondo uma deflexão máxima inicial δ_0 no ponto médio do arco (é assumido que $\delta_0 = L/1000$, onde L é o vão da barra);
- fora de prumo* (FP): os nós das barras das colunas ficam defasados horizontalmente na direção desejada (é usual considerar $\Delta_0 = A / 500$, onde A é a altura livre entre pisos ou nós extremos de ligação, no caso das colunas);
- tensões residuais* (TR): que podem ser aproximadas por diagramas lineares ou parabólicos conforme mostrado nas Fig.s 3.4 e 3.5, do capítulo 3.

As condições de curvatura e fora de prumo são individuais de cada barra (conjunto de EFs), podendo variar de barra para barra.

A geometria perfeita é lida, se gera de forma automática a geometria com imperfeições, e essa então é considerada como a da configuração de referência.

As tensões residuais são impostas a todos EFs do modelo de forma simultânea, embora o valor máximo σ_r possa variar por barra (no caso de se usar aços diferentes ou processos). As tensões complementam a definição de configuração de referência, sendo distribuídas nas fatias (avaliadas em cada fibra), para cada nó (inicial ou final) de cada EF.

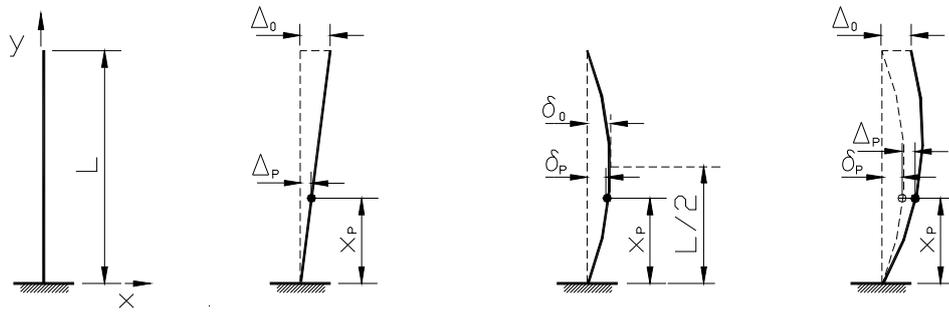
Em PPLANAV* foi usada a curvatura inicial na forma de arco de círculo, ao invés da forma senoidal, conforme se justifica na seção 6.4 do capítulo seguinte.

Entretanto, é importante destacar, conforme mostra a Fig. 5.2, como se modelam as imperfeições: FP e CI (Hajjar *et al.*, 1997). O FP é gerado alterando-se diretamente todas as coordenadas globais $x(j)$ dos nós dos EFs da barra imperfeita, através da expressão $x(j) = x(j) + \Delta_P$. Nessa equação, a parcela $\Delta_P = x_P \Delta_0 / L$ refere-se ao fora de prumo total Δ_0 pela proporção direta entre de posição local x_P , relacionada à coordenada global do nó $x(j)$, e a barra de comprimento L , representado na Fig. 5.2b.

Já a curvatura inicial da barra é obtida pela expressão $x(j) = x(j) + \delta_P$, onde $x(j)$ é a coordenada global do nó de posição local x_1 , que sofre um deslocamento δ_P em relação a um arco que no ponto médio possui flecha δ_0 , como representado na Fig. 5.2c, e poderá ter as seguintes formas:

- a. *arco senoidal*: $\delta_P = \delta_0 \sin(\pi x_P / L)$, e logo por CI total δ_0 , correspondente à barra de comprimento L , no ponto central;
- b. *arco de círculo*: é obtido fazendo-se o raio do traçado $R_{CI} = [L^2 / (8\delta_0) + \delta_0 / 2]$, dessa forma para cada nó se obtém: $\Phi_P = \arcsin[(-L + 2x_P) / (2R)]$ e por consequência $\delta_P = R(\cos \Phi_P - 1) + \delta_0$.

Agora, ao se aplicar ambas as imperfeições (FP e CI), surge um detalhe sutil, em que primeiramente é avaliada toda a CI dos nós δ_P , e a seguir cada ponto individualmente, recebe o traslado adicional Δ_P do FP. A diferença surge do fato que, se fosse realizado o FP primeiro, o arco (senoidal ou de círculo) seria traçado segundo uma dimensão L^* inclinada, e o ponto de imperfeição máxima não mais estaria na cota $L/2$ (metade do vão da barra), já que a medida δ_P seria afetada pelo ângulo do FP (tangente Δ_0/L).



(a) Barra genérica (b) Fora de prumo (c) Curvatura inicial (d) Efeitos conjugados
 Figura 5. 2 Imperfeições geométricas da(s) barra(s).

Em PPLANAV*, o FP pode ser indicado também globalmente, afetando todos os nós da estrutura, segundo uma dada proporção, sendo fornecido ao computador (dado lido) o valor da relação Δ_0/L . No caso da CI, é fornecido o valor da relação δ_0/L .

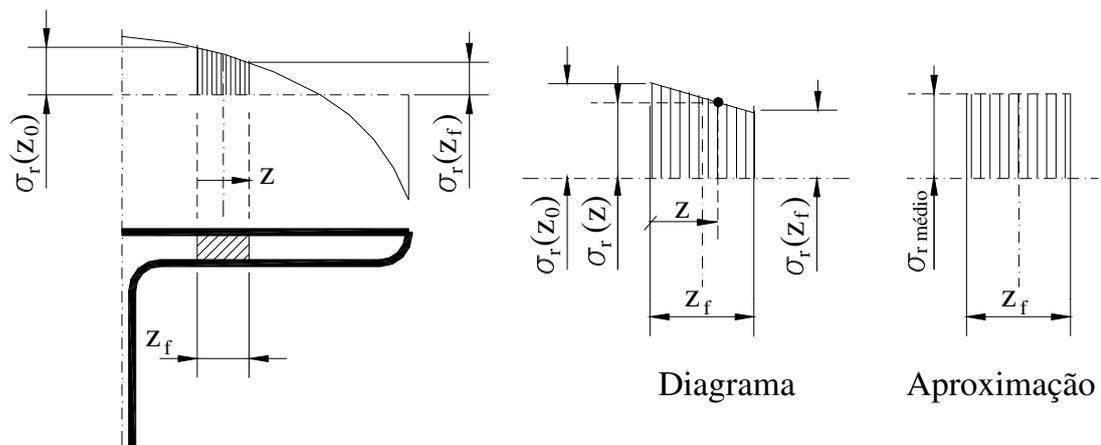
Para as tensões residuais, são feitas as seguintes considerações:

- as tensões são avaliadas por uma média que é atribuída para a fibra (toda a fatia). Como ilustrado na Fig. 5.3, essa TR média é dada pela expressão:

$$\sigma_r(i) = \frac{1}{z_f} \int_{z=0}^{z=z_f} \sigma_r(z) dz, \quad (5.1)$$

com $\sigma_r(z) = A_r z^2 + B_r z + C_r$, sendo A_r , B_r e C_r os coeficientes de parametrização das tensões residuais (linear ou parabólico), z é uma variável que relaciona a dimensão da fatia (que varia de 0 a z_f);

- sempre é simétrica, em ambas as direções da seção;
- é aplicada identicamente a todos os nós de todos os EFs, considerando apenas a variação de dimensões e de disposição das fatias;
- é gerada apenas metade da aba (por simetria);
- os esforços resultantes são nulos;
- as TRs no meio da aba e na extremidade da alma são sempre iguais, embora as TRs atribuídas às fatias possam ser diferentes, (já que são médias);
- as TRs não variam ao longo da espessura das abas e tampouco ao longo da espessura da alma;



(a) Diagrama de tensões

(b) Tensões na fatia

(c) Tensões na fibra

Figura 5.3 Avaliação das tensões residuais (TR) nas fatias.

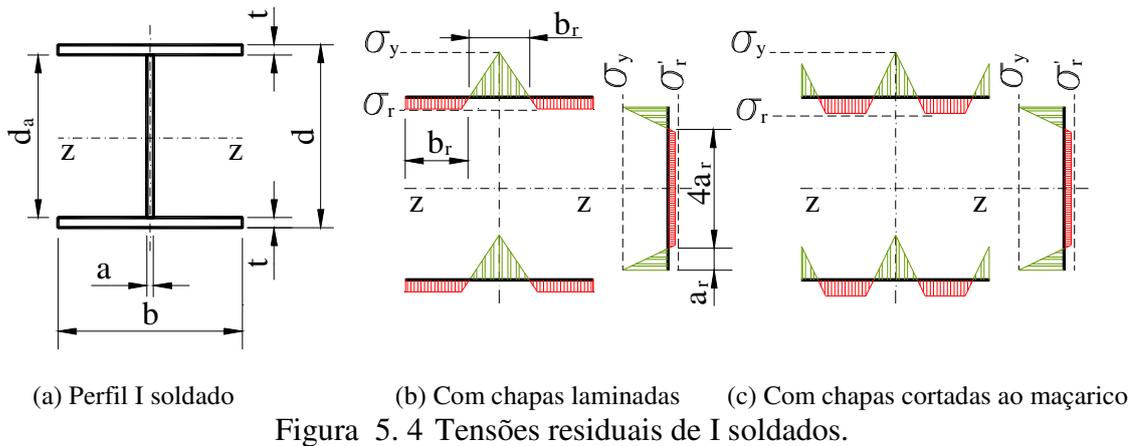
- h. se as TRs são de diagramas lineares, o valor de TRs médio corresponde ao valor da TR avaliada diretamente na fibra, já no caso das TRs dos diagramas parabólicos é necessário calcular o valor médio, como indicou o item (a);
- i. o valor de η (relação σ_r/σ_y) é variável, sendo arbitrado conforme o problema ou norma, por exemplo: o Eurocode 3 (1992) adota $\eta = 0.3$ ou 0.5 conforme a relação (d/b) do perfil, ver seção 3.5.3 do capítulo 3.

As TRs do tipo linear ou parabólico são usadas para perfis laminados em geral. Para os perfis soldados não se dispõe de fórmulas específicas, embora Weston *et al.* (1991) apresente alguns diagramas relativos, que são reproduzidos na Fig. 5.4.

Vários trabalhos sobre perfis soldados foram realizados no passado, onde se destacam: Beedle e Tall (1960), McFalls e Tall (1969), Alpstein e Tall (1970) e Bjorhovde *et al.* (1972), inclusive no Brasil (Pimenta, 1996), entretanto não se dispõe de um modelo com variações das TRs simples, como os disponíveis para laminados.

No diagrama da Fig. 5.4b, usando os valores do Eurocode 3 (1992), encontra-se aproximadamente $b_r = b/3$ e $a_r = d_a/6$, (essa dedução é mostrada no apêndice H).

Neste trabalho utilizaram-se fórmulas aproximadas de forma a atender o diagrama indicado na Fig. 5.4c, onde se admite as TRs máximas da ordem de σ_y . (ver apêndice H).



5.6 FLUXOGRAMA GERAL

Apresenta-se a seguir um fluxograma geral do sistema computacional PPLANAV*, notando-se que ele segue basicamente o mesmo esquema de outros programas de EFs, descritos tanto por Weaver Jr. e Johnston (1984) como por Bathe (1982).

O procedimento incremental-iterativo e o método geral de solução acompanham o trabalho de Owen e Hinton (1980), incluindo as partes da formulação da técnica das fatias, referentes ao programa PPLANEP (Lavall, 1996).

Observe que o sistema se compõe de: três programas iniciais de entrada e tratamento de dados (1-2-3), um programa de controle geral (X), cinco de execução das tarefas do ciclo incremental-iterativo (5-6-7-8-9) e um de saída dos resultados (P). Nota-se que esse fluxo segue basicamente aquele de Owen e Hinton (1980), sendo que eles implementaram apenas um programa com várias rotinas, e o PPLANAV* é um sistema (conjunto de programas).

Existem três loops de processamento, todos controlados por PPLANAVX, são:

- o externo, que incrementa as hipóteses (ITH), de 1 a Número Total de Hipóteses, usualmente adota-se $ITH = NITH = 1$, indicado pelo rótulo (3);
- o médio, de INCREMENTO de cargas, iniciando de zero que é a etapa de processamento dos carregamentos fixos ou das cargas fixas (se houverem), até o total de incrementos NINC; indicado pelo rótulo (2);
- o interno, que faz as diversas iterações, indicado pelo rótulo (1).

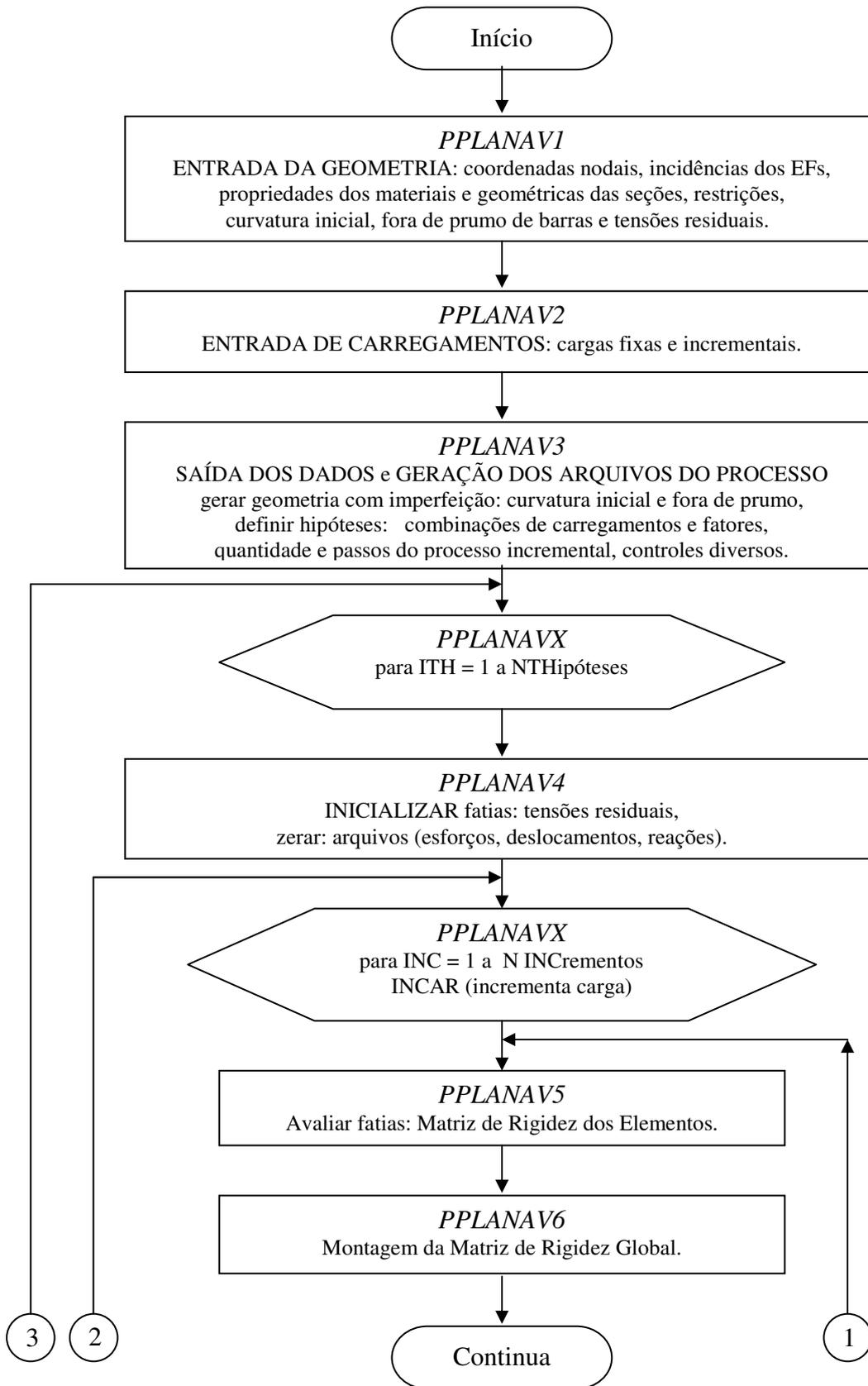


Figura 5.5 Fluxograma Geral parte I

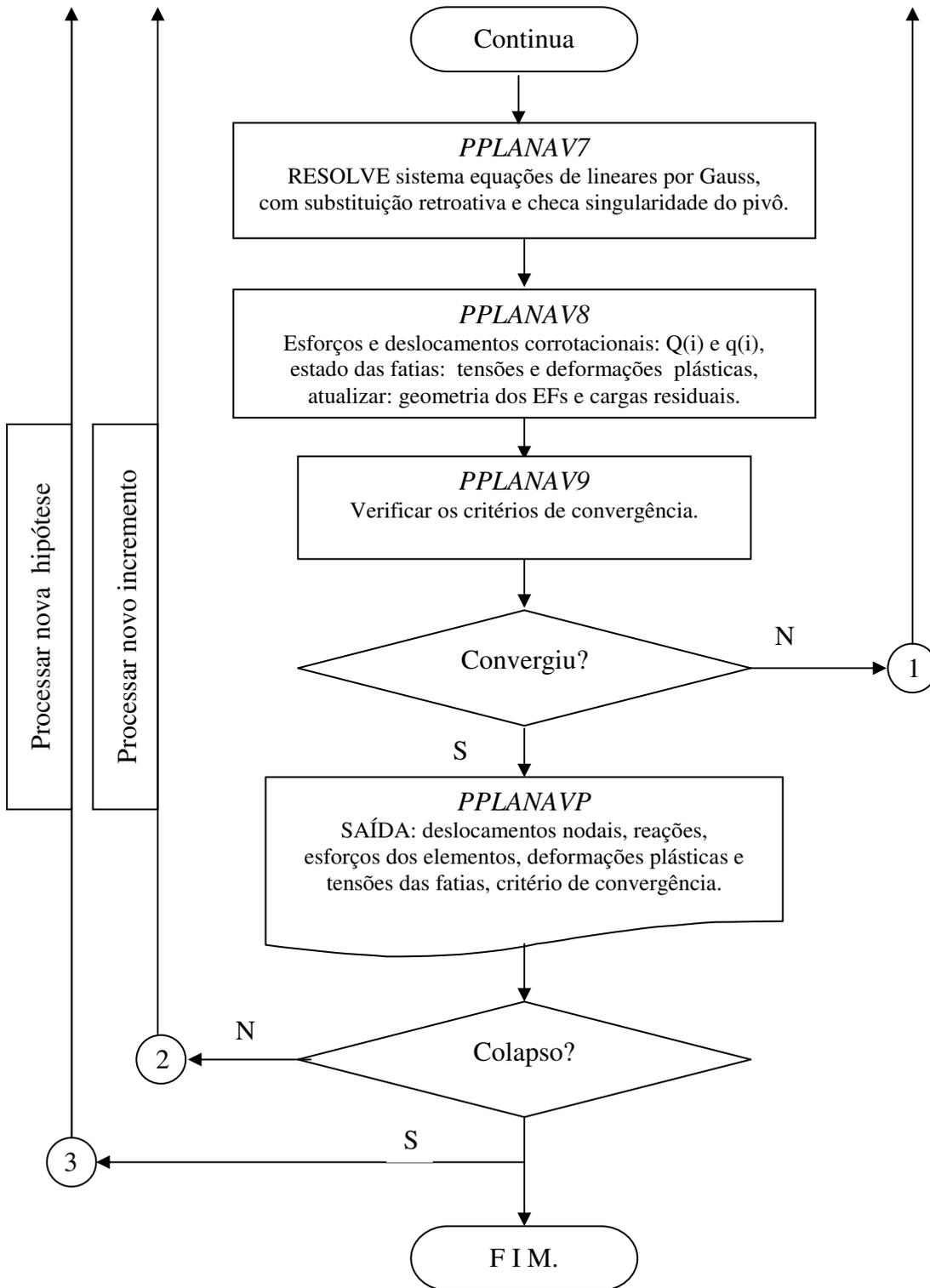


Figura 5.6 Fluxograma Geral parte II

5.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alpstein, BG; e Tall, L; 1970. Residual stresses in heavy welded shapes. *AWS Welding Journal*. Vol. (3), Suplemento pp. 93 a 105.
- Bathe, KJ.; 1982. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Massachusetts. Pp. 427.
- Beedle, LS; e Tall, L; 1960. Basic Column Strength. *ASCE J. Struct. Division*. Vol. 86, (7) pp. 139 a 172.
- Bjorhovde, R; Brozzetti, J; Alpstein, GA; e Tall, L; 1972. Residual stresses in thick welded plates.. *AWS Welding Journal* (8) 1972, Suplemento pp. 392-s a 405-s.
- Eurocode 3, 1992. CEN *EUROCODE 3 Design of Steel Structures*. Vol. Part 1, European Committee for Standardization, ENV 1993 -1-1 E, Bruxelas.
- Farrer, H; e outros, 1992. Fortran estruturado. *Programação de computadores*. Ed. Guanabara Koogan, Belo Horizonte/MG, pp 194.
- Lavall, ACC; 1996. *Uma formulação Teórica Consistente para a Análise Não-linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais na Seção Transversal*. Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP, Brasil.
- McFalls, RK; e Tall, L; 1969. A study of welded columns manufactured from flame-cut plates. *AWS Welding Journal*. Vol. (4), Suplemento pp. 141 a 154.
- Miller, AR; 1987. Turbo-basic *Programs for scientists and engineers*. Sybex, Nova Iorque.
- Owen, DRJ; e Hinton, E; 1980. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Pineridge Press Ltd, Swansea, RU.
- Pimenta, RJ; 1996. *Proposição de uma Curva de Flambagem para Perfis I Soldados Formados por Chapas Cortadas a Maçarico*. Dissertação de Mestrado, EEUFMG, Belo Horizonte/MG, Brasil.
- Vogel, U; 1985. Calibrating Frames. *Stahlbau*. Vol. 10 (1985), pp. 295-301.
- Weaver Jr, W; e Jonhston, PR; 1984. *Finite elements for structural analysis*. Prentice-Hall, Nova Jersey, pps. 402.
- Weston, G; Crisfield, MA; e Nethercot, DA; 1991. Lateral buckling in continuous composite bridge girders. *The Structural Engineers*. Vol. 69 num. 5/5 3-1991, pp. 79 a 87.

6

EXEMPLOS

SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
6.1	Introdução	142
6.2	Viga Bi-engastada de Liew (1992)	146
6.2.1	Sem Tensões Residuais	150
6.2.2	Com Tensões Residuais	153
6.3	Curva de Flambagem do AISC-LRFD (1993)	158
6.4	Coluna Engastada-Livre de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	163
6.4.1	Efeito da Malha	168
6.4.2	Curvatura Inicial (CI)	171
6.4.3	Fora de Prumo (FP)	174
6.4.4	Tensões Residuais (TR)	176
6.5	Portal de Kanchanalai (1977)	180
6.6	Portal de Vogel (1985)	186
6.7	Portal de Zhou <i>et al.</i> (1990)	193
6.7.1	Modelo Escolhido	199
6.7.2	Histórico do Carregamento	201
6.7.3	Curvatura Inicial (CI)	203
6.7.4	Fora de Prumo (FP)	204
6.7.5	Curvatura Inicial e Fora de Prumo (CI+FP)	206
6.7.6	Tensões Residuais (TR)	208
6.7.7	Configuração Inicial	209
6.8	Referências Bibliográficas	216

6.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo apresentar resultados produzidos pela formulação desenvolvida no capítulo 4, Serão usados exemplos tanto para a comprovação da qualidade e confiabilidade da teoria empregada, quanto para o estudo da influência das imperfeições físicas e geométricas iniciais, abordadas no presente trabalho (PT), denominadas por *aspectos importantes*.

Esses exemplos foram escolhidos de forma tanto a poder comprovar que a formulação proposta e sua implementação computacional atendem às exigências descritas seção 3.3 do capítulo 3 (Chen e White, 1993), como para se realizar a análise avançada nos itens indicados, observando os seguintes pontos:

1- análise de barra simples:

- a. verificar a formação de mecanismo na barra, ou seja, limite de resistência, em condições de flexão pura;
- b. verificar a flambagem elástica ou inelástica, de barra por compressão pura;
- c. realizar uma análise avançada de barra sujeita à condições de flexo-compressão, com os aspectos importantes incluídos.

2- Análise de conjunto de barras (no presente trabalho, os portais):

- a. verificar a formação de mecanismo, ou seja, limite de resistência numa estrutura de forma global, com esforços predominantes de flexão;
- b. verificar a flambagem de barra(s), ou global, com predominância da compressão ou flexo-compressão; e
- c. realizar uma análise avançada de estruturas aperticadas, cujas barras estão sujeitas à condição de flexo-compressão, com os aspectos importantes incluídos.

Os sistemas estruturais analisados neste capítulo são apresentados de forma agrupada na Fig. 6.1, e procuram cumprir esses objetivos, na seqüência indicada.

O primeiro exemplo, mostrado na Fig. 6.1a, é um problema clássico da plasticidade, envolvendo praticamente apenas esforços de flexão e a determinação da formação de mecanismo na barra. No passado, outros pesquisadores (Neal, 1977; Chen e Sohal, 1995) trataram um problema similar usando uma viga de seção retangular e solução através do método elástico com rótula-plástica (ERP).

Agora a viga de Liew (1992), trata do mesmo problema adotando a seção de um perfil I laminado comum, no qual, adicionalmente, foi considerado o efeito das tensões residuais (TR) e aplicado o método ERP refinado (ERP-R) na solução. Posteriormente, essa viga foi resolvida também por Chan e Chui (1997), através do método ERP com seção montada (ERP-M), e por Machado (2005) que empregou os métodos ERP, ERP-R e ERP-M. Na seção seguinte tratar-se esse problema com zona plástica (ZP), surgem diferenças interessantes e se comprova a obtenção de resultados precisos.

Na seção 6.3, o segundo exemplo, representado pela Fig. 6.1b, comprova a determinação da carga de flambagem inelástica de barra ao reproduzir a curva de flambagem do AISC-LRFD (1993), obtida basicamente através dos trabalhos de Kanchanalai (1977), onde são considerados tanto a TR como a curvatura inicial (CI) da barra. Adicionalmente, são obtidas as curvas de flambagem de dois I soldados.

O terceiro exemplo já desenvolve a análise avançada de barra: da coluna engastada-livre, representada na Fig. 6.1c, que pode ser vista também como um portal constituído de duas colunas engastadas na base, ligados a uma viga inextensível, rotulada nas extremidades, que apenas provoca compatibilidade dos deslocamentos e dos comportamentos das duas colunas, que seriam idênticos. Além disso, na seção 6.4, são analisadas alguns tópicos, incluindo várias possibilidades de curvatura inicial, fora de prumo (FP) e tensões residuais, como objetivo desta dissertação.

A partir da seção 6.5, os exemplos exploram o comportamento de um conjunto de barras, ou seja, de uma estrutura: os portais. No quarto exemplo, da seção 6.5, representado na Fig. 6.1d, se reproduz um dos problemas abordados no trabalho de Kanchanalai (1977), que serviu de base para a norma americana. Os resultados desse pesquisador foram obtidos usando outra formulação de ZP, mais precisa, e assim servem de gabarito para aferir os resultados do presente trabalho, tanto verificando a resistência como a estabilidade do conjunto.

O quinto exemplo, da seção 6.6, é apresentado na Fig. 6.1e. Trata-se de um problema de banco de provas mundial, em que se deseja comprovar os bons resultados anteriores, analisando agora um portal, no qual são incluídos todos os três aspectos importantes: TRs, FP e CI. Este problema foi proposto por Vogel (1985) e utilizado por diversos pesquisadores também para validar suas formulações e implementações computacionais (Ziemian, 1992, Teh e Clarke, 1998, Torkamani e Sonmez, 2001).

A seção 6.7 fornece o último exemplo, o mais extenso e especial. Esta seção que inicia com o problema de banco de provas de Zhou *et al.* (1990), composto de dois pórticos travados, representados na Fig. 6.1f. com bases (i) engastadas e (ii) rotuladas, respectivamente, e abordando também as condições de TRs e CI. Posteriormente, o problema é modificado um pouco, sendo o portal da Fig. 6.1f(i) transformado numa estrutura deslocável, como indica a Fig. 6.1g(i), então se procede a análise avançada e são estudados os vários aspectos importantes, o que é ilustrado na Fig 6.1g(ii).

Como os demais capítulos, no final se apresentam as referências bibliográficas.

Tendo visto a organização deste capítulo, é necessário esclarecer a forma adotada aqui para a apresentação dos resultados (gráficos e tabelas).

De maneira geral, procurou-se manter algumas grandezas que são consideradas fundamentais para uma melhor visualização do problema, como é o caso dos deslocamentos e das imperfeições geométricas. Já os esforços são em vários casos expressos na forma adimensional (exemplo: M/M_p).

No caso dos fatores de carga de colapso, entre outros, os valores produzidos neste trabalho serão apresentados, segundo a concepção da *análise limite*, como: limite inferior e superior, ou seja: $\lambda_{inf} \leq \lambda_{col} \leq \lambda_{sup}$. Isso significa que até o valor λ_{inf} não ocorreu o colapso, porém ao se dar o passo para o valor λ_{sup} , ocorreu o aparecimento de singularidade na MRG, comprovando o colapso por flambagem ou mecanismo. O λ_{col} está portanto no intervalo entre os dois limites indicados. Essa forma de apresentar será estendida a todo o capítulo, inclusive com relação ao evento escoamento (λ_y).

No caso dos valores finais de esforços e deslocamentos indicados, esses serão considerados sempre no limite inferior, visto que na situação de colapso os valores não convergiram e muitas vezes perdem o significado físico.

Em todos os resultados obtidos, o processo incremental foi feito por acréscimo direto de carga, com passos previamente calibrados, de forma a poder detectar claramente o ponto de início do escoamento e o ponto último antes do colapso, com uma precisão de 0.1 %.

Não foi usado nenhum artifício de otimização incremental como o comprimento do arco (Crisfield, 1991) ou outras estratégias de soluções não lineares descritas em Rocha (2000). Demais detalhes referentes à obtenção desses resultados são descritos no capítulo 5.

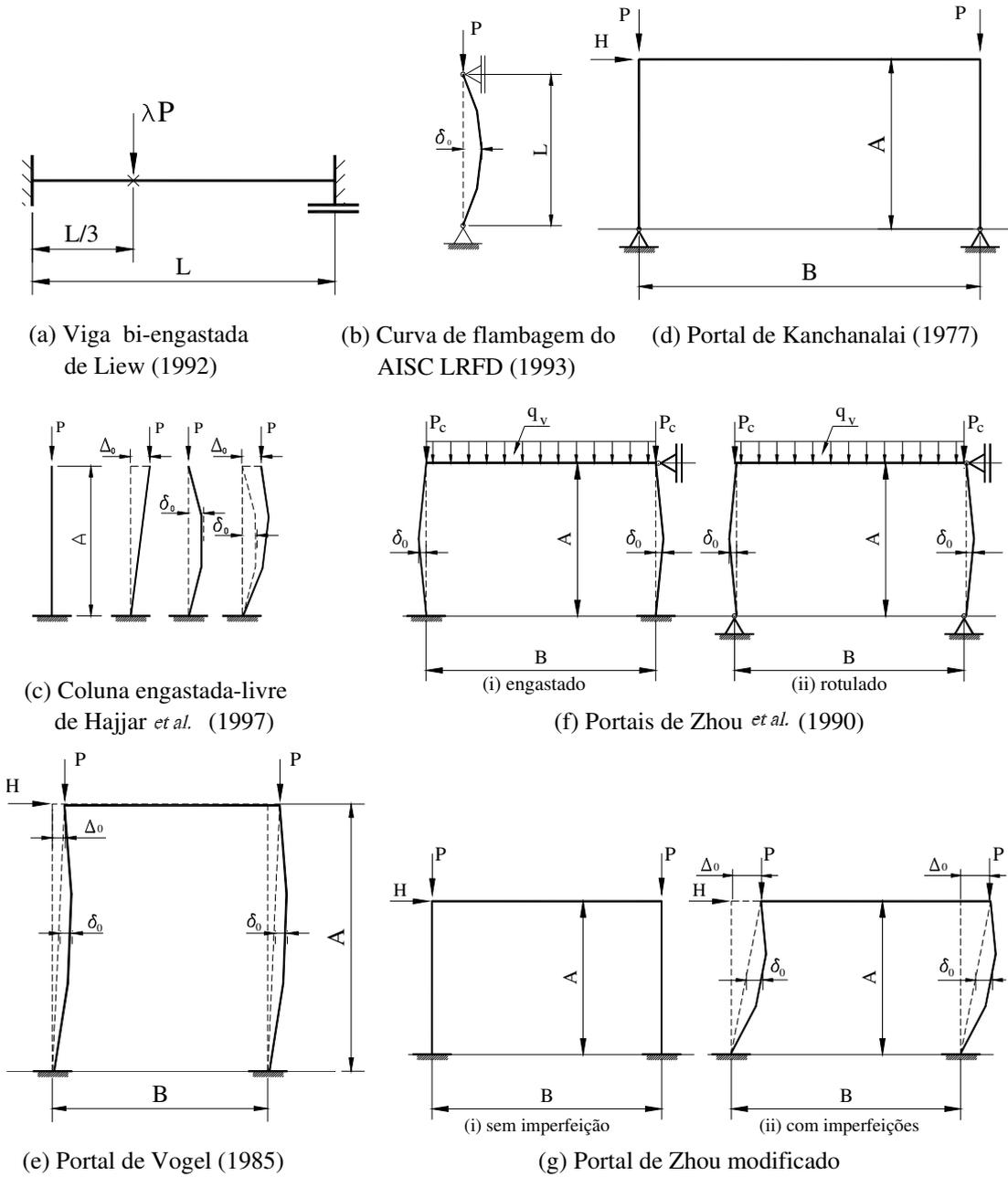


Figura 6.1 Exemplos do capítulo 6:

- (a) viga bi-engastada de Liew (1992);
- (b) coluna bi-rotulada do AISC-LRFD (1993);
- (c) coluna engastada-livre de Hajjar *et al.* (1997);
- (d) portal de Kanchanalai (1977);
- (e) portal de Vogel (1985);
- (f) portal de Zhou *et al.* (1990);
- (g) variante para estudos.

6.2 VIGA BI-ENGASTADA DE LIEW (1992)

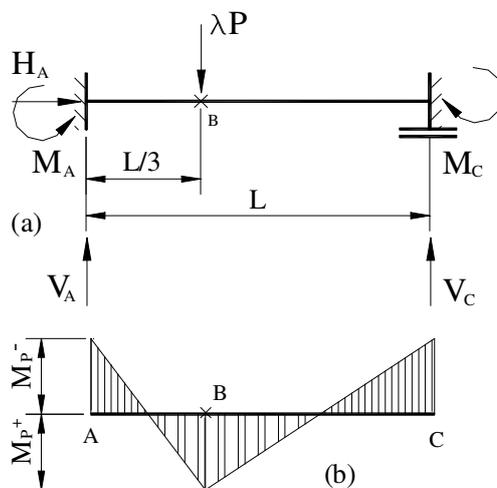
Este exemplo, representado na Fig. 6.2, considera uma viga bi-engastada com uma carga atuando a um terço do vão L . É um problema típico da plasticidade clássica (PC), sob a definição da carga de colapso baseada na formação de mecanismo, com o uso dos teoremas, como visto no capítulo 2 seção 2.6.1. Já na seção 2.6.2, através do emprego do método ERP procura-se avaliar a ordem de formação das RPs e os deslocamentos estimados.

Nos trabalhos anteriores envolvendo esse problema (Neal, 1977; Chen e Sohal, 1995; entre outros) se usava uma seção retangular para a viga. Então Liew (1992) modificou a seção para um perfil laminado americano e introduziu no modelo TRs.

O material é considerado elástico, perfeitamente plástico: aço ASTM A7, com tensão de escoamento $\sigma_y = 23.5 \text{ kN/cm}^2$, e módulo de Young $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$. A seção da viga é o perfil WF 8×48 representado na Fig. 6.3a.

Requer-se determinar o fator de carga de colapso λ , que fatora a carga P definida pelo mecanismo plástico da Eq. 2.30, representado pelo diagrama de momentos da Fig. 6.2b.

Para produzir resultados comparáveis, adota-se aqui uma seção equivalente (representada na Fig. 6.3b), na qual os valores das espessuras da aba (t) e da alma (a) são ajustados de forma a se obter os mesmos valores de área (A_g) e inércia principal no eixo z (I_z).



Dados:

$L = 300 \text{ cm}$ $L/3 = 100 \text{ cm}$
 material: aço ASTM A 7
 $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$
 $\sigma_y = 23.5 \text{ kN/cm}^2$ $\sigma_r = 11.75 \text{ kN/cm}^2$
 Perfil WF 8×48 americano
 $M_p = 18867.21 \text{ kNcm}$
 $P = 9 M_p / L = 566.016 \text{ kN}$
 $0 < \lambda < 100 \%$
 modelos com 3, 6, 9 e 12 EFs.

(a) Esquema estrutural (b) Diagrama de momentos

Figura 6.2 Problema da viga bi-engastada de Liew (1992).

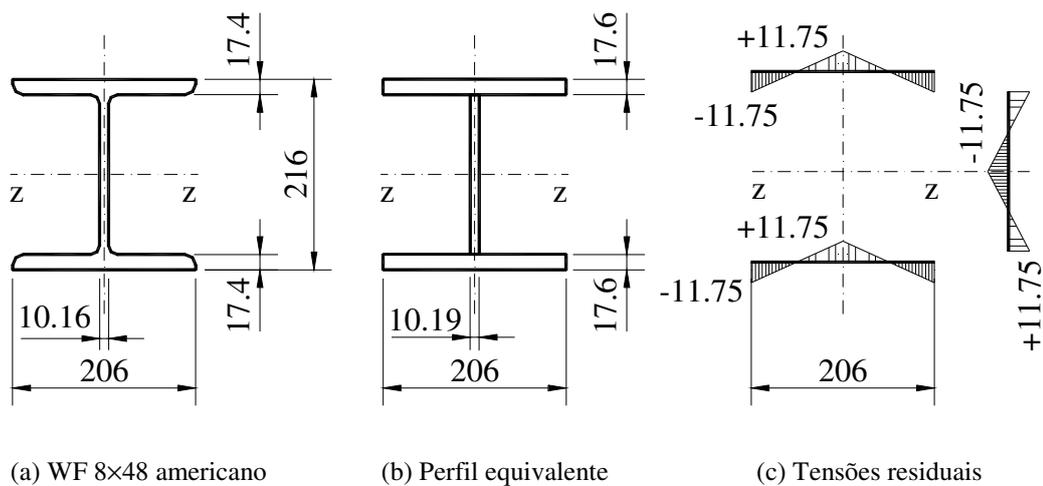


Figura 6. 3 Perfil adotado para viga bi-engastada.

Para esse problema Liew adotou o diagrama de TRs chamado de duplo linear (porque é linear na aba e na alma, ver Fig. 6.3c), seguindo o Eurocode 3 (1992), com valores máximos $\sigma_r = 0.5 \sigma_y$.

As dimensões e propriedades da seção WF 8×48 conforme padrões americanos (AISC Manual, 1978) são indicadas na primeira linha da Tab. 6.1, em unidades inglesas: polegada [in]. Os valores convertidos para unidades mais usuais no Brasil (mm para dimensões e cm para as propriedades) são mostrados na 2ª linha da Tab. 6.1. Já que a seção laminada possui uma transição curva entre a alma e as abas, o emprego de valores ajustados é inevitável. Na 3ª linha indicam-se os valores de um perfil equivalente, adotado por Machado (2005), no qual se ajustou o valor da espessura da aba (t), para se obter os mesmos valores de área (A_g) e módulo de resistência plástico (Z_z) do original, tendo em vista a sua abordagem com o método de ERP-R e ERP-M.

Para produzir resultados comparáveis com o método ZP, como já mencionado, se ajustou ambos os valores das espessuras (a é 0.3% maior, t é 0.07% menor), o que é indicado na 4ª linha.

Tabela 6. 1 Propriedades da seção I da viga bi-engastada.

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área A_g [cm ²]	Inércia I_z [cm ⁴]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	aba t	alma a			elástico W_z [cm ³]	plástico Z_z [cm ³]
AISC 1978	8.50 in	8.11 in	0.658 in	0.40 in	14.1 in ²	184 in ⁴	43.3 in ³	49.0 in ³
Convertido	215.90	205.99	17.399	10.160	90.967	7658.66	709.56	802.97
Machado	216	206	17.620	10.160	90.970	7660.00	–	803.00
PT	216	206	17.607	10.192	90.967	7658.60	709.13	802.86

(obs. PT: presente trabalho).

Deve-se observar que esses cuidados são importantes para se garantir uma coerência de resultados e efetivamente avaliar a discrepância de modelos (formulações), não de dados empregados.

Para Machado (2005), manter I_z significa reduzir Z_z , e por conseguinte o valor de M_p , o que provocaria resultados destoantes. No presente trabalho, usando ZP, é necessário manter tanto a área como a inércia, visto que essas propriedades são avaliadas a todo instante, e o momento plástico que será obtido surge naturalmente da integração de tensões nas fatias, como já visto na seção 4.8. Essas considerações são observadas em todos os exemplos, sendo por isso apresentadas outras tabelas similares ao longo deste capítulo, com a mesma finalidade.

Outro aspecto importante para um modelo de ZP é a malha, tanto na quantidade de EFs, quanto na quantidade de fatias.

Embora os modelos utilizando ERP, ERP-R e ERP-M, adotados nas referências e implementados por Machado (2005), para esse exemplo, tenham apenas 3 EFs, os modelos adequados para ZP devem ter pelo menos 6 EFs, sendo ideal 9 EFs. Os modelos de ZP com 3 EFs são pobres, não permitindo um bom resultado. O modelo com 12 EFs permite apenas uma visão mais detalhada das fatias plastificadas, não acrescentando maiores informações.

Também a malha de fatias, em que se divide a seção, representada apenas um quarto no caso da Fig. 6.4 (meia-aba e meia-alma), é significativa para se obter resultados adequados.

Para caso com TRs foram utilizadas 200 fatias distribuídas em 10 horizontais \times 20 verticais para as meia-abas e 36 na alma (total: $2 \times 200 + 36 = 436$ fatias).

Para o caso sem TRs, podem-se eliminar vantajosamente as divisões horizontais da aba, reduzindo a quantidade de fatias para 20 na meia-aba (76 no total); com apreciável ganho em tempo de processamento. Essas distribuições foram usadas em vários testes e também nos demais exemplos deste capítulo.

A subdivisão vertical das abas é fundamental para detectar corretamente o início do escoamento e a sua propagação na aba, principalmente porque se usa um processo muito simples, de avaliação das propriedades nas fatias, no qual só é monitorado um único ponto, que é o da fibra (ver Fig. 4.1c no capítulo 4).

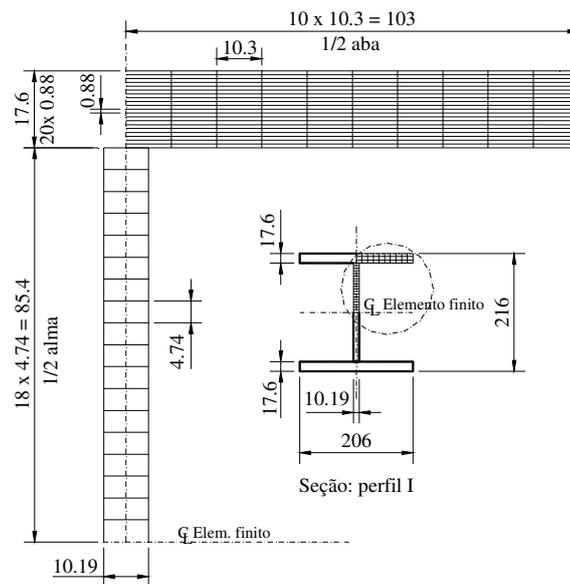


Figura 6.4 Modelagem das fatias em um quarto de seção do perfil I.

A finalidade da maior subdivisão é compensar essa deficiência, em oposição a outros métodos mais robustos que adotam menos fatias e mais pontos de monitoração, (Clarke, 1994).

As divisões horizontais das abas servem para refinar a distribuição das tensões residuais, permitindo assim uma avaliação mais precisa também nessa direção. Considerou-se o valor 10 como ideal; valores maiores (20 por exemplo) iriam gerar um total de 836 fatias, e o processamento neste caso ficaria bastante lento, sem um ganho significativo no resultado. Foi verificado que valores menores que 8 fatias não produzem resultados com a mesma qualidade.

É preciso lembrar que cada malha apresentada na Fig. 6.4 ocorre em cada nó (inicial e final do EF). Isso é, no problema com 12 EFs tem-se um total de 10464 fatias sendo avaliadas em cada iteração, de cada incremento. No caso da hipótese sem TR, esse valor se reduz para 1824 fatias (17 %), com considerável economia de tempo. Dessa forma, ao se usar 6 ou 9 EFs, a redução é de 50 % e 25 %, respectivamente, com bons resultados.

Deve ser indicado também que a fatia somente escoar quando a tensão atinge um valor maior ou igual a σ_y na fibra, que está no centro da fatia. Assim, enquanto a tensão varia do extremo da fatia até o centro, a fatia permanece elástica porque menos de 50 % plastificou, ou seja, as propriedades avaliadas são um pouco maiores que as reais.

Posteriormente, quando a fibra, e por conseqüência, toda fatia plastifica, aquela área da fatia passa a não contribuir para o elemento, ou seja, as propriedades avaliadas são um pouco menores que as reais, já que haveria uma pequena parte da fatia (< 50 %) ainda elástica, e que somente deveria escoar quando a sua tensão atingisse σ_y .

Agora, como se faz uma média de propriedades nos nós inicial e final, para se obter a rigidez do EF, a plasticidade avaliada é sempre menor que a real, procurando produzir os menores acréscimos de deslocamentos, o que acaba sendo coerente com a teoria do menor trabalho de deformação.

Dessa forma, entende-se que a fatia representa um parâmetro importante na obtenção de resultados adequados, e isso inclui não apenas os fatores de cargas últimos ou os deslocamentos, mas principalmente esforços e tensões. Se for usada uma fatia de altura ou largura excessiva, pode-se estar reduzindo ou aumentando os deslocamentos, e por conseqüência os resultados num dado passo de carga, levando então a prejuízos nos resultados finais. Supõe-se que ao diminuir esse intervalo (dimensão da fatia), se contribui para melhorar a qualidade da resposta (reduzir os desvios). Essa avaliação é uma matéria complexa, em todo caso, e que foge dos objetivos desta dissertação.

A viga bi-engastada foi modelada de acordo com as duas hipóteses:

- a. sem TRs, similar ao cálculo plástico tradicional; e
- b. com TRs, de onde são usados para comparação os resultados de Liew (1992) com ERP-R, Chan e Chui (1997) com ERP-M, e Machado (2005), com ambos os métodos.

6.2.1 Sem Tensões Residuais

Acompanhando a Fig. 6.5, podem-se comparar as trajetórias de equilíbrio obtidas com o modelo ERP, calculado utilizando-se os valores da Tab. 2.1, a de ZP sem TR, a de Chan e Chui (1997) e as de Machado (2005). Deve-se salientar que esse problema é extremamente favorável ao uso de modelos com ERP: os efeitos de segunda ordem são desprezáveis, a plasticidade é de forma localizada (concentrada nos pontos A, B e C), os valores de deflexão e deformação são pequenos, e por isso os resultados apresentados são todos muito próximos. Existe quase uma coincidência nos valores encontrados com os modelos ERP, e ZP apresenta uma mínima diferença.

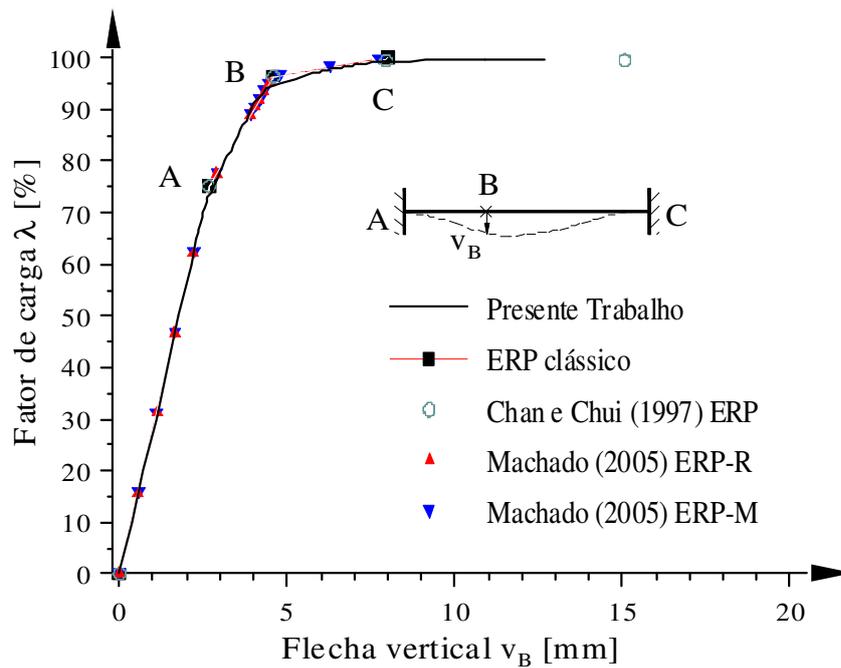


Figura 6.5 Trajetórias de equilíbrio sem tensões residuais.

Machado (2005), com a formulação ERP (Liew, 1992), indica que ocorre uma instabilidade numérica no modelo, impedindo a convergência após formar-se a 2ª RP. Já com a abordagem ERP-M, Machado (2005) obteve o colapso com o valor $8.99 M_p/L$, que coincide com o de Chan e Chui (1997).

Porém, diferentemente dos modelos numéricos ERP, ZP atinge o valor $\lambda = 100\%$ e a estrutura passa praticamente a trabalhar como um tirante. Embora não convergindo, os deslocamentos da última iteração indicam que o apoio horizontal está recebendo cargas maiores e não se detectou singularidade.

Na Tab. 6.2 pode-se acompanhar o estado das seções nos pontos A-B-C, para os fatores de carga correspondentes à formação da 1ª RP (75 %), da 2ª RP (96 %) e próximos ao colapso (99.9 % e 100 %) respectivamente; através da relação entre as propriedades das partes elásticas remanescentes (A_e, I_e), e as de referência (A_g, I_z).

Tabela 6.2 Relações das propriedades da seção elástica remanescente.

Razão [%]	$\lambda = 75 \%$			$\lambda = 96 \%$			$\lambda = 99.9 \%$			$\lambda = 100 \%$		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
A_e/A_g	19.1	–	–	7.9	14.6	–	2.3	3.4	5.6	1.7	1.7	3.4
I_e/I_z	5.5	–	–	0.4	2.5	–	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
M/M_p	96.9	68.2	51.5	99.52	98.18	–	99.95	99.91	99.69	99.98	99.96	99.91
NFP	402	–	–	422	410	–	432	430	426	433	433	430

Obs. NFP corresponde ao número de fatias plastificadas (em 436).

Nota-se que na formação da 1ª RP (em A), embora a área elástica permaneça 19.1 %, o momento já atinge 97 % de M_p . E ao se formar a 2ª RP (em B), ainda existem 7.9 % de área elástica em A e 14.6 % em B.

Por outro lado, se constata que a inércia dos nós correspondentes se reduz rapidamente até próximo de zero na medida em que a plastificação cresce.

Na Fig. 6.6 se acompanha a evolução dos momentos nos pontos A-B-C, e os pontos de fator de carga $\lambda = 75\%$ e $\lambda = 96\%$ da PC são destacados. Comprova-se que os valores obtidos com ZP são próximos dos clássicos, porém a curva é mais suave.

A Tabela 6.3 mostra uma comparação entre os resultados de formação das RPs dos modelos concentrados, e os obtidos com ZP sem TR. As ZPs começam a aparecer com $\lambda = 66.6\%$ quando escoam 20 fatias do EF 1 (em A), com $\lambda = 89\%$ escoam 20 fatias dos EFs 3 e 4 (em B), e com $\lambda = 97.5\%$ escoam 20 fatias do EF 9 (em C). E as seções somente atingem a 99 % de plastificação em fatores de carga superiores aos indicados pelos métodos ERP.

Portanto, com ZP nota-se que ocorre um início antecipado do escoamento, e que se atinge 99 % em valores superiores aos modelos concentrados, mostrando um comportamento plástico mais longo em relação ao passo ω , (menos abrupto).

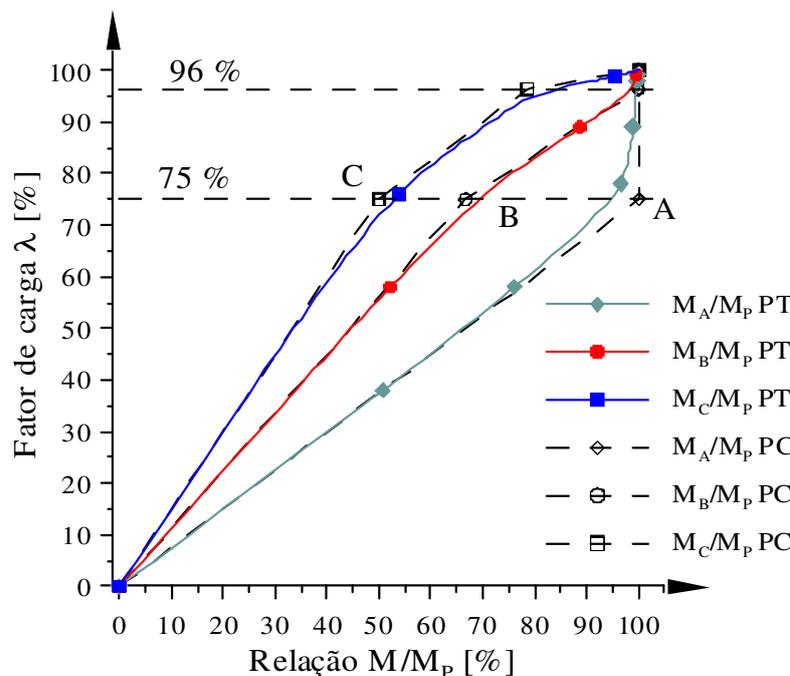


Figura 6.6 Momentos nos pontos A-B-C, sem tensões residuais.

Tabela 6.3 Valores PL/M_p de formação das rótulas plásticas (s/ TR).

PL/ M_p	PC ERP	Liew (1992)	Chan e Chui (1997)	Machado (2005)		PT	
				ERP-R	ERP-M	Início	99%
1ª RP	6.750	6.750	6.760	6.740	6.740	5.949	8.010
2ª RP	8.678	8.630	8.650	8.650	8.670	8.010	8.766
3ª RP	9.000	8.910	8.990	–	8.990	8.750	9.000

Obs. Fator de carga λ = valor da tabela dividido por 9.

6.2.2 Com Tensões Residuais

As observações da subseção anterior se mantêm, porém agora o escoamento se inicia num fator de carga menor (devido à presença das TRs), e por conseqüência os deslocamentos finais são maiores, embora o fator de carga final seja o mesmo.

Como esperado, verifica-se na Fig. 6.7 que os valores obtidos com ZP não se apresentam muito diferentes daqueles da plasticidade concentrada.

Deve-se notar que nos modelos ERP se prevê a formação da RP completa em carga inferior a real. Isso provoca um ligeiro aumento nos deslocamentos, fazendo com que essas curvas fiquem abaixo de ZP. Por outro lado, o EPR clássico não considera a degeneração da rigidez da barra e fica assim acima do resultado de ZP. Em ambos os casos (ERP-R ou ERP-M e ZP) os deslocamentos finais são bem superiores aos obtidos pelo ERP de 1ª ordem (clássico).

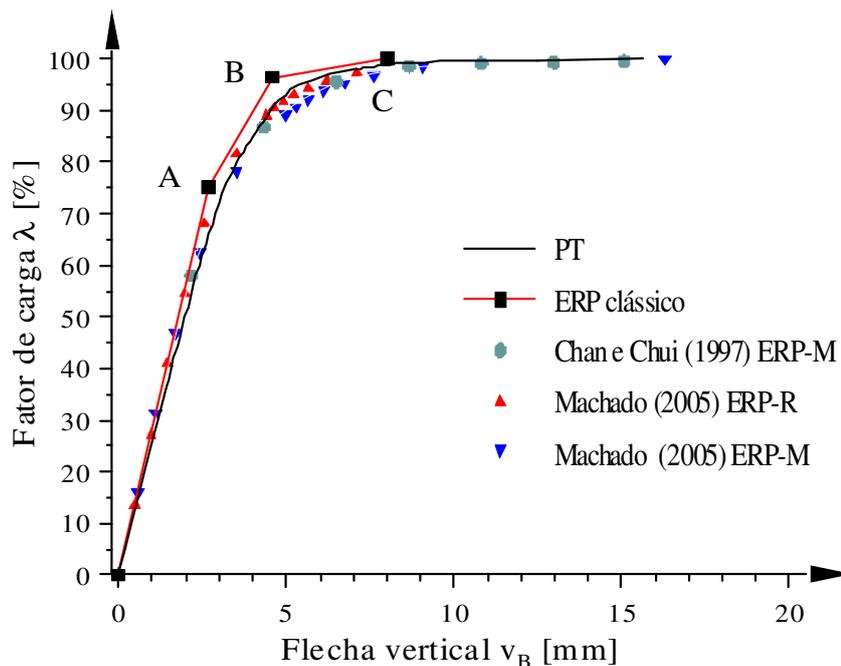


Figura 6.7 Trajetórias de equilíbrio com tensões residuais.

Pode-se concluir que do ponto de vista de flexão pura (vigas), as tensões residuais não afetam muito o comportamento da estrutura, provocando apenas um escoamento prematuro e maiores deformações (deslocamentos).

Na situação pré-colapso, o valor da flecha vertical obtida aqui foi $v_B = 2.753$ cm, o qual é quase três vezes o estimado (0.921 cm) por Chen e Sohal (1995). Conforme indica Chan e Chui (1997), os momentos são praticamente todos iguais a M_p , e aparece, como esperado, um esforço de tração no EF 1 no nó A, (com ZP o valor é de 8.41 kN).

Deve-se informar que este problema demanda uma série de iterações até se obter a convergência dos resultados. Pode ocorrer em determinados passos de carga, mesmo ao se dispor de diversos EFs, uma enorme dificuldade de convergência. Isso acontece porque um dado EF fica alternando entre duas configurações (normalmente um EF imediatamente posterior ao ponto B), sem que a carga residual do processo iterativo possa definir uma tendência na aproximação do resultado.

Essas configurações correspondem à ultrapassagem no valor da flecha vertical do ponto central da viga (nó 5 antes o mais deformado) pela flecha do ponto B (nó 4), onde a carga atua. Nesse exemplo, isso ocorreu próximo ao valor $\lambda = 97.5$; sendo ultrapassado usando o passo $d\lambda = 1\%$, de 97% para 98%. Observa-se pelos caminhos de equilíbrio nodais na Fig. 6.8, que o deslocamento do nó 4 ultrapassa o do 5, próximo desse valor.

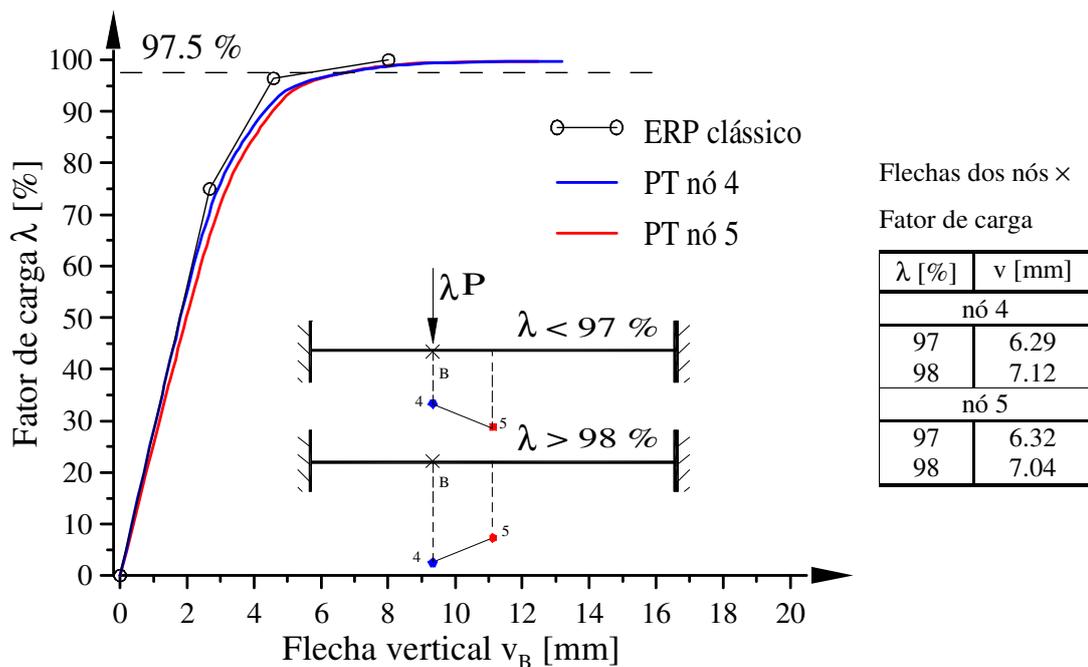


Figura 6.8 Região instável por modificação da configuração.

Se o passo de carga for tal que permite diretamente o giro do EF para a nova situação, o processo é estável e ultrapassa o ponto de dificuldade. Caso contrário, entra num processo oscilatório entre as duas configurações mostradas na Fig. 6.8, sem convergência.

Na Fig. 6.9 é mostrado que com o método da ZP se detecta que a plasticidade na estrutura evolui à medida que a rigidez das barras degenera, atingindo diversas regiões simultaneamente. Portanto, a evolução da plasticidade na viga segue a seqüência A→B→C, porém não da forma abrupta prevista pelos modelos ERP. Isso significa que os momentos saem da relação linear de forma prematura, por outro lado não atingem M_p diretamente, mas praticamente nos três pontos juntos.

Na Tab. 6.4 se comprova que nos valores $\lambda = 75\%$ e $\lambda = 96\%$, que antes correspondiam à formação da RP (caso sem TR), agora já ocorrem valores elevados de momentos tanto no ponto B, quanto no C. Mesmo assim, na formação da 3ª RP existe um mínimo de área elástica, tanto no ponto A quanto no B.

Deve-se verificar que a relação entre M/M_p não é linear para os pontos B e C, bem antes de aparecer o escoamento desses pontos, por causa principalmente da plasticidade no ponto A.

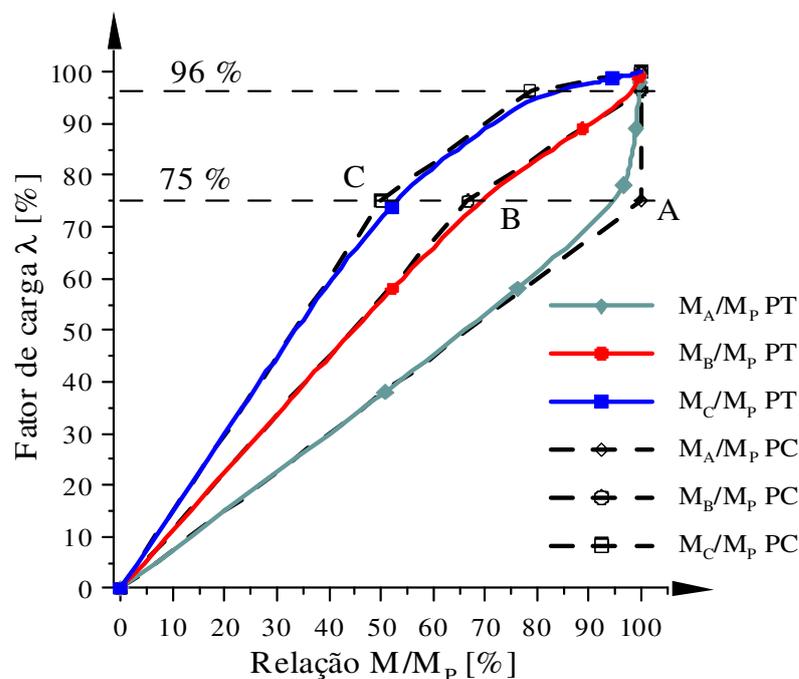


Figura 6.9 Momentos nos pontos A-B-C, com tensões residuais.

Tabela 6.4 Propriedades da seção elástica remanescente.

Razão [%]	$\lambda = 76 \%$			$\lambda = 96 \%$			$\lambda = 99.9 \%$			$\lambda = 100 \%$		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
A_c/A_g	30.4	77.9	95.2	7.3	15.6	60.3	2.3	2.8	6.2	1.7	1.7	3.4
I_c/I_z	19.5	74.1	94.0	0.4	4.1	53.9	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0
M/M_p	95.32	70.51	53.83	99.56	97.95	82.99	99.96	99.91	99.68	99.98	99.97	99.91
NFP	338	107	24	423	407	192	432	431	425	433	433	430

Na Tab. 6.5 se comprova novamente o comportamento prolongado (em relação ao passo $d\lambda$) da plasticidade na presença das tensões residuais. Com $\lambda = 36.6 \%$ ocorrem 2 fatias plastificadas (FPL) no EF 1 (nó A); com $\lambda = 56 \%$ os EFs 3 e 4 (nó B) apresentam 8 FPL; e com $\lambda = 72 \%$ o EF 9 (nó C) apresenta 8 FPL também. Portanto, a plasticidade começa a ocorrer bem antes do previsto e atinge 99 % com valores inferiores aos da plasticidade concentrada.

Surge assim um questionamento sobre os métodos ERP refinados, no sentido de que os refinamentos podem não acompanhar adequadamente o método da ZP, em todas as situações. Deve-se lembrar que esse exemplo é um caso onde se considera que ERP produz resultados similares.

Para terminar essa seção, a Fig. 6.10 mostra a distribuição da plasticidade ao longo da viga, indicando a situação dos EFs antes do colapso. Nota-se que ocorre uma distribuição ao longo dos EFs 3-4-5, bem como nos 8-9. Já no nó A, a plasticidade é mais concentrada (só em 1 EF). O parâmetro Λ é uma relação entre número de fatias plastificadas e número de fatias total.

Outro detalhe interessante é a forma de distribuição dessa plasticidade na viga, que se aproxima de uma parábola de eixo x.

O EF 2 é muito importante para ajustar a inversão do sinal da plasticidade, entre os pontos A e B, justificando para esse exemplo, porque não se podem obter bons resultados num modelo de ZP com apenas 3 EFs.

Tabela 6.5 Valores PL/M_p de formação das rótulas plásticas (c/ TR).

PL/M_p	PC ERP	Liew (1992)	Chan e Chui (1997)	Machado (2005)		PT	
				ERP-R	ERP-M	Início	99%
1ª RP	6.750	8.310	8.250	8.500	8.850	3.294	8.010
2ª RP	8.678	8.780	8.820	8.840	8.950	5.040	8.640
3ª RP	9.000	8.910	8.970	–	8.980	6.480	9.000

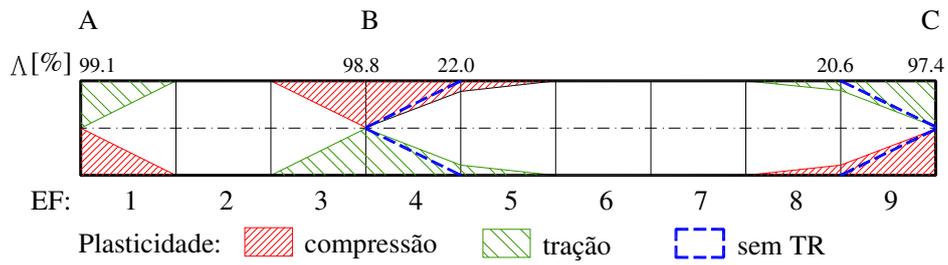


Figura 6.10 Diagrama de plasticidade Λ [%] na viga bi-engastada.

Outro aspecto que se deve salientar é que, se não houvesse as tensões residuais, o diagrama de plasticidade se reduziria a 1 EF para cada extremidade e 2 EFs no ponto B, como mostra a linha tracejada da Fig. 6.10. Assim, a plasticidade seria significativamente concentrada (no nó), como antes indicado.

6.3 CURVA DE FLAMBAGEM DO AISC LRFD (1993)

Nos exemplos a seguir (nesta seção e na 6.4) serão realizadas análises inelásticas de colunas com o perfil WF 8×31 americano, escolhido como representante dos laminados em geral nos EUA (ver Fig. 6.11a). Assim, como no exemplo anterior, se utilizou um perfil I equivalente, de mesma área, inércia e dimensões (d, b); representado na Fig. 6.11b, cuja equivalência é demonstrada pelas propriedades na Tab. 6.6.

O material é considerado elástico, perfeitamente plástico: aço ASTM A 36, com tensão de escoamento $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$, e Módulo de Young $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$. As tensões residuais, quando consideradas, são lineares na aba e constantes na alma, tem o valor máximo $\sigma_r = -0.30 \sigma_y = -7.5 \text{ kN/cm}^2$, e seguem o modelo de Galambos e Ketter (1957), como ilustrado na Fig. 6.11c.

Com a intenção de garantir resultados precisos, todas as colunas foram modeladas com uma malha de 6 EFs, usando 76 fatias para os casos sem tensões residuais e 436 para os casos com tensões residuais, como já mostrado na Fig. 6.4.

Este segundo exemplo se propõe a verificar a capacidade da metodologia numérica desenvolvida na determinação da carga de flambagem inelástica para uma coluna bi-rotulada com a altura L variável. Serão considerados os efeitos da curvatura inicial ($\delta_0 = L/1000$) e das tensões residuais.

Acompanhando a Fig. 6.12, verifica-se que as curvas serão obtidas calculando a carga de flambagem inelástica para diversos valores da altura L da coluna bi-rotulada. Essa carga N_a corresponde ao fator de carga de colapso λ multiplicado por N_y .

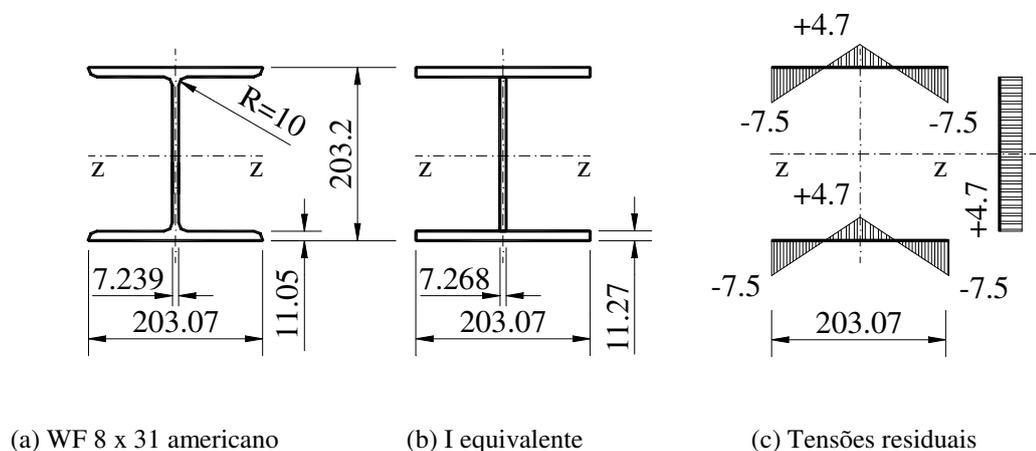


Figura 6.11 Perfil adotado para as colunas.

Tabela 6.6 Propriedades da seção WF 8x31 das colunas.

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área A_g [cm ²]	Inércia I_z [cm ⁴]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t alma a	elástico W_z [cm ³]			plástico Z_z [cm ³]	
AISC 1978	8.000 in	7.995 in	0.435 in	0.285 in	9.13 in ²	110 in ⁴	27.5 in ³	30.4 in ³
Convertido	203.20	203.07	11.049	7.239	58.903	4578.54	450.64	498.16
PT	=	=	11.270	7.268	=	4577.30	450.50	498.50

Para cada valor de L, se determina um valor do parâmetro λ_c , que define o índice de esbeltez modificado e conhecendo-se os valores das cargas de flambagem inelástica N_a e de início do escoamento N_0 , se determinam então as curvas do presente trabalho.

Além dessas curvas, são apresentadas também na Fig. 6.12: a hipérbole de Euler original e as curvas de flambagem do AISC LRFD (1993), ou seja:

- a. no regime elástico onde a hipérbole de Euler é reduzida por um coeficiente (0.877), e com seu valor máximo limitado à $N/N_y \leq 1.0$, sendo dada por:

$$N_a = \frac{0.877 N_y}{\lambda_c^2}; \tag{6.1}$$

- b. no trecho inelástico, a curva é obtida através da fórmula de parábola:

$$N_a = 0.658^{\lambda_c^2} N_y. \tag{6.2}$$

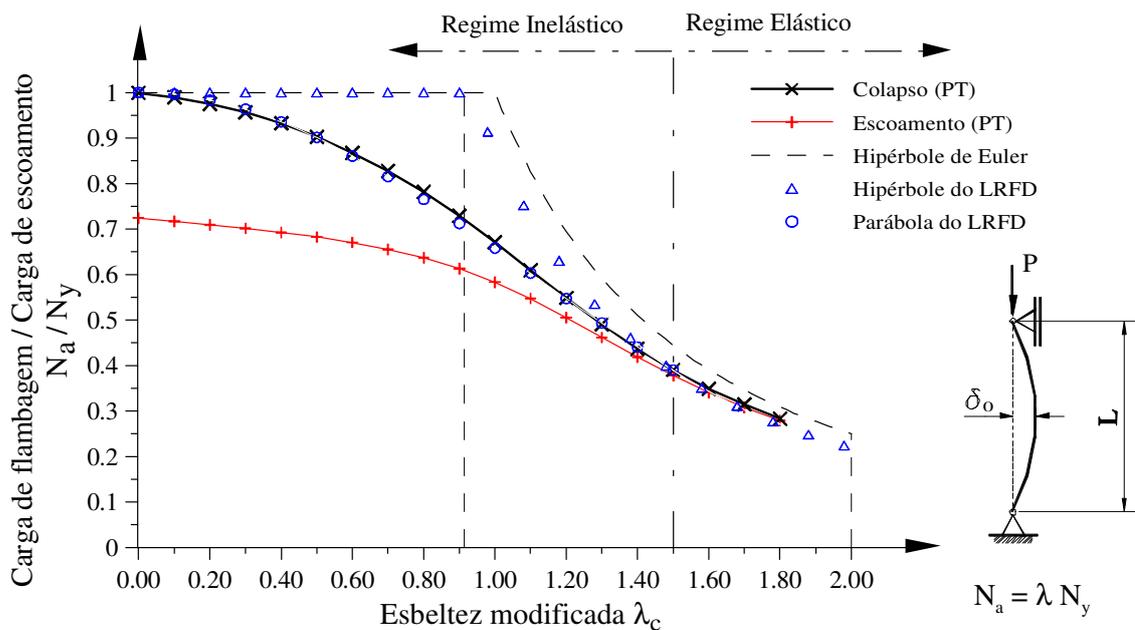


Figura 6.12 Curvas de flambagem para a coluna bi-rotulada.

Nas Eqs. 6.2 e 6.3, o parâmetro de *esbeltez modificada* λ_c possui a expressão:

$$\lambda_c = \frac{kL}{\pi r} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}, \quad (6.3)$$

na qual r é o raio de giro da seção em relação ao eixo considerado (z); e o coeficiente de flambagem $k = 1$, para a barra bi-rotulada.

Note a semelhança dos resultados obtidos neste trabalho com a curva da AISC LRFD (1993). Observe que tanto os valores obtidos no presente trabalho são bastante próximos dos valores N_a produzidos pelas fórmulas das Eq. 6.1 e 6.2, como as curvas obtidas são similares às apresentadas por Hajjar *et al.* (1997).

Na Tab. 6.7, para o intervalo de esbeltez modificada $0.01 \leq \lambda_c \leq 1.8$, são mostrados os valores dados pelas fórmulas e os obtidos pelo presente trabalho, notando-se que são também indicados os fatores de carga do início do escoamento (λ_{esc}) e o de flambagem inelástica (λ_{col} , que corresponde ao N_a/N_y). O desvio relativo é inferior em média a $\pm 2.5 \%$, sendo representado na Fig. 6.13.

É importante salientar que, mesmo no regime elástico, onde $\lambda_c \geq 1.5$, aparecem casos de colunas sofrendo uma pequena plastificação seguida de flambagem. Assim, uma flambagem elástica da coluna ocorre com uma pequena região plastificada. Isso justifica a adoção pelo AISC LRFD (1993) do redutor 0.877 nos valores da Hipérbole de Euler, o que é coerente com o trabalho de Kanchanalái (1977), usando também ZP, porém com outra formulação.

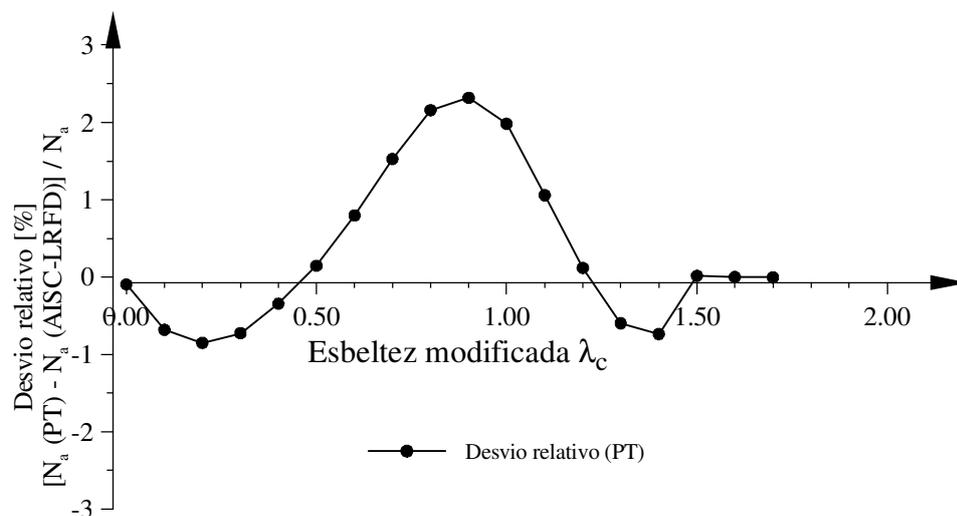


Figura 6.13 Diferenças em relação os valores do AISC-LRFD (1993).

Tabela 6.7 Cargas de flambagem para laminados.

λ_c	Altura L (cm)	AISC-LRFD (1993)		PT			
		N_a (kN)	N_a / N_y (%)	λ_y %	$\lambda_{col.}$ %	N_a (kN)	Desv. Rel.
0.01	7.83	1472.5	100.0	99.8	99.9	1471.10	-0.096
0.10	78.32	1466.4	99.58	71.8	99.0	1456.37	-0.684
0.20	156.64	1448.1	98.05	71.0	97.6	1435.76	-0.853
0.30	234.96	1418.1	96.30	70.2	95.7	1407.78	-0.728
0.40	313.28	1377.2	93.52	69.3	93.3	1372.44	-0.346
0.50	391.60	1326.3	90.07	68.3	90.3	1328.26	0.147
0.60	469.92	1266.6	86.01	67.1	86.8	1276.72	0.798
0.70	548.30	1199.5	81.46	65.6	82.8	1217.82	1.527
0.80	626.64	1126.5	76.50	63.8	78.2	1150.81	2.158
0.90	704.96	1049.2	71.25	61.4	73.0	1073.51	2.317
1.00	783.30	968.9	65.80	58.4	67.2	988.10	1.981
1.10	861.64	887.4	60.26	54.8	61.0	896.80	1.059
1.20	939.96	806.0	54.73	50.6	54.9	806.96	0.119
1.30	1018.3	725.9	49.29	46.2	49.1	721.55	-0.600
1.40	1096.6	648.3	44.02	41.9	43.8	643.51	-0.739
1.50	1175.0	574.2	38.99	37.8	39.1	574.30	0.017
1.60	1253.3	515.1	34.98	34.1	35.0	515.11	0.001
1.70	1331.6	462.4	31.40	30.8	31.5	462.39	-0.003
1.80	1410.0	416.7	28.30	27.9	28.4	416.74	0.009

Deve-se entender também que essa redução é uma justificativa para se levar em conta os aspectos importantes (CI e FP, na presença de tensões residuais).

No Brasil, é comum a crítica sobre a adoção de exemplos com perfis laminados americanos, sabendo que a maior parte dos perfis usados aqui na construção metálica é do tipo I soldado composto de chapas cortadas ao maçarico.

Para esses perfis as fórmulas anteriores não são corretas. Isso justificou a procura de uma expressão adequada. Assim, vários perfis foram analisados, entre os quais, os perfis soldados: I 315 × 120 e I 610 x 640, representados na Fig. 6.14a-b, e então se chegou a *curva 2 proposta*, com um tratamento estatístico dos resultados (Pimenta, 1996), que se aproxima também das curvas de Bjorhovde (1972) e do ECCS (1984).

Portanto, o exemplo será agora estendido a esses dois perfis, adotando-se tensões residuais por uma fórmula aproximada (ver apêndice H), cujo diagrama básico, indicado por Weston *et al.* (1991), é representado na Fig. 6.14c.

O objetivo desse complemento é avaliar a capacidade de se obter as curvas de flambagem para perfis soldados também, sendo mantidos os demais dados.

Através da Tab. 6.8 podem ser comparados os valores do presente trabalho (ZP) com os obtidos pela curva 2 de Bjorhovde (1972), com os da curva b da ECCS (1984) e também com os resultados de Pimenta (1996).

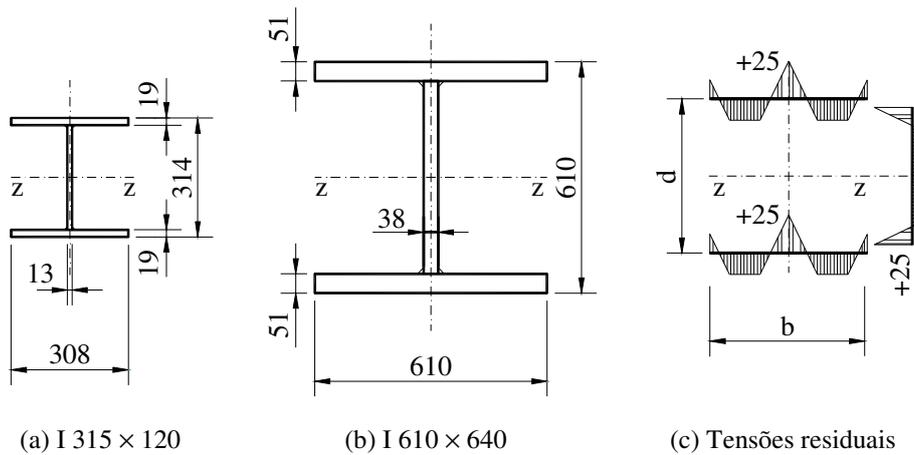


Figura 6.14 Colunas de perfis I soldados.

Notando-se, que tanto para o perfil esbelto quanto para o perfil pesado, os valores estão bem próximos das primeiras curvas, embora superem os da curva 2 proposta (média estatística) em alguns pontos, bem como apresentem diferenças em relação aos resultados obtidos pelo programa computacional Pplanep (Pimenta, 1996). Deve-se esclarecer que as TRs e os diagramas utilizados não correspondem aos utilizados por Pimenta (1996), mesmo assim pode-se considerar que os resultados estão adequados.

Note que para $\lambda_c \leq 0.2$, todas as curvas adotam o valor próximo a 1.0, reduzindo o valor obtido nos ensaios (que são superiores a 1 devido ao encruamento).

Uma vez verificado que a formulação consegue estabelecer a carga última tanto no caso limite de resistência pela formação de mecanismo (mostrado no exemplo 6.2 da viga bi-engastada) quanto no caso da flambagem inelástica da coluna bi-rotulada (nesta seção), onde aparece pivô negativo na MRG, comprovando a instabilidade; segue-se agora para uma análise avançada de uma barra sujeita a flexo-compressão.

Tabela 6.8 Fator de cargas de flambagem das colunas com I soldados.

λ_c	Bjorhovde curva 2 (1972)	ECCS curva b (1984)	Curva 2 proposta	Pimenta (1996)		PT	
				Programa Pplanep		I 315x120	I 610x640
				I 315x120	I 610x640		
0.1	1.000	1.000	1.000	0.995	1.000	0.949	0.990
0.2	0.990	1.000	1.000	0.970	0.975	0.941	0.975
0.4	0.934	0.926	0.917	0.840	0.770	0.902	0.921
0.6	0.861	0.837	0.821	0.710	0.760	0.828	0.827
0.8	0.772	0.724	0.704	0.695	0.700	0.727	0.717
1.0	0.666	0.597	0.578	0.590	0.585	0.622	0.597
1.2	0.515	0.478	0.463	0.498	0.487	0.520	0.490
1.4	0.409	0.382	0.371	0.410	0.394	0.432	0.398

Obs. As cargas de flambagem são obtidas multiplicando os fatores por N_y .

Os valores de Pplanep são em maioria inferiores aos obtidos pelo presente trabalho.

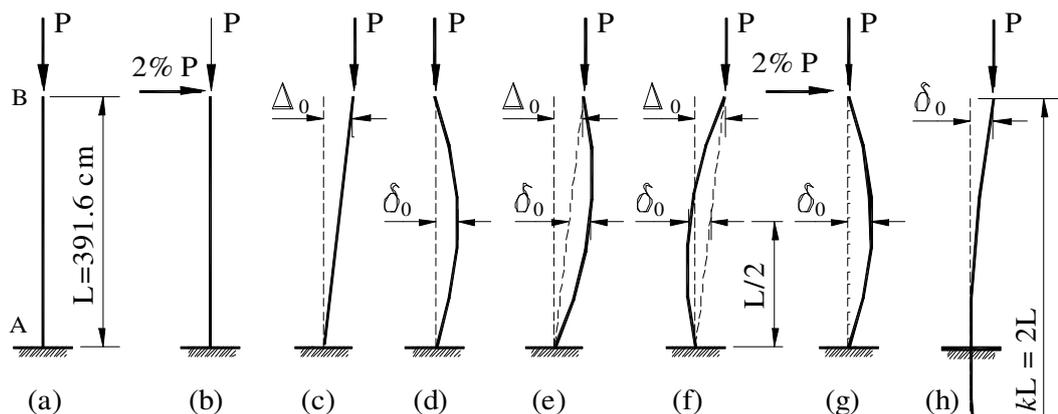
6.4 COLUNA ENGASTADA-LIVRE DE HAJJAR ET AL. (1997)

Este exemplo tem como principal objetivo mostrar a aplicação da análise avançada para o estudo da resistência e da estabilidade de uma coluna. Deseja-se determinar a carga limite de uma coluna com altura $L = 391.6$ cm, engastada na base e livre no topo, levando em conta os aspectos importantes. Os demais dados são os mesmos da seção 6.3, (indicados com o perfil WF 8x31).

As diversas situações de fora de prumo (FP) ou curvatura inicial (CI), consideradas, isoladas ou combinadas, são mostradas na Fig. 6.15, e devem ser avaliadas incluindo ou não as tensões residuais (TRs). Deve-se observar que foi colocada uma situação, a Fig. 6.15h, simulando o efeito de um coeficiente de flambagem k .

Serão vistos inicialmente os resultados de alguns tipos de análise (sem tensões residuais), com os métodos já descritos no capítulo 2. Esses resultados são ilustrados na Fig. 6.16, onde se representa a variação do deslocamento do topo da coluna u_B em relação ao fator de carga λ . Desses caminhos de equilíbrio, constata-se que:

- a. no caso da coluna sem imperfeição, poder-se-ia concluir que a carga limite aparente seria $P = N_y \dots$ O que é pouco provável, para não dizer impossível.



Dados:
 carga vertical $P = \lambda N_y$, com $0 \leq \lambda \leq 1.00$, aço com $\sigma_y = 25$ kN/cm², vão $L = 391.6$ cm,
 propriedades do perfil: $A_g = 58.9$ cm², $I_z = 4578.5$ cm⁴, $Z_z = 498.5$ cm³, $r_z = 8.816$ cm,
 escoamento completo $P_y = \sigma_y A_g = 1472.5$ kN, carga nocional $H = 0.2 \% N_y = 2.945$ kN,
 fora de prumo $\Delta_0 = L/500 = 0.783$ cm, curvatura inicial $\delta_0 = L/1000 = 0.3916$ cm.

(a) Modelo perfeito; (b) Carga nocional; (c) FP; (d) CI; (e) FP com CI negativa; (f) FP com CI positiva; (g) Carga nocional positiva com CI positiva; (h) Considerando o coeficiente de flambagem: kL .

Figura 6.15 Coluna engastada-livre de Hajjar et al.(1997).

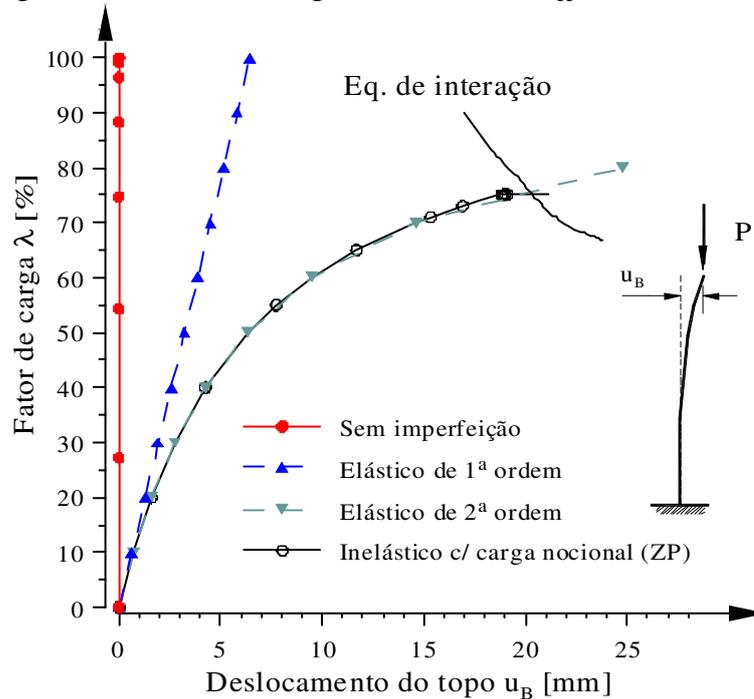
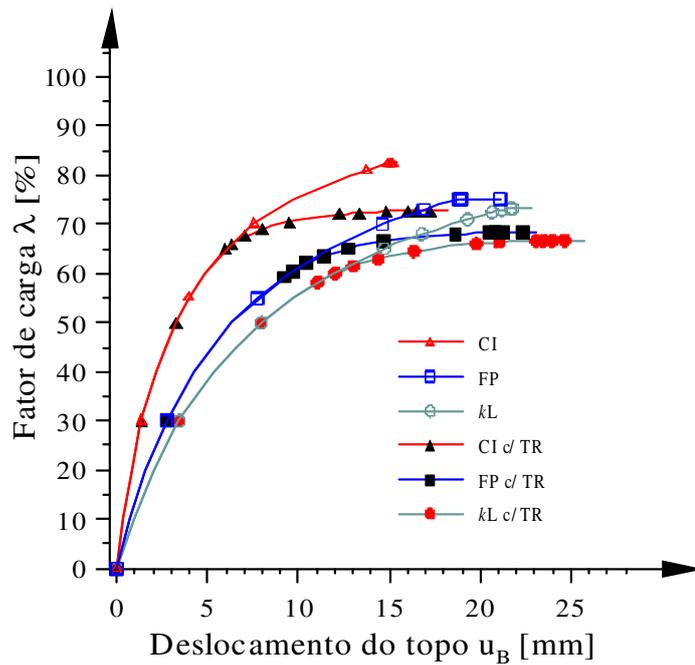


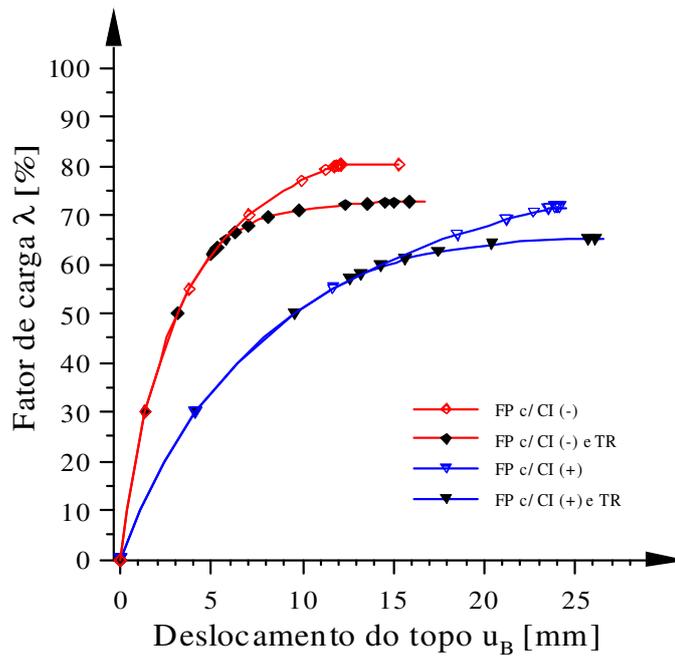
Figura 6.16 Análises simples, sem tensões residuais.

- b. a trajetória de equilíbrio da análise elástica de primeira ordem é uma semi-reta que não é uma resposta adequada, como esperado;
- c. é interessante que a trajetória obtida com a análise elástica de segunda ordem fique próxima do valor da resposta análise de ZP com fora de prumo, que por sua vez é idêntico ao caso de ZP com a carga nocional considerada. Isso pode explicar a tentativa de se corrigir os modelos elásticos com fatores de segunda ordem e o uso de cargas nocionais. Ou seja, ao se usar a superfície da equação de interação, o ponto limite da trajetória de segunda ordem seria aproximadamente determinado, e próximo daquele obtido com ZP. Todavia, as tensões residuais não foram consideradas nesses modelos.

Na Fig. 6.17 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio para as diversas situações de imperfeição das Figs. 6.15b-6.15h, com e sem tensões residuais, sendo que na Fig. 6.17a estão as curvas considerando as imperfeições geométricas isoladas e na Fig. 6.17b as curvas para as imperfeições geométricas combinadas. Dessas figuras pode-se fazer os seguintes comentários:



(a) Efeitos da curvatura inicial e do fora de prumo isolados (com ou sem TR)



(b) Efeitos da curvatura inicial e do fora de prumo combinados (com ou sem TR)

Figura 6.17 Trajetórias de equilíbrio da coluna engastada-livre.

a. *sem tensões residuais:*

a carga de colapso obtida para a coluna apenas com a CI, positiva ou negativa, (Fig. 6.15d) foi superior à obtida para o caso FP (82 % > 75 %, respectivamente). Com a combinação desses dois efeitos, para a condição ilustrada na Fig. 6.15e,

com CI negativa, esperava-se obter a situação mais crítica (menor carga de colapso), mas essa carga ficou próxima da situação da coluna apenas com a CI (80 %). Entretanto, a pior combinação é o caso da coluna com FP e a CI positiva (Fig. 6.15f), com a menor carga última obtida em torno de 71 %. O caso da Fig. 6.15b é semelhante ao da Fig. 6.15c, porque se adotou uma carga nocional (0.2 % P) que provoca um deslocamento no topo igual ao fora de prumo ($H/500$). O mesmo acontece para as colunas mostradas nas Fig.s 6.15e e 6.15g. É interessante notar que ao se adotar para a coluna um coeficiente de flambagem kL (Fig. 6.15h), chega-se numa carga última (72 %) muito próxima do valor mais crítico (71 %);

b. *com tensões residuais:*

até o início do escoamento, que ocorre de forma prematura, as trajetórias obtidas são basicamente as mesmas dos casos anteriores. A partir daí, as curvas se tornam bastante horizontais, configurando a situação de mínimo acréscimo de carga, grande deslocamento, que é característico do fenômeno de flambagem. Isso é comprovado porque o colapso ocorre com a instabilidade da coluna ao aparecer um pivô negativo, sem que haja formação de mecanismo (o que seria limite de resistência). Em geral, os valores das cargas últimas obtidas com tensões residuais são menores (em torno de 90 % dos valores dos anteriores), e com deslocamentos um pouco maiores.

Na Tabela 6.9 são apresentados os valores produzidos neste trabalho, segundo a concepção de limites inferior e superior, ou seja: $\lambda_{\text{inf}} \leq \lambda_{\text{col}} \leq \lambda_{\text{sup}}$, já descritos em 6.1. Nessa tabela estão também, para fins de comparação, os valores fornecidos por Hajjar *et al.* (1997), que utilizaram outra formulação do método da zona plástica.

Verifica-se que os resultados apresentam uma excelente concordância. No caso de efeitos isolados FP (Fig. 6.15c), sem TRs, com apenas 4 EFs consegue-se chegar ao valor de $\lambda_{\text{col}} = 0.75$ que coincide com o valor de Hajjar *et al.* (1997). Os resultados mostrados na tabela foram obtidos usando um modelo com 6 EFs, por uniformidade.

O caso mais crítico, o da *coluna com fora de prumo, curvatura inicial positiva e tensões residuais*, define o fator de carga limite a ser adotado, $\lambda_{\text{lim}} = 0.650$.

Tabela 6.9 Fator de carga limite λ_{lim} da coluna engastada-livre.

Caso	Consideração da análise avançada	Hajjar <i>et al.</i> (1997)		PT			
		sem TR	com TR	sem TR		Com TR	
				inferior	superior	inferior	superior
a	Sem imperfeição	1.000	–	0.7361*	0.7362*	0.5972*	0.5973*
b,c	FP (ou CN)	0.750	0.681	0.7512	0.7513	0.6839	0.6840
d	CI (+ ou –)	0.823	0.727	0.8239	0.8240	0.7279	0.7280
e	FP c/ CI (-)	0.801	0.723	0.8019	0.8020	0.7258	0.7259
f	FP c/ CI (+)	0.712	0.650	0.7148	0.7149	0.6516	<u>0.6517</u>
g	CN c/ CI (+)	–	0.650	0.7148	0.7149	0.6513	<u>0.6514</u>
h	CI p/ kL = 2L	0.723	0.666	0.7324	0.7325	0.6669	0.6670

É importante indicar que esse valor corresponde ao coeficiente 0.658 utilizado na Eq. 6.2, fórmula do AISC-LRFD (1993), trecho inelástico, quando o parâmetro esbeltez modificada é $\lambda_c = 1.0$, o que ocorre neste exemplo, onde se deve fazer $k = 2$ na Eq. 6.3.

Como os demais perfis laminados americanos, de maneira geral, possuem um fator de forma (relação entre o módulo plástico e o elástico: Z_z / W_z) superior ao do perfil WF 8×31 (média: $1.14 > 1.10$, Higgins *et al.*, 1971) a média estatística cresce um pouco, levando ao valor 0.658 que foi adotado (Hajjar *et al.*, 1997).

Por outro lado, como explica Chen e White (1993), esse valor provém também da solução da equação seguinte:

$$\frac{N_a}{N_y} = \frac{0.877}{\lambda_c^2} \left[-2.7273 \frac{N_a}{N_y} \ln \frac{N_a}{N_y} \right], \quad (6.4)$$

o que após algum algebrismo, resulta em:

$$\frac{N_a}{N_y} = e^{\lambda_c^2 / (-2.7273 * 0.877)} = 0.658 \lambda_c^2, \quad (6.5)$$

que é a mesma fórmula do AISC LRFD (1993) já vista na Eq. 6.2.

Vale destacar que o caso (a) sem imperfeição* foi analisado empregando uma carga maior $P_{NY} = 2000$ kN, de forma a averiguar se seria encontrada a carga de escoamento completo à compressão: $N_y = 1472.57$ kN. Foram obtidos os valores λ_{col} P_{NY} (em kN):

a. sem tensões residuais: $1472.2 \leq N_{col} \leq 1472.4$ (99.9 %); e

b. com tensões residuais: $1194.4 \leq N_{col} \leq 1194.6$ (81.1 %).

Tendo sido comprovado os bons resultados na análise do comportamento de uma barra simples, será realizado agora um estudo mais geral, empregando esse mesmo modelo com variações dos chamados aspectos importantes, a saber:

- a. efeito da malha;
- b. efeito da curvatura inicial;
- c. efeito do fora de prumo; e
- d. efeito das tensões residuais.

6.4.1 Efeito da Malha

Um questionamento que surge naturalmente em qualquer modelagem numérica refere-se à adoção de uma dada malha de EFs. No caso da ZP, onde as fatias aparecem como subelementos, a questão se agrava na medida em que existe de um lado o desejo de se produzir resultados coerentes e do outro lado os limites de tamanho físico de armazenagem das informações (memória virtual ou não), e em consequência o crescimento do tempo de processamento.

Com relação à quantidade de EFs adotado, o primeiro exemplo mostrou a necessidade de se usar uma quantidade superior a 3. O emprego de 6 ou 9 EFs proporcionou bons resultados. Colocar 12 EFs mostrou-se desnecessário ou excessivo.

Nos exemplos seguintes verificou-se que o uso de 6 EFs para as colunas proporcionou bons resultados.

Entretanto, isso é um pouco conflitante com os trabalhos de outros pesquisadores (El-Zanaty *et al.*, 1980; Vogel, 1985; Ziemian *et al.*, 1992; e Clarke, 1994) que em seus modelos utilizaram desde 20 a 50 EFs com ZP, ou bem: 3 a 8 vezes mais. Embora alguns indiquem que poderiam ter utilizado menos. Teh e Clarke (1999) quebraram essa tradição apresentando exemplos com um número de EFs bem menor (4 por coluna). Não resta dúvida que procedendo assim, há uma tendência a avaliar a plasticidade de forma mais confinada, o que só interfere nos resultados quando não se consideram as TRs.

Esses pesquisadores adotaram malhas grossas em se tratando das fatias, usando mais pontos de monitoramento (fibras) por fatia. Isso leva a se fazer um questionamento sobre os resultados obtidos no presente trabalho, com relação ao número das fatias.

a. *Número de fatias nas meias-abas*

O modelo da Fig. 6.15e, com TR, foi testado modificando-se o número de fatias da meia-aba, segundo 5 esquemas: (i) 10×10 ; (ii) 15×10 ; (iii) 15×15 ; (iv) 20×10 ; e (v) 20×20 . Os resultados são mostrados na Tab. 6.10.

Note que não houve variação na carga última, como esperado, porque próximo da flambagem, uma das abas estava totalmente plastificada, e o que determinou o valor final foi a subdivisão da alma. De maneira geral todos os resultados ficaram muito próximos.

A maior diferença ocorreu ao detectar o início do escoamento e no trecho da trajetória (deslocamento) final. Nesse caso, os modelos (iii) e (iv) ficaram muito próximos dos valores da malha mais fina (v).

A adoção do modelo (iv) com 20×10 fatias justificou-se por causa da média de resultados, do tamanho (total de 200 fatias) e da facilidade de subdivisão. Já o modelo (v) com 20×20 fatias, embora mais preciso, exigiu o dobro de memória e um tempo de processamento foi quase o dobro também. O modelo (iii) com 15×15 fatias apresentou alguns bons resultados, com apenas 10 % de fatias a mais em relação ao adotado. Esse modelo poderia ter sido escolhido também, embora houvesse um gasto de tempo superior (em torno de 20 %).

Essa malha para as abas (iv) com 20×10 fatias, foi adotada para todos os problemas posteriores que incluíram tensões residuais.

Tabela 6.10 Avaliação do número de fatias em meia-aba.

Parâmetro	(i) 10×10	(ii) 15×10	(iii) 15×15	(iv) 20×10	(v) 20×20
Escoamento λ_y	62.0 < 62.1	62.0 < 62.1	61.3 < 61.4	62.0 < 62.1	61.0 < 61.1
Colapso λ_{col}	72.52 < 72.53	72.52 < 72.53	72.51 < 72.52	72.53 < 72.54	72.51 < 72.52
Desloc. u_B [cm]	1.549208	1.548646	1.539550	1.548469	1.547731
Desloc. u_B [cm]	-0.362061	-0.362117	-0.361978	-0.362059	-0.362055
Rotação θ_z [°]	-0.326432	-0.326309	-0.324300	-0.326271	-0.326095
N máx. [kN]	1067.97	1067.97	1067.82	1067.96	1067.82
M máx. [kNcm]	2491.05	2490.45	2480.40	2490.26	2489.13
Fatias qtde. total	100	150	225	200	400
Fatias qtde. plast.	68	102	150	136	268
Relação Λ %	68.0	68.0	66.7	68.0	66.8

Observações (sobre a Tab. 6.10):

- relação Λ : é o número de fatias plastificadas em relação ao número total,
- os fatores λ_{col} e λ_y são apresentados sobre a forma de limites, já visto em 6.1.

b. *Número de fatias na alma*

Enquanto a subdivisão na aba determina com mais exatidão o início do escoamento, a subdivisão na alma define a precisão da carga limite, já que é na alma normalmente onde ocorre(m) a(s) última(s) fatia(s) plastificada(s). Portanto, essa subdivisão na alma torna-se importante. Foi usado o mesmo problema da Fig. 6.15e, com 20 fatias na aba, sem TRs (aqui não faz diferença sua inclusão), sendo analisados 3 malhas de alma: (i) 12 fatias; (ii) 18 fatias; e (iii) 36 fatias.

A Tab. 6.11 mostra que as 3 malhas atingem aos mesmos deslocamentos na situação do incremento pré-colapso, porém o caso (iii) com 36 fatias fornece o maior fator de carga, apesar da pequena diferença em relação aos demais.

No caso (i) com 12 fatias, (cada uma com 15 mm) a plastificação de uma fatia no último passo, reduz a rigidez e provoca um deslocamento maior que causa o colapso. Já no caso (ii) com 18 fatias, (cada uma com 10 mm) uma fatia não plastifica, ocasiona o acréscimo de esforços no passo seguinte, e ocorre o colapso.

Pode-se supor que um número maior de fatias da alma (exemplo: 50), possa melhorar ainda mais o resultado. Porém, no adotado tem-se 36 fatias de 5mm.

Como já citado, a malha das fatias de outros pesquisadores é bem mais grossa. Folley (2001) fornece bons resultados usando uma malha de 66 fatias, sendo 3 x 9 fatias em cada aba (completa) e apenas 12 fatias na alma. Comparando-se então com a malha de Folley, a adotada no PT é 3 vezes mais fina na alma e $(2 \times 200 / 27 =)$ 14.8 vezes na aba, o que se supõe ser uma boa precisão.

Tabela 6. 11 Avaliação do número de fatias na alma.

Parâmetro	(i) 12 fatias	(ii) 18 fatias	(iii) 36 fatias
Colapso λ_{col}	0.8012 < 0.8013	0.8013 < 0.8014	0.8015 < 0.8015
Desloc. u_B [cm]	1.220808	1.218747	1.220155
Desloc. v_B [cm]	-0.396170	-0.396209	-0.396266
Rotação θ_B [°]	-0.257477	-0.257027	-0.257320
Desloc. u_B último [cm]	4.366467	1.507208	1.579084
N máx. [kN]	1179.90	1180.05	1180.19
M máx. [kNcm]	2364.63	2362.49	2364.45
Fatias qtde. total	52	58	76
Fatias qtde. plastificada	27	24	29
Relação Λ %	51.92	41.38	38.16
N último [kN]	1133.47	1187.04	1186.08
M último [kNcm]	3780.04	2464.24	2494.84

6.4.2 Curvatura Inicial (CI)

Ao se analisar a coluna da seção 6.3 foi considerado uma CI de $\delta_0 = L/1000$, como recomendado pelas normas, (obtendo-se λ_{δ_0}). Porém, agora se deseja conhecer o que ocorre para diferentes valores de δ_0 , sem TR, considerando a Fig. 6.15d (CI isolada).

Na Fig. 6.18 pode-se visualizar o comportamento da coluna, para diversos valores de δ_0 (CI). Note que à medida que δ_0 cresce, também crescem os deslocamentos e o fator de carga se reduz, como esperado.

Os valores dessa redução são mostrados na Tab. 6.12, onde a carga axial N_a representa o valor máximo (sem TR) que essa coluna pode absorver e u_B é o deslocamento correspondente no topo, imediatamente antes do colapso.

É interessante notar alguns detalhes:

- a CI média estatística ($L/1500$) representa um acréscimo de 3.6 % na carga última que poderia ser utilizada (um benefício);
- uma CI de $L/500$ reduz a carga a 93 % aproximadamente, mas representa uma flecha inicial no meio da peça de 7.8 mm, o que é visível. Logo, seria uma peça a ser reprovada pelo controle de qualidade da fábrica ou pelo pessoal de inspeção para embarque/recebimento ou montagem; e

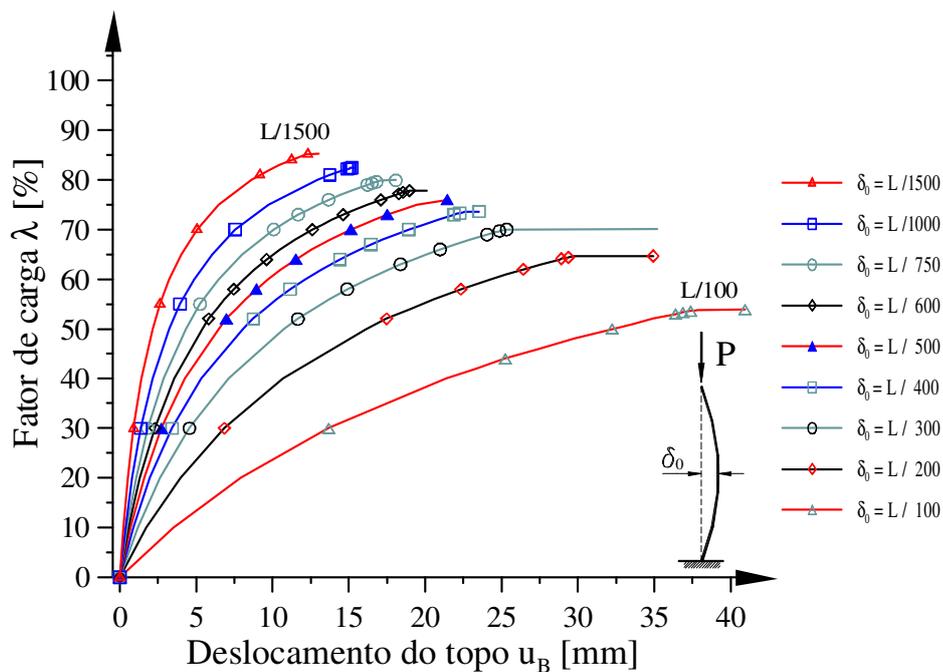


Figura 6.18 Efeito da curvatura inicial isolada.

Tabela 6.12 Efeito da CI isolada.

CI	Fator de colapso λ_{col}	Axial N_a [kN]	Desloc. u_B [cm]	Relação $\lambda_{col}/\lambda_{\delta_0}$
L / 1500	85.3 < 85.4	1256.1	1.244	103.5
L / 1000	82.3 < 82.4	1213.3	1.527	100.0
L / 750	79.9 < 80.0	1176.6	1.719	97.0
L / 600	77.9 < 78.0	1147.1	1.937	94.5
L / 500	76.0 < 76.1	1121.6	2.143	92.4
L / 400	73.6 < 73.7	1083.8	2.287	89.3
L / 300	70.1 < 70.2	1032.3	2.556	85.1
L / 200	64.7 < 64.8	952.7	3.005	78.5
L / 100	53.9 < 54.0	792.7	3.815	65.3

- c. para uma CI de L/100 flecha inicial é de quase 4 cm, o deslocamento final é 3 vezes o deslocamento de L/1500, embora a carga última seja 63 % (não reduziu a metade). Essa imperfeição representa algo inconcebível, usada somente mediante a imposição de alguma arquitetura extravagante!

Outra questão que surge ao se analisar a CI é a forma considerada da imperfeição. Os pesquisadores e normas em geral utilizam a forma senoidal, mas Batterman e Johnston (1967) indicam que as capacidades das colunas ficam levemente subestimadas ao se usar a curvatura senoidal. Por essa razão também, Lavall (1996) adotou a forma parabólica em seus exemplos.

Nesta dissertação, verificou-se que com a CI na forma de arco de círculo, ao se empregar poucos EFs na modelagem, os resultados obtidos ficaram melhores (mais precisos) que os senoidais, para os mesmos EFs. Para avaliar essa diferença nas imperfeições das colunas, são indicadas as flechas iniciais (CI) encontradas usando o parâmetro $\delta_0 = L/1000$ da norma, para uma barra de 6m, com 5 estações, (1 a cada 50 cm) mostradas na Tab. 6.13.

De forma a comprovar os resultados, foram reproduzidos os exemplos descritos na Fig. 6.15d-f,h, sem TR, cujos valores obtidos dos fatores de carga de colapso são apresentados na Tab. 6.14, justificando o uso de arco de círculo no presente trabalho.

Tabela 6.13 Flechas iniciais para CI de uma barra de 6 m.

Forma da curva	Estação x/L				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Meia-onda senoidal δ_{0S} [mm]	1.85	3.53	4.85	5.71	6.00
Arco de círculo δ_{0C} [mm]	2.16	3.84	5.04	5.76	6.00
Relação δ_{0S}/δ_{0C} [%]	85.6	91.9	96.2	99.1	100

Observação (sobre a Tab. 6.13): a. para o círculo considerar raio $R \cong 750$ m.

Tabela 6. 14 Fator de carga de colapso λ_{col} [%] para avaliar a forma da CI.

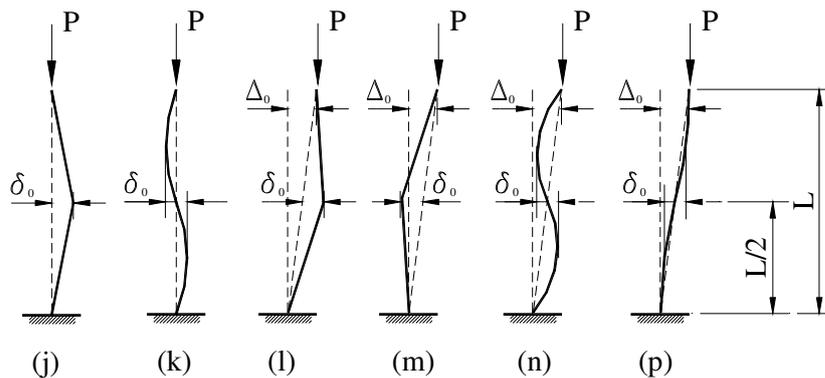
Consideração	Hajjar <i>et al.</i> (1997)	Arco em meia-onda senoidal (PT)			Arco de círculo (PT) 6 EF
		6 EF	12 EF	24 EF	
d CI	82.3	82.68	82.43	82.37	82.35
e FP c/ CI –	80.1	79.90	79.99	80.11	80.15
f FP c/ CI +	71.2 (?)	71.61	71.45	71.41	71.45
h CI kL	73.2	73.50	73.34	73.30	73.25

Observações (sobre a Tab. 6.14):

- a. os valores de arco de círculo (com 6 EFs) se aproximam dos resultados obtidos com a forma senoidal de 24 EFs, e concordam com os valores “exatos” (Hajjar *et al.*, 1997),
- b. (?) supõe-se que possa haver um erro de impressão no livro (Hajjar *et al.*, 1997).

Outra questão em relação à forma da CI se prende à própria essência da curvatura, ou seja, por que razão a imperfeição inicial teria de ser uma curva simples. Assim, agora serão analisados dois casos de coluna, relativos à Fig. 6.15d, com e sem TR, $\delta_0 = L/1000$ da norma, considerando tanto a CI simples, na situação linear e na forma em S, como também a combinação com FP da Fig. 6.15e-f, mostrados na Fig. 6.19.

Os valores dos fatores de colapso λ_{col} correspondentes são mostrados na Tab. 6.15. Tendo em vista os resultados da Tab. 6.15 e da Tab. 6.9, conclui-se que a CI arco senoidal (ou de círculo) é o mais crítico (define a carga limite: 0.712 sem TR e 0.651 com TR). Interessante observar que a situação FP – CI linear com TR chega-se no valor 0.658 já conhecido.



(j) CI linear; (k) CI em S; (l) FP– CI linear; (m) FP+ CI linear; (n) FP– CI em S; (p) FP+ CI em S;
 Figura 6. 19 Coluna engastada-livre com outras CI

Tabela 6. 15 Carga de colapso λ_{col} [%] para coluna engastada-livre com outras CI.

Condição Fig. 6.19	CI linear (j)	FP– CI linear (l)	FP+CI linear (m)	CI em S (k)	FP – CI em S (n)	FP + CI em S (p)
sem TR	84.3 < 84.4	78.7 < 78.8	72.2 < 72.3	90.9 < 91.0	74.1 < 74.2	75.9 < 76.0
com TR	73.9 < 74.0	71.4 < 71.5	65.8 < 65.9	77.6 < 77.7	67.3 < 67.4	69.3 < 69.4

6.4.3 Fora de Prumo (FP)

De igual forma, o FP da coluna analisada foi de $\Delta_0 = L/500$, (obtendo-se λ_{Δ_0}), como recomendado pelas normas. Porém, deseja-se agora conhecer o que ocorre com a coluna para diferentes valores de Δ_0 , sem TR, considerando a Fig. 6.15c.

Na Fig. 6.20 podem-se visualizar algumas trajetórias de equilíbrio da coluna considerando o efeito do FP. Os valores do fator de colapso λ_{col} para os valores de FP considerados são mostrados na Tab. 6.13. Mais uma vez, note que as diferenças encontradas são similares as de CI, com uma diferença de 1 a 2 % para o primeiro.

Também se observa que:

- os valores de δ_0 e Δ_0 superiores a $L/400$ correspondem às condições inadequadas de uso, na qual a estrutura deverá ser necessariamente recuperada;
- caso fosse possível garantir um valor de FP em torno de $L/1000$, poder-se-ia utilizar uma capacidade de quase 9 % a mais;
- onde a norma prevê uma tolerância de FP com o valor $L/600$, é deixado 2.5 % de capacidade para cobrir outros efeitos de montagem, como por exemplo, excentricidades ou folga no aperto dos parafusos;

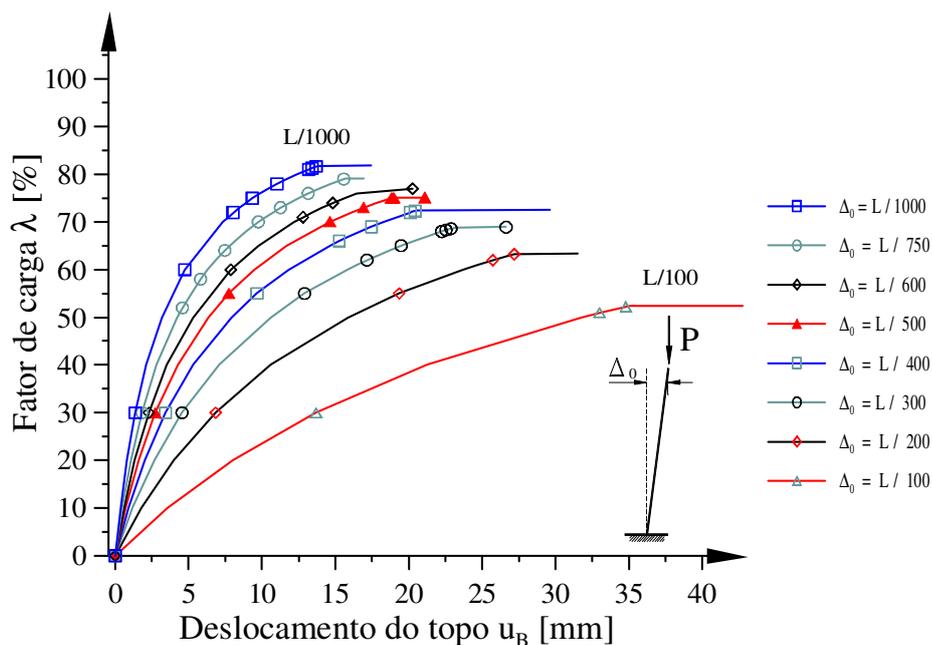


Figura 6.20 Efeito do fora de prumo isolado.

Tabela 6. 16 Fator de carga de colapso λ_{col} [%] para o efeito do FP isolado.

FP	Fator de colapso λ_{col}	Axial N_a [kN]	Desloc. u_B [cm]	Relação $\lambda_{col}/\lambda_{\Delta_0}$
L / 1000	81.8 < 81.9	1204.6	1.400	108.9
L / 750	79.2 < 79.3	1166.3	1.585	105.5
L / 600	77.0 < 77.1	1133.9	1.748	102.5
L / 500	75.0 < 75.1	1106.3	1.910	100.0
L / 400	72.5 < 72.6	1067.6	2.076	96.5
L / 300	68.9 < 69.0	1014.6	2.333	91.7
L / 200	63.3 < 63.4	932.1	2.739	84.3
L / 100	52.4 < 52.5	771.6	3.577	69.7

- d. de igual forma, valores de $\Delta_0 \geq L / 400$ mostram-se extremamente perigosos, o que ressalta o cuidado com que deve ser acompanhada a montagem das estruturas nas obras.

Acompanhando a Fig. 6.21, pode-se verificar que a influência de Δ_0/L e δ_0/L no fator de carga λ é bastante parecida, praticamente com a mesma variação.

Avaliando somente o efeito sobre a carga última, é possível entender porque alguns pesquisadores, bem como algumas normas, procuram aproximar o efeito da CI como um efeito exagerado de FP, englobados pelo uso de cargas nocionais equivalentes, como visto na seção 2.7.1.

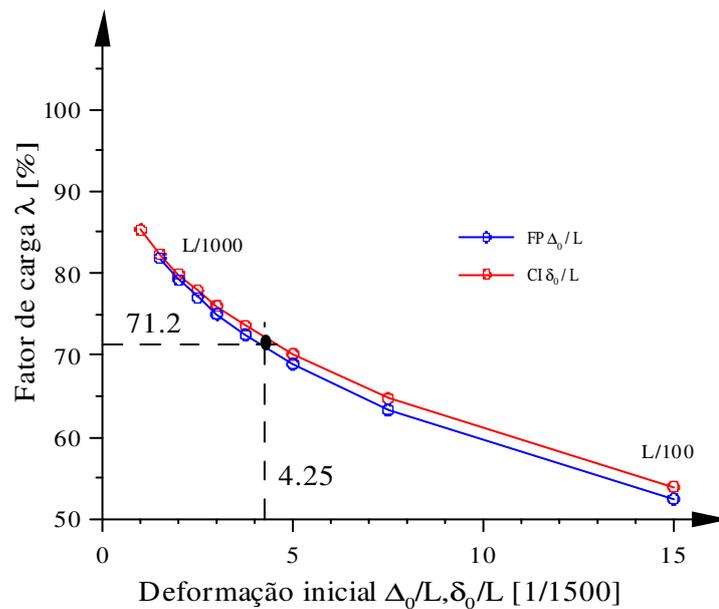


Figura 6. 21 Efeitos do FP e CI sobre a coluna engastada-livre.

Por exemplo, se for considerado o caso da coluna da Fig. 6.15f, FP e CI (+), sem TR chega-se no valor Tab. 6.9(f) $\lambda_{col} = 0.712$, o que corresponde a um FP aproximado (supondo uma interpolação linear) de $\Delta_0 = 4.25 L/1500 \cong L/350$, como mostra a Fig. 6.21. Usando então esse valor na análise, se encontra: $70.9 < \lambda_{col} < 71.0$, confirmando o exposto.

6.4.4 Tensões Residuais (TR)

As tensões residuais representam um dos fatores envolvidos na análise avançada cuja lacuna de informações para os engenheiros é maior. Assim, pretende-se aqui apresentar algumas considerações complementares de forma a poder se formar uma compreensão maior sobre esse efeito.

Primeiramente, será avaliado o que ocorre no modelo com CI ($\delta_0 = L/1000$) e com FP ($\Delta_0 = L/500$), combinados como na Fig. 6.15f, mantendo-se o mesmo diagrama de tensões de Galambos e Ketter (1957), porém variando a relação η entre a tensão residual máxima σ_r e a tensão de escoamento σ_y , com $0 \leq \eta = \sigma_r / \sigma_y \leq 1$.

As trajetórias de equilíbrio correspondentes são mostradas na Fig. 6.22. Com o aumento da relação η as cargas de colapso reduzem e os deslocamentos u_B crescem.

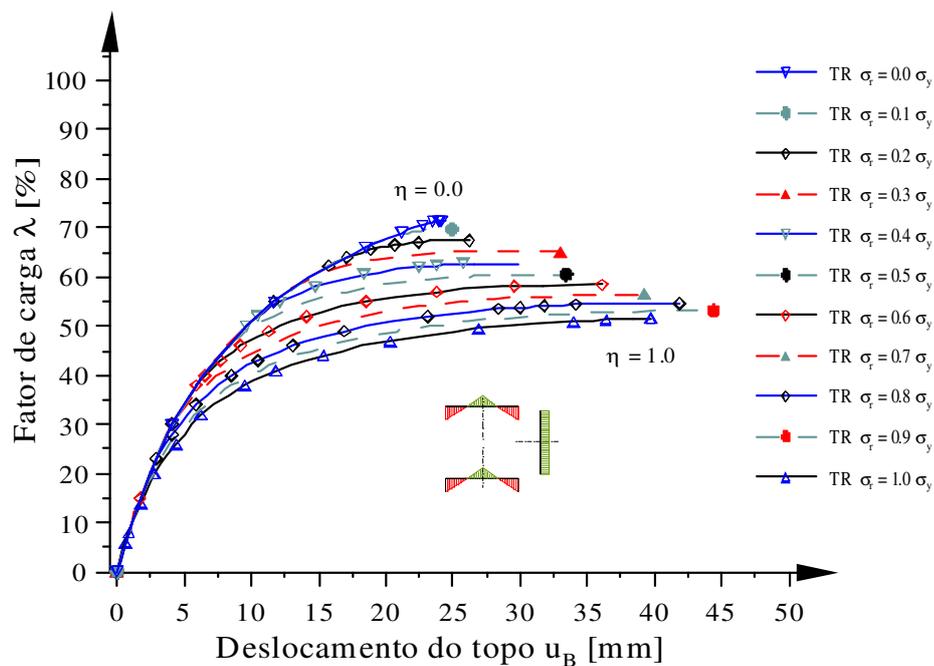


Figura 6.22 Efeito das tensões residuais de Galambos e Ketter (1957).

Com o crescimento de η , as curvas emergem da trajetória de $\eta=0$, de forma cada vez mais prematura, devido ao início do escoamento.

Observando a Tab. 6.17, nota-se que o fator de carga referente ao início do escoamento λ_y é reduzido de 71 % para 7 %, entretanto o fator de colapso λ_{col} varia de 71.4 % para 51.8 %. Significa então que o escoamento é seguido imediatamente de colapso para baixos valores de η , e ao contrário, existe uma longa trajetória plástica para altos valores de η (próximos de 1). Isso leva os deslocamentos praticamente dobrar de valor entre os dois extremos. De toda forma, esse modelo de tensões residuais não é empregado normalmente com valores de $\eta > 0.5$.

Conforme se verifica na Fig. 6.23, embora o regime seja inelástico, a variação do fator de carga de colapso por flambagem λ_{col} versus fator η (σ_r / σ_y), para esse exemplo, é quase linear, como mostra a Tab. 6.18. Isso ocorre porque a tensão na alma é constante, no modelo de Galambos e Ketter (1957), e a variação de tensões linear na aba não provoca tanta mudança de comportamento assim.

Uma questão surge dessa observação, diz respeito ao comportamento dessa coluna, nas mesmas circunstâncias, porém usando outros modelos de TRs. Como já visto, existem diagramas lineares e parabólicos adotados para simular as tensões residuais dos perfis laminados. Para se avaliar então o comportamento dessa coluna, segundo diferentes variações de tensões residuais, é escolhido o modelo da Fig. 6.15e, sendo os resultados obtidos são apresentados na Tab. 6.19.

Tabela 6.17 Fator de carga de escoamento e de colapso versus tensão σ_r .

TR $\eta = \sigma_r / \sigma_y$	Fator de carga de escoamento λ_y	N_0 início escoamento [kN]	Fator de carga de colapso λ_{col}	N_a Carga de flambagem [kN]	Desloc. u_B [cm]	Relação $N_a / N_{0.3}$
0.0	71.0 < 71.1	1047.0	71.4 < 71.5	1052.6	2.423	109.7
0.1	66.9 < 67.0	986.6	69.7 < 69.8	1026.3	2.404	107.1
0.2	62.2 < 62.3	917.4	67.4 < 67.5	992.5	2.408	103.6
0.3	56.9 < 57.0	837.9	65.1 < 65.2	959.5	2.681	100.0
0.4	51.0 < 51.1	752.5	62.8 < 62.9	923.3	2.664	96.5
0.5	44.6 < 44.7	658.2	60.5 < 60.6	890.9	2.969	93.0
0.6	37.8 < 37.9	558.1	58.4 < 58.5	859.8	3.356	89.8
0.7	30.6 < 30.7	452.0	56.4 < 56.5	830.5	3.633	86.7
0.8	23.0 < 23.1	340.1	54.7 < 54.8	805.5	3.913	84.1
0.9	15.2 < 15.3	225.3	53.1 < 53.2	782.0	4.021	81.6
1.0	7.2 < 7.3	107.5	51.8 < 51.9	762.8	4.269	79.6

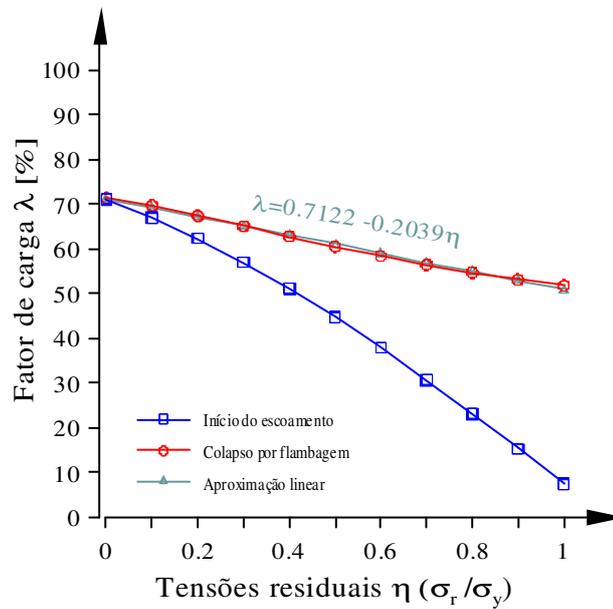


Figura 6. 23 Carga de flambagem $\lambda \times$ fator η .

Tabela 6. 18 Carga de flambagem λ_{col} versus fator η .

Fator η (σ_r / σ_y)	λ_{col} flambagem	λ_a aproximado	Relação $\lambda_a / \lambda_{col}$ [%]
0.00	71.4	71.2	99.7
0.10	69.7	69.1	99.1
0.20	67.4	67.1	99.6
0.30	65.1	65.1	100.0
0.40	62.8	63.1	100.5
0.50	60.5	61.0	100.8
0.60	58.4	59.0	101.0
0.70	56.4	56.9	100.9
0.80	54.7	54.9	100.4
0.90	53.1	52.9	99.6
1.00	51.8	50.8	98.1

Observação: Equação linear λ_a (aproximado) = $71.22 - 20.39 \eta$.

Para os diagramas lineares adotou-se a mesma relação $\eta = 0.3$ e para os parabólicos $\eta = 0.333$, o que leva a fatores de carga de colapso relativamente próximos. Para o modelo de Bild e Trahair (1989) usou-se o valor recomendado de $\eta = 0.5$, o que justifica apresentar os menores valores de λ_y , de λ_{col} , maiores deslocamentos u_B , e também um comportamento levemente diferente. Deve-se lembrar que este modelo é o recomendado pela AS4100 (1990).

O modelo de Galambos e Ketter (1957) é o que apresenta menores valores de λ_{col} , após o de Bild e Trahair (1989), o que justifica a sua adoção pelos americanos.

Tabela 6. 19 Efeito dos diferentes modelos de TRs.

Valores obtidos	Diagramas lineares			Diagramas parabólicos			Bild e Trahair (1989)
	TR na alma σ_r			TR na alma σ_r			
	0	constante	linear	0	constante	parabólica	
Relação η	0.3	0.3	0.3	0.333	0.333	0.333	0.5
σ_r máx. aba +	+6.75	+4.77	+6.75	+4.11	+2.87	4.11	+11.44
σ_r máx. aba -	-6.75	-6.75	-6.75	-7.10	-7.22	-7.10	-7.69
σ_r máx. alma +	0	+4.77	+6.75	0	+2.91	+3.81	+11.09
σ_r máx. alma -	0	-	-6.75	0	-	-2.61	-12.92
Escoamento λ_y	62.4	62.0	62.5	61.4	61.1	61.4	45.6
Colapso λ_{col}	73.9	72.5	73.9	75.1	74.1	75.2	71.5
Desloc. u_B [cm]	1.576	1.548	1.704	1.854	1.712	1.871	1.964
Desloc. v_B [cm]	-0.369	-0.362	-0.370	-0.377	-0.371	-0.378	-0.378
N máx. [kN]	1088.3	1068.0	1088.8	1105.5	1091.2	1106.6	1053.0
M máx. [kNcm]	2567.1	2490.3	2707.7	2915.9	2722.8	2936.7	2893.5
NFP	114	136	127	129	130	124	135

Assim, pode-se concluir que o valor de η é mais determinante nos resultados que a forma do modelo. Note-se também que todos os casos representam tensões de perfis do tipo laminado, com compressão nos extremos das abas e tração na emenda com a alma.

Outros valores de η para os diagramas parabólicos podem ser usados (0.5), mas antes é necessário fazer novas investigações experimentais, de forma que os resultados da fórmula tenham um significado real.

Por outro lado, no uso da fórmula de Bild e Trahair (1989), pode ocorrer escoamento da alma antes da (ou em conjunto com a) aba, em alguns casos. Isso também precisaria de uma justificativa experimental, e pode explicar a hipótese da seção montada de Chan e Chui (1997).

6.5 PORTAL DE KANCHANALAI (1977)

O portal ilustrado na Fig., 6.24 faz parte de um conjunto de problemas que foram propostos e resolvidos por Kanchanalai (1977), utilizando outra formulação de ZP, de reconhecida qualidade, a ponto de servir de base para o estabelecimento dos parâmetros usados nas normas do AISC (Manual, 1978; ASD, 1989; LRFD, 1986 e 1993), daí sua importância.

Conforme indicado por Chen *et al.* (1996): “qualquer método de análise que possa reproduzir os resultados desse problema de banco de provas é capaz de satisfazer as exigências para uma análise inelástica avançada bi-dimensional com a qual verificações de dimensionamento de barras no plano não são necessárias”.

Esse sistema estrutural é rotulado nas bases, com dimensões: A (altura) e B (largura). Não são fornecidas as propriedades geométricas ou as seções das barras. São indicadas as inércias das seções dos perfis genericamente como I_{cl} e I_{vg} , para as colunas e viga, respectivamente. Os dados que constam na literatura são expressos apenas pelas seguintes relações: $G_A = (I_{cl}/A) / (I_{vg}/B) = 3$ (ver Eq. 2.6) e $A/r_{cl} = 30$.

O material é considerado elástico perfeitamente plástico, com tensões residuais de segundo o modelo de Galambos e Ketter (1957). Nenhuma outra imperfeição é incluída e não se indicou como foi realizada a discretização adotada ou quaisquer outros dados.

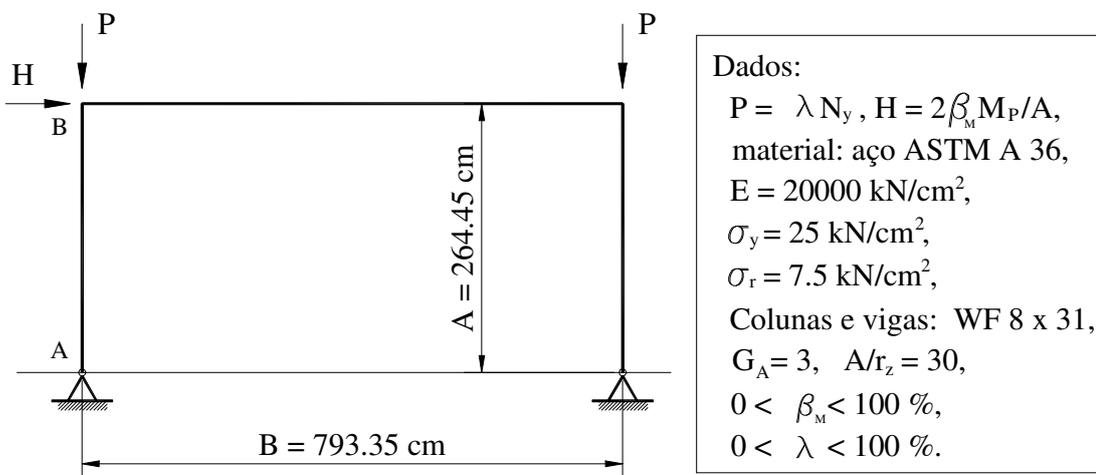


Figura 6. 24 Estrutura do portal de Kanchanalai (1977).

Foram adotados então os seguintes dados adicionais para se poder desenvolver a análise, (alguns descritos de forma sumária por White e Hajjar, 1991):

- adotou-se o perfil W 8×31, para todo o portal, cujas propriedades geométricas já estão na Tab. 6.6, dimensões e tensões residuais na Fig. 6.11;
- considerou-se o aço ASTM A 36, com $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ e $\sigma_r = 7.5 \text{ kN/cm}^2$;
- foi adotado o módulo de Young $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ (acompanhando a norma americana da época, onde tradicionalmente $E = 29000 \text{ ksi}$);
- modelo com 4 EFs por coluna e 8 EFs por viga, e malha com 436 fatias;
- como $A/r_z = 30 \therefore A = 264.45 \text{ cm}$,
- desde que $I_z = I_{cl} = I_{vg}$, então $G_A = 3$ impõe que $B = 3A = 793.35 \text{ cm}$;
- $M_p = Z_z \sigma_y = 12462.5 \text{ kNcm}$, $N_y = A_g \sigma_y = 1472.5 \text{ kN}$ e, portanto, o parâmetro β_M pode ser obtido pela expressão:

$$\beta_M = \frac{HA}{2M_p} = \frac{H}{(2M_p/A)} = \frac{H}{94.252} \tag{6.6}$$

em que H é a força horizontal no topo da coluna.

Inicialmente, se verifica o efeito de H, através variação de β_M , seguindo a Fig. 6.25, onde se tem a variação do deslocamento u_B com o fator de carga vertical λ (P).

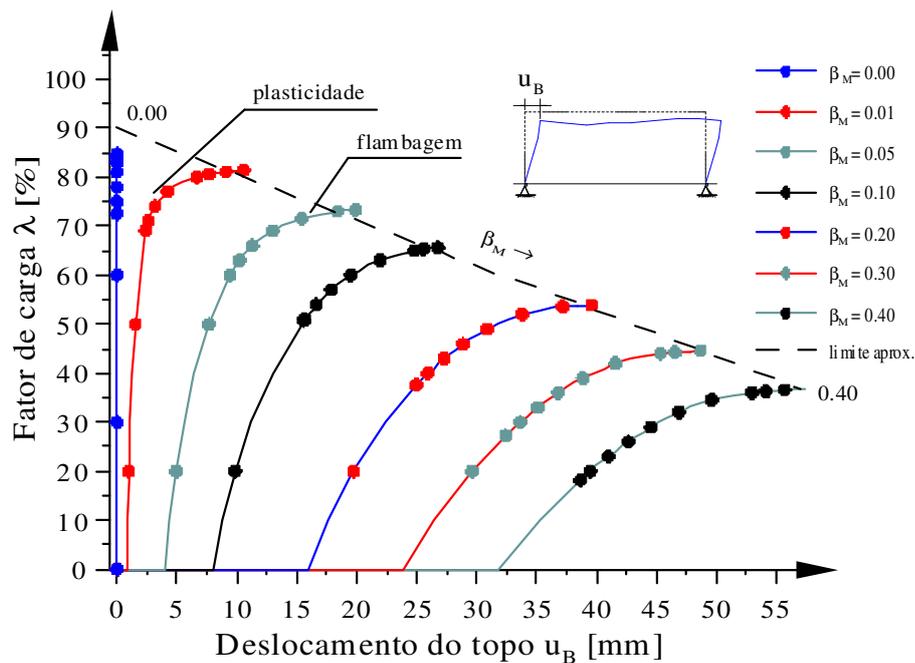


Figura 6.25 Influência do fator β_M no portal de Kanchanalai.

Da figura anterior (6.25) pode-se verificar que:

- o ponto que corresponde ao fator de carga zero ($\lambda=0$) representa o deslocamento inicial u_B devido à aplicação total de H , que é fixo, similar a um fora de prumo, sendo a carga P introduzida a seguir de forma incremental;
- à medida que β_M cresce, a partir de zero, se sai da flambagem por compressão pura e gradualmente se passa para uma compressão com leve flexão;
- a trajetória sai da vertical e vai ficando cada vez mais inclinada, notando-se que para valores pequenos de β_M ocorre a plastificação seguida de flambagem, numa curva mais abrupta, já para valores maiores de β_M parece que os dois fenômenos ocorrem em conjunto, com uma curva mais suave;
- pode-se imaginar que os pontos finais da trajetória estariam aproximadamente alinhados por uma reta, com pequenas variações.

Verifica-se agora se o efeito da relação N/N_y no comportamento do portal, acompanhando a Fig. 6.26. Para essa análise, primeiro a carga vertical P é introduzida (fixa, $\lambda=1$), seguindo-se a aplicação de forma incremental de H , sendo agora β_M o fator de carga, ($\beta_M H$).

Observando-se os resultados da Fig. 6.26, pode-se dizer que:

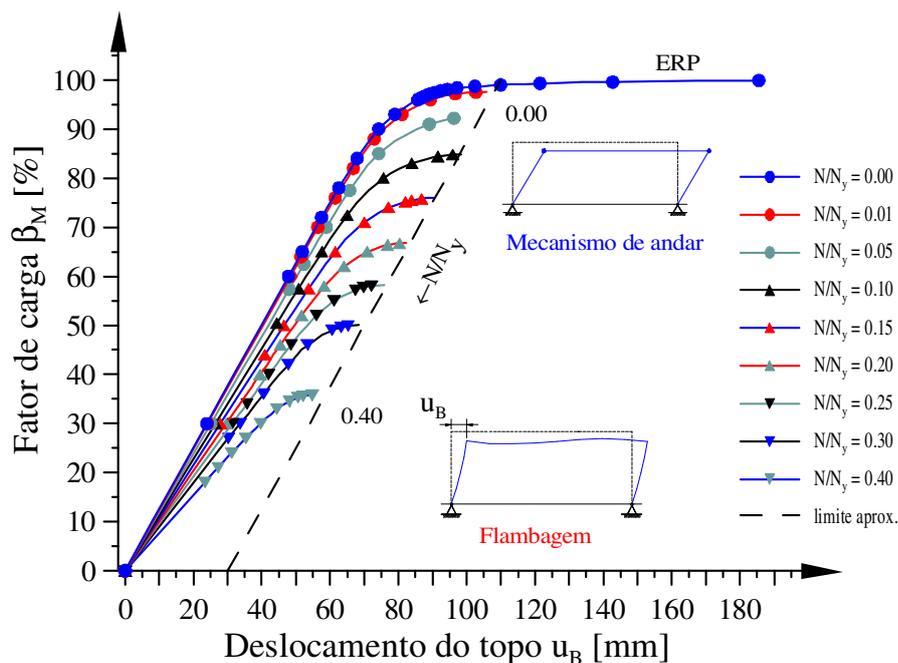


Figura 6. 26 Influência do fator N/N_y no portal de Kanchanalai.

- a. como os esforços normais são pequenos, e o que predomina é a flexão, os deslocamentos obtidos são sensivelmente maiores,
- b. quando N/N_y é zero, tem-se apenas flexão, verifica-se assim o comportamento previsto na plasticidade clássica (ERP), com a formação do *mecanismo de andar* (4 RP nas extremidades das colunas), o que leva a um grande deslocamento no topo u_B (18 cm!), sem flambagem;
- c. quando N é diferente de zero, à medida que a carga cresce, a plasticidade vai degradando a estrutura procurando chegar à formação do mecanismo de andar, entretanto antes que isso ocorra, um pequeno valor de normal provoca a flambagem (aparecimento de singularidade na MRG) sem o mecanismo;
- d. novamente os pontos finais das trajetórias, exceto para $N/N_y = 0$, parecem todos alinhados segundo uma reta.

Como as bases do portal são rotuladas, o mecanismo de andar está associado à formação de apenas 2 RPs: ou nas extremidades da viga ou no topo das colunas. Como a carga vertical é aplicada nas colunas, as zonas plásticas somente ocorrerão no topo das colunas e não na viga. E o momento de tombamento da estrutura é equilibrado por dois momentos M nas colunas ($H_A = 2M$), e como são 2 colunas então $\beta_M = M/M_P$.

Na verdade o que se está realizando é um teste de flambagem com uma barra sujeita a carga axial N e momento M , em uma extremidade, e somente o axial N na outra extremidade, sendo que essa barra faz parte de um conjunto estrutural. Como a viga é longa, o benefício de sua rigidez fica menor, mas não é desprezável, e assim surge a aproximação linear entre N/N_y e $\beta_M (= M/M_P)$ que se transforma na equação de interação expressa pela Eq. 2.9.

Diagramas como esses foram desenvolvidos e estudados por Kanchanalai (1977) para esse portal e vários outros similares (alguns indicam vigas de rigidez infinita), e nenhum artigo foi publicado sobre os mesmos, embora esse trabalho tenha sido coordenado pela AISI, e seja mencionado em diversas referências e por diversos pesquisadores.

Desde que se conhece ambos os valores N/N_y e M/M_P , aparece então o instante de se conhecer a relação direta entre ambos, não mais para uma barra, mas para uma estrutura, ou seja, para o portal. Essa relação é mostrada na Fig. 6.27.

Nessa figura é apresentado um diagrama de interação $N/N_y \times M/M_p$, que foi mostrado diversas vezes para barras no capítulo 2, mas que agora é expandido para a estrutura como um todo, no caso um portal.

A extremidade $M/M_p = 1$ indica a formação do mecanismo de andar: colapso previsto por ERP; a outra extremidade $N/N_y = 0.85$ representa a flambagem por compressão pura. A forma em S da superfície pode ser explicada da seguinte forma:

- no lado próximo a $M/M_p = 1$, a curva tende a ser ligeiramente convexa, acompanhando um pouco a tendência da superfície de interação que é crescente nessa região,
- no lado oposto, a tendência é ser ligeiramente concava, acompanhando um pouco a forma de crescimento da curva de flambagem (hipérbole de Euler e o trecho inelástico aproximado pela parábola, como visto no exemplo 6.3);
- a superfície de início do escoamento tende a acompanhar a figura da curva de colapso, notando-se um comportamento diferente nas extremidades, mais afastada do ponto de $M/M_p = 1$, coerente com o maior feito das TRs na face da seção do perfil, e se aproxima mais de $N/N_y = 0.85$, por causa dos efeitos de segunda ordem ($P\Delta$ e $P\delta$);

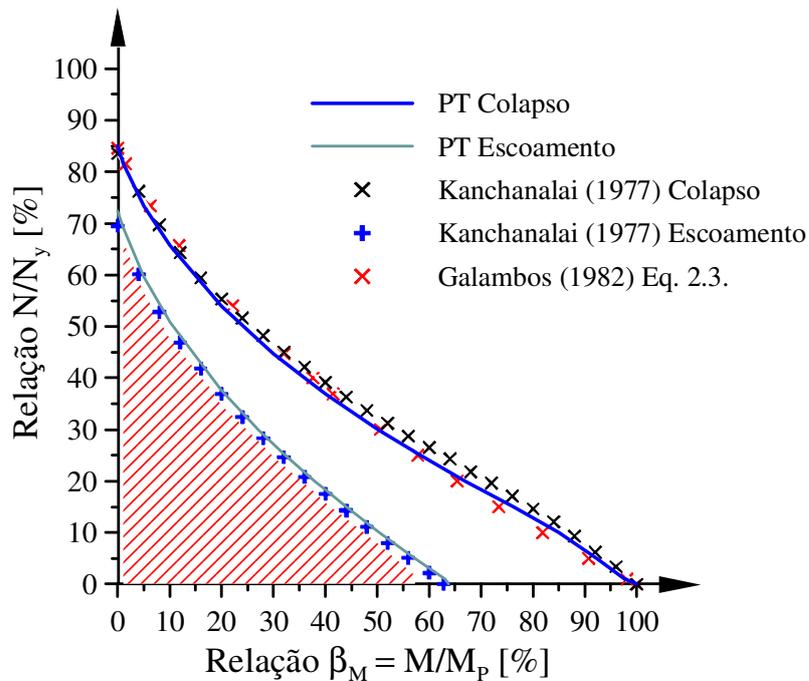


Figura 6. 27 Interação $M/M_p \times N/N_y$ no portal de Kanchanalai.

- d. a região com hachura sob a curva de escoamento representa o regime elástico e a região entre as duas curvas, o regime inelástico de trabalho do portal;
- e. pode-se observar que os resultados obtidos no PT e listados na Tab. 6.20, mostram-se coerentes e próximos dos valores reproduzidos da figura apresentada por Liew *et al.* (1993), que não são listados por serem apenas uma adaptação (dependente da qualidade de reprodução da figura original “xerox”);
- f. para $G_A = 3$ e $G_B = 100$ (∞), conforme já apresentado na seção 2.4, usando o procedimento de Disque (1973) para considerar a coluna na região inelástica, se obtém $\tau = 0.61$ e $k = 2.511$, e assim $\lambda_c = 0.847$. Com esse valor e utilizando a Eq. 2.3, com $C_m = 1$, obtém-se uma superfície aproximada (Galambos, 1982), que são os valores mostrados na Tab. 6.20, (correspondem aos mesmos N/N_y).

Os resultados poderiam ser melhores caso fossem utilizados 6 EFs por coluna, como nos exemplos anteriores. Pequenas diferenças para valores maiores de M/M_p podem estar associadas em parte à Eq. 2.3, que é uma linearização média dessa curva, (e de outras); e também ao efeito secundário $M\phi$, que provoca essa redução quando ocorrem momentos (e rotações opostas: bases rotuladas) elevados, como nesse caso.

Pelos resultados obtidos, pode-se acreditar, conforme Chen *et al.* (1996), que a formulação desta dissertação é capaz de desenvolver uma análise avançada no plano.

Tabela 6.20 Relação $M/M_p \times N/N_y$ no portal de Kanchanalai.

Galambos	Colapso (PT)		Escoamento (PT)	
	M/M_p [%]	N/N_y [%]	M/M_p [%]	N/N_y [%]
100.0	100.0	0.0	63.7	0.0
98.1	97.7	1.0	63.1	1.0
90.7	92.4	5.0	57.3	5.0
81.8	85.0	10.0	50.4	10.0
73.4	76.1	15.0	44.0	15.0
65.4	67.0	20.0	40.0	18.3
57.8	58.3	25.0	37.9	20.0
50.6	50.2	30.0	32.3	25.0
41.4	40.0	36.9	30.0	27.2
37.6	35.9	40.0	27.1	30.0
32.0	30.0	44.7	20.0	37.6
22.1	20.0	54.0	18.0	40.0
11.8	10.0	65.7	10.0	50.8
6.3	5.0	73.4	5.0	59.5
1.5	1.0	81.5	1.0	69.1
0.0	0.0	84.9	0.0	72.4

6.6 PORTAL DE VOGEL (1985)

Este portal é um problema de banco de provas mundial, usado para validar análises inelásticas de segunda ordem. Como foi estudado por diversos pesquisadores, existem diversos resultados que podem ser confrontados. O objetivo aqui é comprovar a formulação desta dissertação numa estrutura com mais redundantes, incluindo os aspectos importantes, e assim poder avaliar a qualidade dos resultados.

Como ilustrado na Fig. 6.28, trata-se de um portal engastado nas bases, sujeito simultaneamente a duas cargas verticais $P = 80\%$ de N_y e uma carga horizontal de distúrbio $H = 1.25\%$ P , ambas incrementais. São incluídas as imperfeições: fora de prumo ($\Delta_0 = L/400 = 1.25\text{ cm}$) e curvatura inicial ($\delta_0 = L/1000 = 0.5\text{ cm}$).

O material é considerado elástico perfeitamente plástico, com o módulo de Young $E = 20500\text{ kN/cm}^2$, aço ASTM A 7, com tensão de escoamento $\sigma_y = 23.5\text{ kN/cm}^2$.

Como já mencionado antes, os perfis laminados europeus HEB 300 e HEA 340 também são aproximados por equivalentes, ajustando-se as medidas (t e a), conforme os dados da Tab. 6.21. Foram feitos então acréscimos de 5.1% e 6.1% em (t), e redução de 0.05% e acréscimo de 2.1% em (a) nos respectivos perfis.

São consideradas adicionalmente tensões residuais duplamente lineares, segundo os padrões europeus ($\eta = 0.5$), como já mostradas na Fig. 6.3c da seção 6.2.

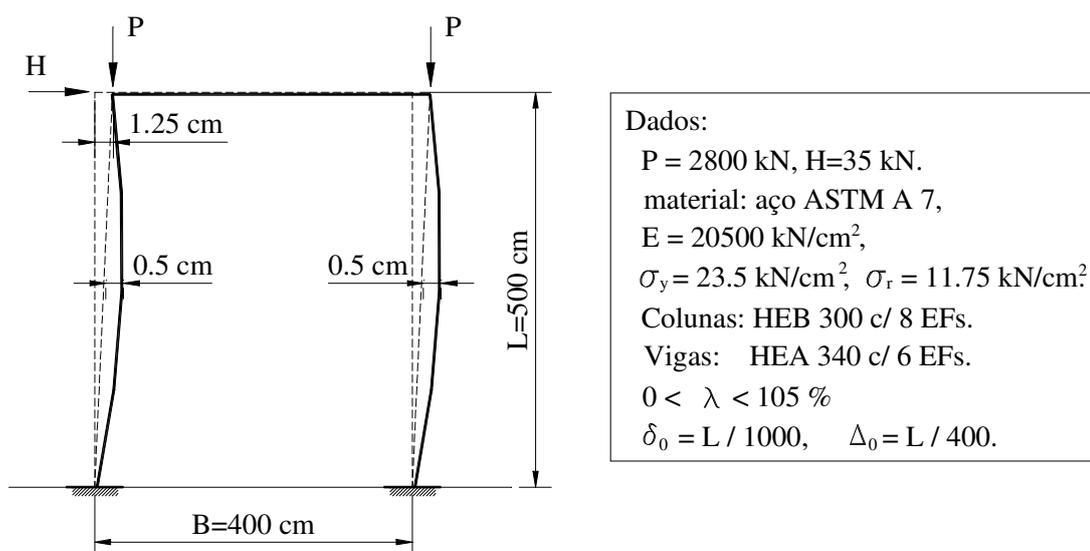


Figura 6.28 Modelo estrutural do Portal de Vogel (1985).

Tabela 6.21 Propriedades das seções I do portal de Vogel.

Perfil	Dimensões da seção I [mm]				Área A_g [cm ²]	Inércia I_z [cm ⁴]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t alma a				elástico W_z [cm ³]	plástico Z_z [cm ³]
HEA340	330	300	16.5	9.5	133.0	27690.0	1678.2	1850.0
PT	330	300	17.498	9.495	133.0	27690.4	1678.2	1847.0
HEB 300	300	300	19.0	11.0	149.0	25170.0	1678.0	1869.0
PT	300	300	19.965	11.230	149.0	25170.7	1678.1	1867.2

Esse problema foi proposto e resolvido por Vogel com ZP e ERP, mas não foram informados detalhes dos modelos ou das malhas empregadas. Em seguida, o portal é analisado por Ziemian (1992) e Clarke (1994), com ambos usando 120 EFs: 50 nas colunas (1 a cada 10 cm) e 20 na viga (1 a cada 20 cm) nos modelos com ZP. Nos modelos com ERP foram usados 4 EFs por barra.

Clarke (1994) fez o exemplo com outros dois modelos: 20 e 10 EFs na coluna, 10 e 5 EFs na viga, respectivamente. Porém somente em Teh e Clarke (1999) o problema foi resolvido com apenas 9 EFs: 4 por coluna e 1 para a viga. Chan e Zhou (2004) apresentaram uma solução com o método ERP-M em teoria de grandes deformações, utilizaram apenas 3 EFs: 1 para cada barra (!)

Já tanto Avery e Mahedran (2000) quanto Kim e Lee (2002) modelaram o problema com 8952 EFs em 3D, com elementos de casca do Abacus (Casca-3D) e consideraram a espessura dos elementos constante, e as abas foram subdivididas em 8 partes e a alma de 8 a 16 partes, de tal sorte que a figura plana da malha do EF tivesse um aspecto de 1×1.

Machado (2005) apresentou a abordagem de plasticidade concentrada, utilizando ERP-R (Liew, 1992) e ERP-M (Chan e Chui, 1997), com 4 EFs: 2 na viga.

O presente trabalho adotou no início a malha com 12 EFs (4 por barra), e depois, uma malha mais fina com 22 EFs (sendo 8 por coluna, 1 a cada 62.5 cm, e 6 na viga); os resultados obtidos em ambas são próximos, mas os da malha fina foram os melhores.

Outra diferença a ser constatada é em relação à malha das fatias nas abordagens com ZP. Ziemian (1992) representou a seção transversal tendo 96 fatias no total, com 2×8 na meia-aba e 2×16 na alma, enquanto Clarke (1994) mostra sua seção típica contendo 231 fatias, com 5×9 na meia-aba e 3×17 na alma. Como no presente trabalho Ziemian modelou apenas metade da seção, enquanto Clarke, devido a sua formulação, empregou sempre subdivisões ímpares para sobrepor a alma e a aba no T do perfil.

Clarke (1994) comentou que ao adotar menos de 3×8 fatias ao longo de meia-aba, ou de 3×8 fatias ao longo da alma, não obteve bons resultados com sua formulação.

No presente trabalho foi adotada uma malha similar à indicada na Fig. 6.4, com 452 e 430 fatias no total, sendo 20×10 na meia-aba para ambas seções, 52 e 30 na alma, para as colunas e viga, respectivamente.

Note que uma malha mais fina na aba, pode detectar o início do escoamento e a degradação das abas de forma mais controlada, e a maior quantidade de fatias na alma procura manter a relação 5 mm/fatia dos exemplos anteriores, que se supõe ser a grandeza determinante na precisão do resultado final da carga de colapso.

Os pesquisadores já mencionados aplicaram formulações e abordagens diferentes:

a. com ERP-R:

- i Ziemian (1992): programa CU-STAND, (Hsieh *et al.*, 1989);
- ii Clarke (1994): uma versão anterior do programa PHINGE (Chen *et al.*, 1996);
- iii Machado (2005): versão ERP-R (baseado em Liew, 1992);

b. com ERP-M:

- i Chan e Zhou (2004); e
- ii Machado (2005): versão ERP-M, (baseado em Chan e Chui, 2000);

c. Com ZP:

- i Ziemian (1992): programa CU-SP2D, feito por White em 1984;
- ii Clarke (1994): programa NIFA; e
- iii Teh e Clarke (1999): versão 3D mais sofisticada do NIFA.

O primeiro ponto a ser investigado é a trajetória de equilíbrio mostrada na Fig. 6.29, onde se destacam o fator de carga de colapso e o deslocamento do topo da coluna.

Como nesse portal atuam cargas verticais elevadas e tensões residuais com valor $\eta = 0.5$, a plastificação ocorre nas duas colunas, quase que simultaneamente, em toda a sua extensão, enquanto a viga permanece elástica até o colapso.

Assim, o fator de colapso indica uma carga de flambagem inelástica com pequena flexão, sem formação localizada de RPs (não ocorre o mecanismo de andar real), mesmo na trajetória descendente pós-limite e na carga final, (Chan e Zhou, 2004).

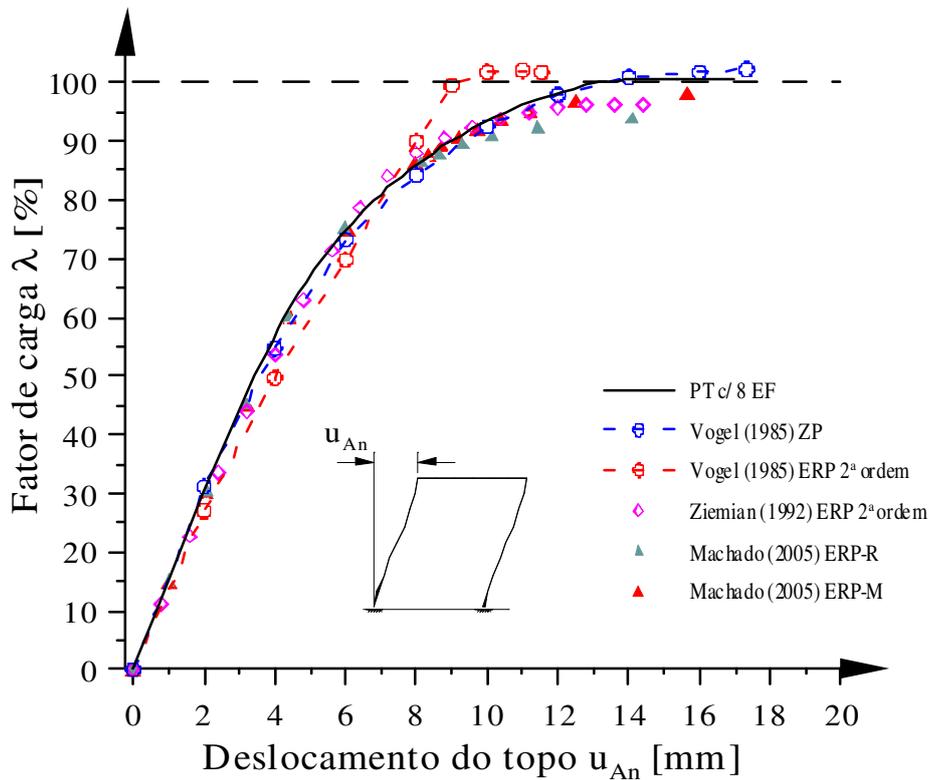


Figura 6. 29 Trajetórias de equilíbrio do portal de Vogel.

Dessa forma, esse exemplo constitui um bom teste tanto para as formulações que tratam da plasticidade concentrada como as da distribuída.

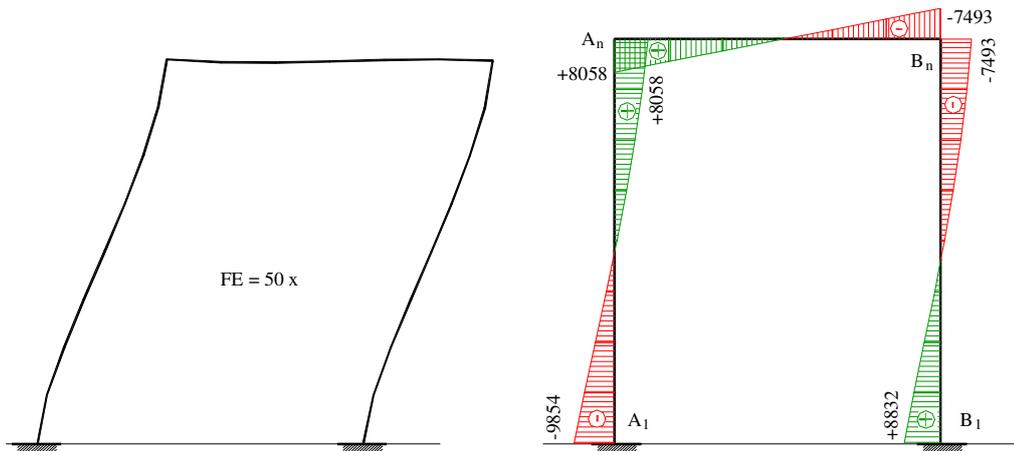
A tab. 6.22 apresenta os resultados do fator carga de colapso λ_{col} e deslocamento do topo correspondente u_{An} , de diversos pesquisadores. A definição desse fator de carga influi nas demais grandezas também, por isso torna-se necessário atingir a marca do resultado considerado melhor $\lambda_{col} = 1.000$, obtido por Ziemian (1992).

Embora os valores de deslocamentos de Ziemian (1992) com ZP estejam na marca de 14 cm, valores em torno de 16 a 17 cm podem ser considerados muito bons.

Tabela 6. 22 Carga de colapso versus deslocamento no portal de Vogel.

	Vogel (1985)		Ziemian (1992)		Clarke (1994)		Liew <i>et al.</i> (1996)	
	ZP	ERP	ZP	ERP-R	ZP	s/ TR	ERP-CN	ERP-R
λ_{col} [%]	102.2	101.7	99.9	105.0	102.3	104.0	99.9	96.0
u_{An} [mm]	17.3	11.5	14.2	12.0	17.1	–	12.9	14.8
	Teh e Clarke (1999)	Avery e Mahen (2000)	Kim e Lee (2002)	Chan e Zhou (2004)	Machado (2005) ERP-R ERP-M		PT ZP	
λ_{col} [%]	100.5	101.0	103.0	103.3	94.0	98.0	100.8	100.7
u_{An} [mm]	20.0	16.2	19.2	16.0	17.01	32.56	17.13	17.00

(Obs. Mahen: Mahendran).



(a) Configuração de colapso: flambagem (b) Diagrama de momentos fletores [kNcm]
 Figura 6.30 Configuração de colapso no portal de Vogel.

Os modelos com ZP obtiveram os valores de λ_{col} mais próximos da marca 100 %, (com diferença até 2%), mas independente da abordagem, o colapso é determinado por flambagem, e a configuração final é mostrada na Fig. 6.30a (Fator de Escala FE = 50).

A proximidade ao valor 1.00 do Ziemian (1992) com ZP, empregando poucos EFs, obtida por Teh e Clarke (1999) e pelo presente trabalho, pode ser atribuída a uma malha fina na alma: com mais fatias ou pontos de monitoração. Clarke (1994) tinha uma superposição de malha entre a alma e a aba, que pode ter enrijecido os 0,2 % a mais.

Na Tab. 6.23 são mostrados os esforços nas extremidades dos EFs (índices: 1 para nó inferior e n para superior, ver Fig. 6.30b), embora muitos pesquisadores não apresentem os valores que obtiveram.

Tabela 6.23 Esforços nos EFs do portal de Vogel.

Esforços Atuantes		Vogel (1985) ZP	Ziemian (1992) ZP	Clarke (1994) ZP	Liew et al. (1996)		Machado (2005) ERP-M	PT ZP	
					ERP-R	ERP-CN			
N_A	[kN]	2770.2	2765.0	2821.0	2649.0	2752.0	2711.0	2782.7	2780.7
N_B		2829.9	2843.0	2905.0	2721.0	2846.0	2791.0	2862.0	2858.5
N_V		13.4	-	-	-	-	-	15.8	15.8
Q_1		30.8	-	-	-	-	-	40.8	40.5
Q_n	28.4	-	-	-	-	-	25.6	21.7	
M_{A1}	[kNcm]	9071.0	8703.0	9385.0	8586.0	10600.0	9248.0	9768.5	9854.4
M_{An}		7464.0	7955.0	8721.0	7357.0	9580.0	8174.0	8202.4	8058.1
M_{B1}		9055.0	8242.0	8277.0	8389.0	9270.0	8784.0	8721.8	8832.1
M_{Bn}		7462.0	7573.0	8084.0	7069.0	9207.0	7804.0	7645.9	7492.7
λ_{col}		1.022	0.999	1.023	0.960	1.040	0.980	1.008	1.007
EF/col.		-	50	50	1	1	1	4	8

Os esforços axiais apresentados estão todos muito próximos. Porém, os momentos pré-colapso, obtidos pelo presente trabalho como mostra o diagrama representado na Fig. 6.30b, possuem valores diferentes dos de Vogel e de Ziemian, mas próximos dos de Clarke. É natural que haja diferenças, já que se tem de 0.8 a 1.5 % de carga a mais ou a menos, dependendo do valor comparado produzido pelo pesquisador, por exemplo Ziemian (1992) ou Vogel (1985).

Outro fator muito importante, e usualmente desaperecebido, é o histórico de plastificação, pois a partir disso se pode entender por que várias vezes os métodos ERP, (refinados, “montados” ou não), falham em acompanhar os de ZP. A Fig. 6.31 representa uma porcentagem de áreas plastificadas Λ , notando-se que:

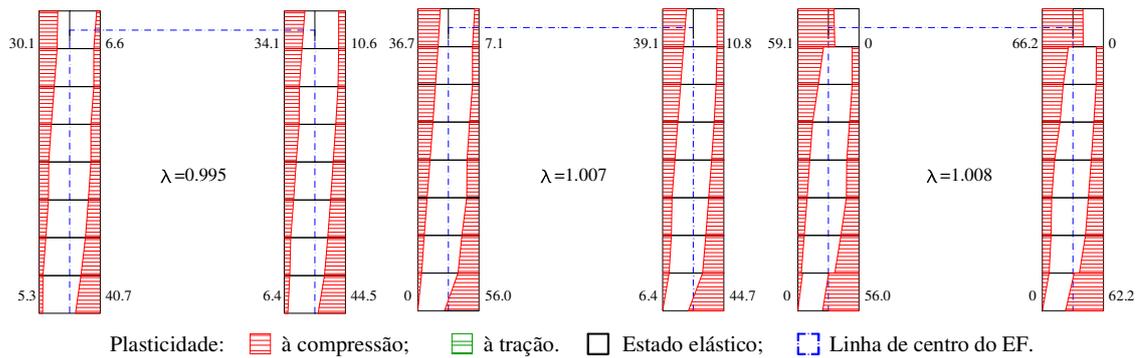
- a. em incrementos ainda longe do colapso ($\lambda=0.93$), acontece o que o presente trabalho denomina *dupla plasticidade*, ou seja, a formação de duas ZP, em cada EF. Neste exemplo isso ocorre em ambas colunas (Fig. 6.31a). No incremento 41 ($\lambda=0.995$) ocorre uma *tripla plasticidade* ao longo da barra (não foi possível representar), com parte da alma também plastificada formando uma terceira ZP, porém esta parte é pequena;
- b. no incremento pré-colapso (Fig. 6.31b), as bases (nós 1 e 22) tem uma elevada plastificação do lado direito, que se unem à ZP da alma.
- c. na iteração pré-colapso, a estrutura procura ainda resistir, e se formam zonas plásticas extensas nos nós superiores (EFs 8 e 15) e também nos nós inferiores (EFs 1 e 22), ocorrendo singularidade na rotação z do nó B₁.

Portanto, existem fatias plastificadas na alma e não plastificadas nas abas, porém partir para o pré-suposto de que somente a alma esteja equilibrando o esforço normal, (concepção da seção montada de Chan e Chui,1997), não parece adequado a esse problema, justificando assim talvez os seus resultados não tão bons.

Por outro lado, com o método ERP-R, o refinamento degrada a rigidez de tal ordem que precipita o colapso em valores inferiores a 1 e com deslocamentos menores.

Já nos modelos ERP-CN os momentos são bem majorados em relação a todos os outros resultados, sendo portanto não conservadores (supõe-se que a estrutura só entrará em colapso num estado de esforços superior ao estado em que realmente isso ocorrerá).

Essas considerações apenas demonstram que os modelos simplificados nem sempre conseguem acompanhar o comportamento descrito por modelos ZP.



(a) Incremento 41 (b) Incremento 49: pré-colapso (c) Incremento 50: colapso
 Figura 6.31 Áreas plastificadas Λ [%] nas colunas do portal de Vogel.

Assim, são compreensíveis as restrições ao emprego de modelos simplificados na análise avançada, impostas pelos comitês que elaboram as normas.

Por outro lado, fica a questão da quantidade de EFs: seria bastante útil se Teh e Clarke (1999), que obtiveram o valor $\lambda = 1.005$, tivessem apresentado também os valores dos esforços, para se poder fazer uma comparação.

Sem dúvida, 8 EFs distribuem de forma menos acurada a energia de deformação que 50 EFs, conseqüentemente os momentos do primeiro devem ser numericamente superiores aos do último, como de fato ocorreu.

Finalizando, resta informar que o emprego da curvatura senoidal ou da circular para a modelagem das CI das imperfeições, não contribuiu com alteração significativa nos resultados.

Tendo em vista a importância deste portal no campo da pesquisa da análise avançada, apresenta-se no apêndice I uma listagem de saída produzida por PPLANAV*, incluindo: dados completos, os resultados para os incrementos pós-início do escoamento, pré- e pós-colapso.

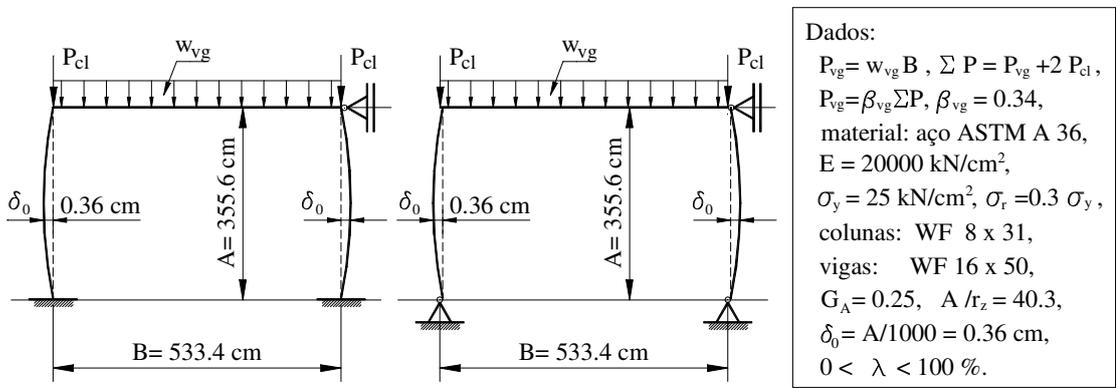
6.7 PORTAL DE ZHOU ET AL. (1990)

Este último exemplo inicia com o portal travado representado nas Fig.s 6.32ab, constituindo de dois sistemas estruturais idênticos, exceto pelas bases: (a) engastadas; e (b) rotuladas. Esse problema também foi analisado por diversos pesquisadores utilizando vários métodos.

A seção das colunas é do perfil WF 8×31, já adotado antes, e possuem curvatura inicial dada por $\delta_0 = A/1000 = 0.36$ cm. A viga do portal é de perfil WF 16×50, cujas propriedades e perfil equivalente são mostrados na Tab. 6.24, considerada sem imperfeição. A seção equivalente possui variação conforme um acréscimo de 1.9 % na espessura da aba (t) e a redução de 1.2 % na da alma (a).

O material é considerado elástico perfeitamente plástico: aço tipo ASTM A 36, com escoamento $\sigma_y = 25$ kN/cm², módulo de Young $E = 20000$ kN/cm², e adota-se o modelo de tensões residuais de Galambos e Ketter (1957) $\sigma_r = 7.5$ kN/cm² também já mostrado.

Esse portal possui uma carga distribuída uniformemente atuando na viga w_{vg} e duas cargas verticais aplicadas no topo das colunas P_{cl} . A carga total na viga é expressa por $P_{vg} = w_{vg}B$, e a carga total do portal então é $\Sigma P = 2P_{cl} + P_{vg}$. Logo, define-se o parâmetro β_{vg} como a relação entre a carga total na viga e a carga total aplicada, ou seja, $\beta_{vg} = P_{vg}/\Sigma P$, sendo que no portal resolvido por Zhou *et al.* (1990), são considerados diversos valores β_{vg} , ($0 \leq \beta_{vg} \leq 1.0$), em ambas as situações de bases. Todas as cargas são incrementais.



(a) Base engastadas

(b) Bases rotuladas

Figura 6. 32 Modelo estrutural do portal de Zhou *et al* (1990).

Tabela 6. 24 Propriedades da seção I da viga do portal de Zhou *et al.*

Refe- rência	Dimensões da seção I [mm]				Área A_g [cm ²]	Inércia I_z [cm ⁴]	Módulo resistente	
	altura d	Largura b	espessuras				elástico W_z [cm ³]	plástico Z_z [cm ³]
			aba t	alma a				
AISC 1978	16.26 in	7.07 in	0.63 in	0.38 in	14.7 in ²	659 in ⁴	81.0 in ³	92.0 in ³
Convertido	413.0	179.58	16.002	9.652	94.838	27429.7	1331.5	1507.6
PT	413.0	179.58	16.309	9.533	94.837	27429.4	1328.3	1506.7

Nesta dissertação será analisado apenas o caso $\beta_v = 0.34$, em ambas as situações de base, com o objetivo de confrontar os diagramas de dimensionamento das colunas indicado pelos autores, validando assim os resultados dessa análise avançada.

Existem dois aspectos diferentes a serem considerados nesse problema:

- a. primeiro é que na ZP, onde a modelagem de imperfeição é explícita, as CI das colunas deverão ser para fora, correspondendo à situação simétrica, como ilustrado na Fig. 6.32b. Outras situações da CI modificam os resultados, aumentando um pouco o valor do fator de carga de colapso;
- b. a aplicação de cargas uniformemente distribuídas em poucos EFs constitui uma fonte de controvérsia, conforme ressaltam Zhou e Chan (1996): “a substituição de cargas ao longo da barra (ou dos EFs) por cargas nodais denominadas equivalentes, pode resultar em considerável erro, o que reduz a precisão do resultado de uma análise não-linear”.

Portanto, esse problema também aborda uma circunstância complexa de modelagem, sendo que Zhou *et al.* (1990) empregou o método da ZP, Liew (1992) utilizou o método ERP-R, e White (1993) o resolveu com ERP-CN. Nas soluções com ERP-R ou ERP-CN, o modelo utilizado possui 16 EFs, sendo 4 por coluna e 8 na viga (Chen *et al.*, 1996).

Para o presente trabalho foram realizados duas discretizações, no início com a mesma distribuição indicada por Chen *et al.* (1996), e depois, adotou-se uma malha com 28 EFs, sendo 8 EFs por coluna e 12 EFs por viga.

Deve-se notar que tanto em Chan e Chui (1997), como em Machado (2005), que consideraram modelos ERP-R e ERP-M, foram utilizados $\eta = 0.5$ e 0.3 , com diagrama de TRs duplo linear do ECCS (1984) para colunas e viga, respectivamente. Esse diagrama do ECCS de TR é bem diferente do adotado por Zhou *et al.* (1990). Por isso, é complicado estabelecer uma conclusão considerando os trabalhos de Chan e Chui

(1997), usando o modelo ERP-M, já que o comportamento das barras será diferente, a partir do início do escoamento (que também ocorrerá com fatores de carga diferentes)

A Tab. 6.25 apresenta fatores de carga de colapso λ_{col} encontrados por diversos pesquisadores. A coluna da tabela com título LRFD refere-se a uma avaliação elástica de primeira ordem, usando os parâmetros do AISC LRFD (1993), conforme mostrado na seção 2.4.2. Enquanto os valores de Machado (2005) praticamente reproduzem os de Chan e Chui (1997), os desta dissertação parecem concordar com os de Chen *et al.* (1996), e ambos situam-se no intervalo de 96 a 98 % dos valores de Zhou *et al.* (1990), cuja formulação de ZP não é descrita pelos pesquisadores.

Este exemplo, ao contrário do anterior, é um caso típico de formação de mecanismo plástico de viga, e não de flambagem. Na Fig. 6.33 mostram-se as configurações deformadas no colapso dos portais, sendo representada em linha cheia a configuração antes do colapso, e em tracejado, as iterações anteriores ao colapso (com o fator de escala FE = 50).

Na Fig. 6.33a, as duas últimas iterações pré-colapso ilustram o que sucede no processo de iteração de Newton Raphson quando a estrutura está extremamente flexível. Nota-se que a pequena carga residual provoca grandes deslocamentos em sentidos opostos, como se a barra fosse um tirante.

O travamento no topo do portal impede o aparecimento de efeitos $P\Delta$, por outro lado, a própria CI proporciona efeitos $P\delta$. A plastificação que surge nos nós inferiores (D, E) do modelo com bases engastadas é pequena, e a seguir cresce nos nós superiores (A, C), e logo ocorre a formação do mecanismo de viga (A-B-C) por intensa plastificação no ponto B, do meio da viga (Chan e Chui, 1997).

Identifica-se o colapso por limite de resistência porque, tanto este problema como o da viga da seção 6.2, gera inúmeras iterações no último passo de carga (800 iterações), enquanto outros problemas, nos quais ocorre a flambagem inelástica, são gastos menos de um quarto dessa quantidade.

Tabela 6. 25 Fator de carga de colapso λ_{col} para os portais de Zhou *et al.*

Bases das colunas	LRFD (1993) B1/B2	Zhou <i>et al.</i> (1990) ZP	Chen <i>et al.</i> (1996)		Chan e Chui (1997) EPR-M	Machado (2005)		PT ZP	
			ERP	ERP-R		EPR-R	EPR-M	4 EF/col	8 EF/col
Engastadas	0.486	0.660	0.637	0.637	0.643	0.6403	0.6453	0.637	0.638
Rotuladas	0.536	0.645	0.638	0.637	0.643	0.6411	0.6454	0.635	0.634

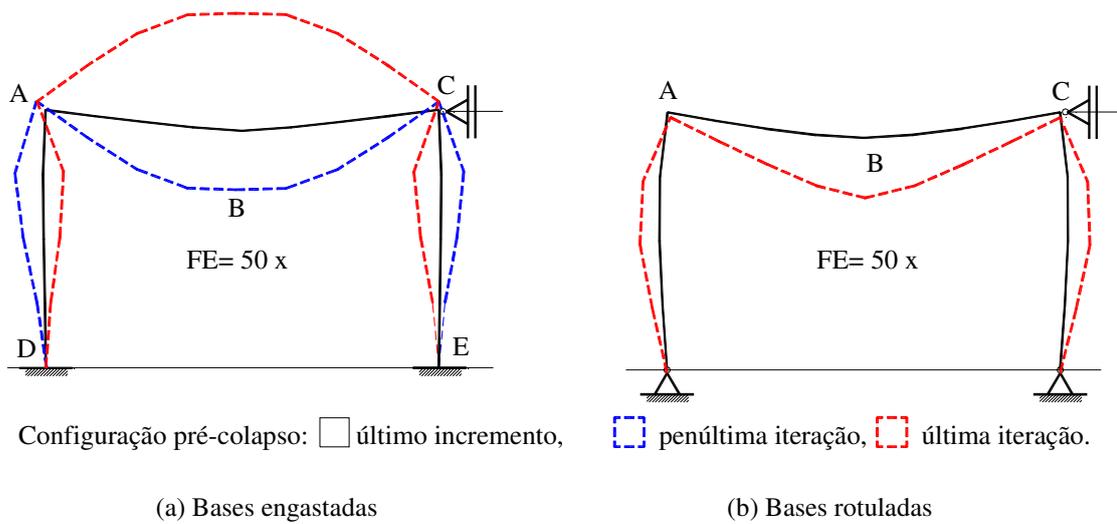


Figura 6.33 Configurações de colapso dos portais de Zhou *et al.*

Comprova-se a formação do mecanismo pelas Tab.s 6.26 e 6.27, que mostram os valores dos esforços adimensionais nas seções críticas desses portais, onde os subscritos (cl1, cln e vg) indicam: na base, no topo das colunas, e na viga, respectivamente.

Observe que o fator de carga de colapso corresponde à carga axial adimensional na coluna, uma vez que $\Sigma P = 2P_y$. Como nesses portais o colapso é determinado por resistência, as respostas dos modelos ERP e ZP tende a serem próximas, como esperado. Além disso, nos dois casos, as vigas mostram uma grande deformação, devido à elevada plastificação, chegando a comportar-se como tirante no instante pré-colapso.

Tabela 6.26 Esforços adimensionais no portal engastado (Fig. 6.32a).

Esforço	Fator adimensional	Zhou (1990) ZP	Chen <i>et al.</i> (1993)		Chan e Chui (1997) ERP-M	Machado (2005)		PT ZP	
			ERP-R	ERP		ERP-R	ERP-M	4EF/col	8EF/col
N_{cl}	N_{ycl}	0.660	0.637	0.637	0.643	0.6403	0.6453	0.637	0.638
M_{cl1}	M_{Pcl}	0.290	0.234	0.240	0.207	0.1803	0.1894	0.319	0.286
M_{cln}	M_{Pcl}	0.392	0.408	0.409	0.417	0.4047	0.4139	0.410	0.412
M_{vg}	M_{Pvg}	1.000	0.994	0.995	0.997	0.9948	1.0000	0.996	0.997

Tabela 6.27 Esforços adimensionais no portal rotulado (Fig. 6.32b).

Esforço	Fator adimensional	Zhou (1990) ZP	Chen <i>et al.</i> (1993)		Chan e Chui (1997) ERP-M	Machado (2005)		PT ZP	
			ERP-R	ERP		ERP-R	ERP-M	4EF/col	8EF/col
N_{cl}	N_{ycl}	0.645	0.637	0.638	0.643	0.6411	0.6454	0.636	0.634
M_{cln}	M_{Pcl}	0.345	0.408	0.409	0.417	0.4038	0.4136	0.395	0.400
M_{vg}	M_{Pvg}	0.980	0.995	0.997	0.996	0.9961	1.0000	0.994	0.995

Observação: Os valores dos esforços são obtidos multiplicando os tabelados pelo fator adimensional.

Nota-se que há diferenças entre os resultados apresentados nessas últimas tabelas, embora Machado (2005) reproduza tanto os resultados de Chan e Chui (1997) com ERP-M, quanto os de Liew *et al.* (1993) com ERP-R.

Os resultados do presente trabalho aproximam-se dos obtidos por Liew *et al.* (1993), com pequena diferença no valor de M_{coll} , que é o momento de engastamento na base do portal Fig. 6.32a, cujo valor é próximo daquele obtido por Zhou *et al.* (1990).

Deve-se observar ainda que o sentido da curvatura das barras pode interferir nos resultados dos momentos, e praticamente não alterar os valores das cargas limites obtidos. Assim, é necessário indicar que as curvaturas iniciais adotadas por Machado (2005) são no sentido oposto às utilizadas nesta dissertação.

A Fig. 6.34 mostra o diagrama de interação de esforços, similar aos apresentados no cap. 2, para a base, o topo da coluna, e para a viga do portal engastado da Fig. 6.32a. Verifica-se que com ZP as curvas de interação do presente trabalho e de Zhou (1990) são muito próximas, e um pouco diferentes das de Machado (2005) com ERP-M. Nota-se que ambas as curvas de interação do topo da coluna e da viga terminam na superfície de plastificação (limite de resistência), enquanto a da base não.

Na Fig. 6.35 o diagrama representa a interação do topo da coluna e viga do portal rotulado da Fig. 6.32b. Agora, o comportamento dos resultados é o mesmo, mas deve-se ressaltar a menor diferença em relação aos resultados de Machado (2005).

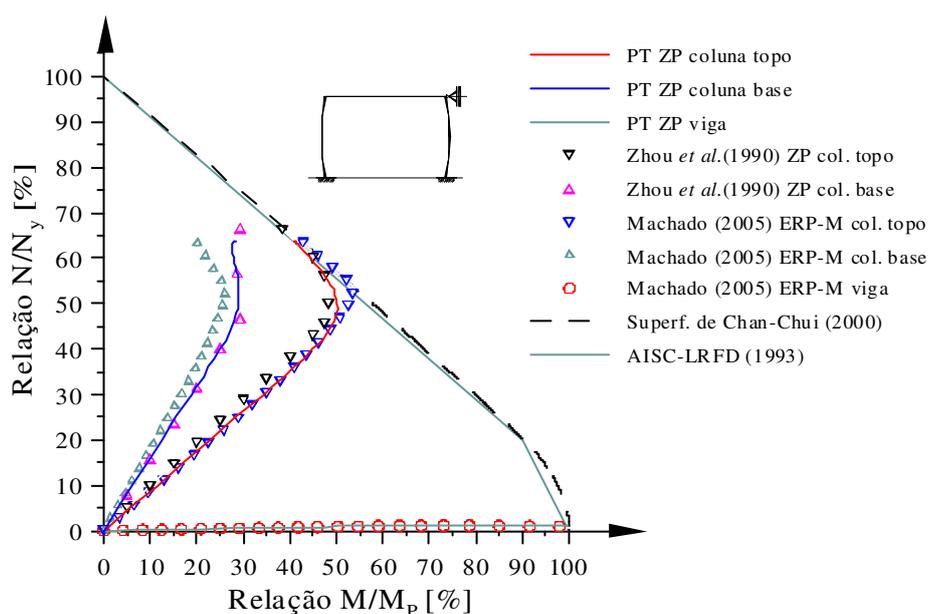


Figura 6. 34 Diagrama de interação para o portal com bases engastadas.

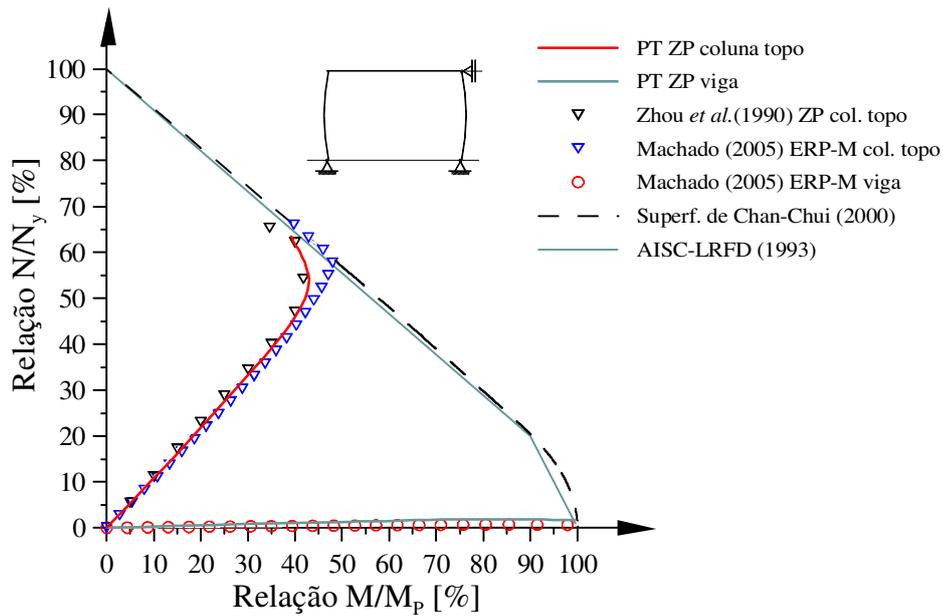
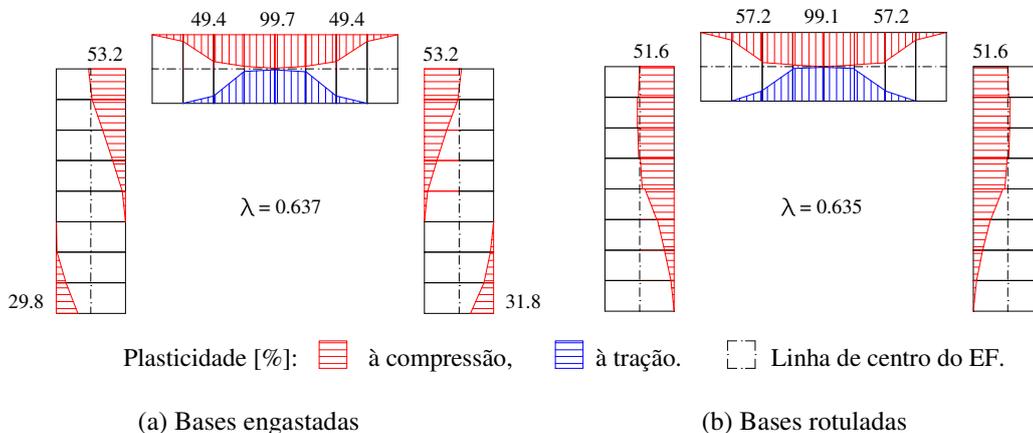


Figura 6.35 Diagrama de interação para o portal com bases rotuladas.

Fica evidente neste exemplo que a formulação proposta por Chan e Chui (1997) superestima a capacidade do sistema estrutural, com a superfície plástica adotada. Note que as curvas de interação produzidas pelo método ZP (Zhou *et al.*, 1990 e do PT) atingem seus pontos extremos sem superar a superfície limite do AISC LRFD (1993).

A Fig. 6.36 apresenta um diagrama aproximado de plastificação (%), no qual se verifica a formação de ZPs no topo das colunas e no centro da viga, sendo ambas bastante extensas. Como já se viu, essa pode ser a causa de algumas diferenças entre os resultados obtidos por métodos ERP e ZP, também justificando as grandes deformações constatadas nas configurações de colapso das Fig.s 6.33a,b.



(a) Bases engastadas (b) Bases rotuladas
 Figura 6.36 Diagrama de plastificação Λ [%] dos portais de Zhou *et al.*

Tendo apresentado uma série de exemplos tanto investigando barras isoladas (viga e colunas), como conjunto de barras (portais), e comprovado a qualidade dos resultados obtidos, desenvolve-se agora a análise avançada de um portal, realizando assim um estudo geral sobre os aspectos importantes.

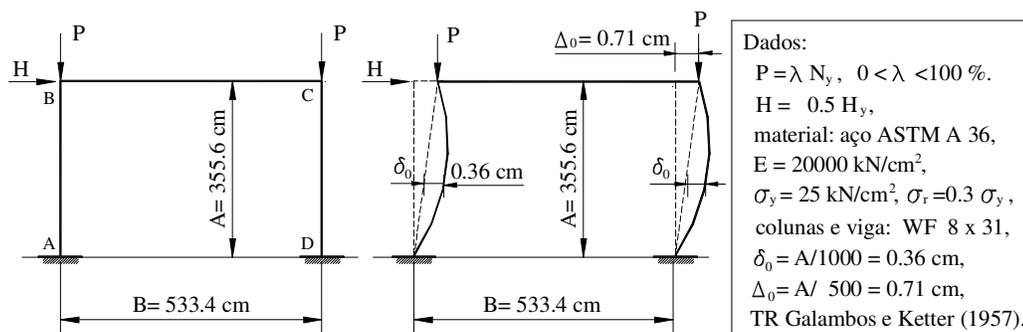
Para isso, é empregada uma variante do portal engastado de Zhou *et al.* (1990), mostrada na Fig. 6.37a. Nessa variante retira-se o apoio do topo e adota-se o mesmo perfil da coluna para a viga, tornando a estrutura mais flexível. Além disso, as cargas verticais são aplicadas apenas nas colunas, em geral incrementais, e inclui-se uma carga horizontal H, expressa em relação à $H_y = M_p/L$. Os demais dados são mantidos.

O objetivo agora é então realizar a análise avançada avaliando os efeitos:

- do modelo escolhido (rigidez da viga e carga horizontal);
- do histórico do carregamento;
- da curvatura inicial;
- do fora de prumo;
- da curvatura inicial e fora de prumo conjugados;
- das tensões residuais; e finalmente,
- da configuração inicial.

6.7.1 Modelo Escolhido

A análise avançada requer que sejam considerados os aspectos importantes (CI, FP e TR) na determinação da capacidade da estrutura. Inicialmente o sistema estrutural é avaliado sem imperfeição, sendo esse comportamento mostrado na Tab. 6.28.



(a) Sem imperfeição

(b) Exemplo de FP e CI conjugados

Figura 6.37 Portal de Zhou modificado para a análise avançada.

Tabela 6. 28 Comportamento do portal especial sem imperfeição.

H= $\beta_H M_p/L$ [%] tipo	N/N _y	λ_y	λ_{col}	u_B	Comentário
0 –	Incremental	72.4 < 72.5	97.9 < 98.0	0.000	flambagem pura
1.4 fixo	Incremental	71.4 < 71.5	96.4 < 96.6	0.303	com carga nocional
200 Incremental	0	61.5 < 61.7	99.6 < 99.7	7.938	mecanismo de andar

Inicialmente, utilizando o portal de Zhou *et al.* (1990) original, retirando o apoio horizontal de travamento, e considerando as cargas P e H já indicadas na Fig. 6.37, define-se uma configuração de ajuste, que é denominada *especial*.

Nesse portal especial ocorre a flambagem por compressão com 96.4 % de N_y, e a formação de mecanismo de andar (ERP) com $H = 2H_y = 2 M_p/A$, como esperado.

Repete-se essa configuração, incluindo tanto a TR de Galambos e Ketter (1957) como a CI nas duas colunas na forma () com $\delta_0 = A/1000$ (ver Fig. 6.39g). Com essa condição que representa a de dimensionamento pelo AISC LRFD (1993), chega-se aos resultados da Tab. 6.29, onde u_B é o deslocamento horizontal do nó do topo da coluna.

Comprova-se que a formação do mecanismo de andar não é afetada pela CI, e que a viga possui rigidez suficiente para que não apareçam diferenças na avaliação da flambagem inelástica. Por essa razão, antes de continuar esse estudo foi necessário avaliar a influência da carga horizontal H e da rigidez da viga I_{vg}, de forma a estabelecer o novo problema de *portal*, o *modificado*. Os resultados obtidos nesse portal, nas diversas análises que serão apresentadas a seguir, podem diagnosticar de forma correta os efeitos estudados.

Através da Tab. 6.30 pode-se avaliar o efeito da carga horizontal H, parametrizada como $\beta_H H_y (= \beta_H M_p/A)$, onde $0 \leq \beta_H \leq 2$. Na maioria dos problemas reais, os esforços horizontais são inferiores a 25 % da capacidade dos pórticos (Galambos *et al.*, 1998). Portanto, será adotado o valor $H = 0.5 H_y$ ($\beta_H = 0.5$) para esse estudo, embora algumas vezes sejam feitas análises com valores de H genéricos.

Tabela 6. 29 Verificação do portal especial na situação do AISC-LRF (1993).

H= $\beta_H M_p/L$ [%] tipo	N/N _y	λ_y	λ_{col}	u_B	Comentário
0 –	Incremental	70.2 < 70.3	96.2 < 96.3	-0.122	Compressão pura
200 Incremental	0	61.5 < 61.6	99.5 < 99.6	6.182	Flexão pura

Tabela 6. 30 Influência da carga horizontal H no portal modificado.

Valores [%]	$\beta_H = H/H_y$							P = 0
	0.00	0.10	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	
λ_y	70.2	63.9	54.5	39.5	25.4	11.9	–	61.5
λ_{col}	96.2	89.8	81.9	69.3	57.3	45.9	35.3	99.5

Tabela 6.31 Influência da viga na CI do portal modificado.

Valores	Perfil da viga				
	WF 16×77	WF 16×50	WF 12×50	WF 8×31	WF 6×25
$I_{vg} [cm^4]$	46201	27429	16399	4577	2223
I_{vg}/I_{cl}	10.09	6.02	3.58	1.00	0.486
λ_{col}	69.6	69.3	68.9	66.0	61.1

Considerando a configuração modificada mostrada na Fig. 6.37a, estuda-se agora a influência da viga, cujos resultados se apresentam na Tab. 6.31. Fica claro que a proporção que I_{vg}/I_{cl} cresce (supera 1), o valor de λ_{col} tende a ficar em torno de 69 %. Dessa maneira, define-se aqui um portal mais flexível, usando-se a mesma seção da coluna na viga.

6.7.2 Histórico do Carregamento

Tendo definido os dados básicos para o portal modificado da Fig. 6.37a, é necessário avaliar o processo incremental a ser adotado. Existem 3 tipos de processo incremental para aplicação das cargas no portal, a saber:

- horizontal H fixa, com verticais 2P incrementais;
- horizontal H incremental, com verticais 2P fixas; e
- todas as cargas incrementais, o que se chama de carregamento proporcional.

Aplicando-se uma extensão do teorema da unicidade da PC, pode-se dizer que “o fator de carga de colapso (λ_{col}) tende a ser insensível à seqüência de aplicação das cargas (histórico), embora as trajetórias e os estados de tensões, deformações e esforços sejam diferentes” (Cook e Gerstle, 1985).

Os três processos incrementais (tipos a, b e c) são representados na Fig. 6.38, onde se comprova que no colapso, chega-se ao mesmo valor de cargas aplicadas. No tipo (a) não se conhecia ainda quanto da carga 2P que poderia ser aplicada, quando já atua a carga 50 % de H fixa. Esse valor foi determinado fazendo-se o crescimento de 2P de 0 até 100 %, encontrando-se o colapso com 66.5 %.

Determinado o valor anterior, pode-se prosseguir com as demais verificações usando-se 66.5 % como fator de combinação das cargas 2P. No tipo (b) aplica-se a combinação (66.5 %) de 2P de forma fixa, e faz-se o crescimento da carga H de 0 até 100 %, encontrando-se o colapso com 99.6 %.

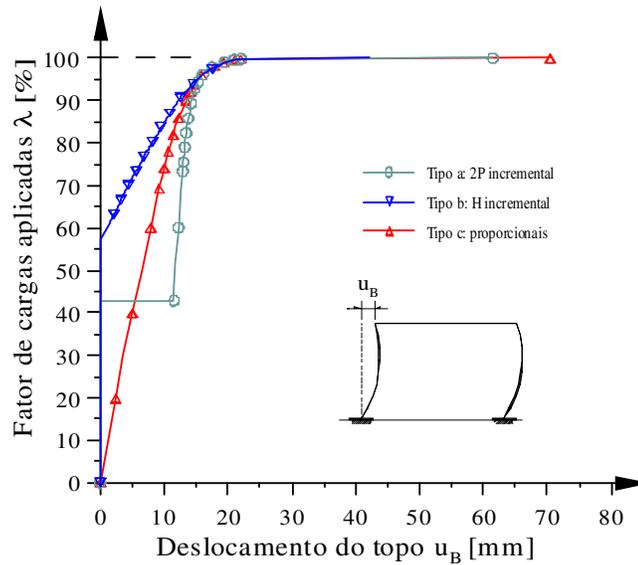


Figura 6.38 Influência do histórico do carregamento no portal modificado.

Finalmente, no tipo (c) aplicam-se de forma incremental a carga 50 % de H e a combinação 66.5 % de 2P, obtendo-se o colapso com 99.9 %.

A diferença entre os valores obtidos: 99.6 % e 99.9 %, em relação ao total (100 %), justifica-se pois o valor da carga de colapso determinada no tipo (a) na realidade está no intervalo $66.4 \leq \lambda_{col} \leq 66.5 \%$, (não é 66.5 %, é um pouco menor).

O valor do fator de carga λ utilizado na Fig. 6.38 é obtido como uma combinação linear: $\lambda = [\lambda_H(50\% H_y) + \lambda_{2P}(66.5\% 2P_y)]$, conforme se indica na Tab. 6.32. Portanto se aplicam as seguintes expressões:

- a. H fixo: $\lambda = (42.918 + \lambda_{2P}/116.5) \%$;
- b. 2P fixo: $\lambda = (57.082 + \lambda_H/116.5) \%$; e
- c. Proporcional: $\lambda = 85.836(\lambda_H + \lambda_{2P}) \%$.

Para se obter melhores resultados, nas análises que se seguem, será utilizado o processo incremental do tipo (a) As exceções ocorrem quando $H > 0.5 H_y$, onde se adota o tipo (b). O tipo (c) proporcional não foi utilizado nesse estudo.

Tabela 6.32 Avaliação dos tipos de processo incremental.

Tipo	Fator de Combinação		Condição da carga		Colapso $\lambda_{col} [\%]$
	Horizontal H_y	Verticais $2P_y$	Horizontal H	Verticais 2P	
(a)	50 %	100 %	Fixa	Incrementais (λ_{2P})	$66.4 \leq 66.5$
(b)	50 %	66.5 %	Incremental (λ_H)	Fixas	$99.5 \leq 99.6$
(c)	50 %	66.5 %	Incrementais (λ)	Incrementais (λ)	$99.8 \leq 99.9$

6.7.3 Curvatura Inicial (CI)

Na seção 6.4 verificou-se que a CI reduz a capacidade de uma coluna isolada. Agora, por necessidade da sua inclusão de forma explícita surge a questão: qual ou quais das configurações de CI devem ser verificadas dentre as indicadas na Fig. 6.39.

Mantido o mesmo carregamento em todas hipóteses, a Fig. 6.39 mostra 4 CIs para uma coluna do portal, e outras 4 situações para ambas as colunas do portal, que deverão ser verificadas, pois são configurações iniciais diferentes.

Na Tab. 6.33 os fatores de carga de colapso λ_{col} para todas essas configurações são indicados considerando $\beta_H = H/H_y = 0.5$. Adota-se $\delta_0 = A/500$ para uma ou duas colunas e $\delta_0 = A/1000$ para duas colunas.

Observa-se que o efeito da CI é pequeno, e em alguns casos é até favorável. As piores situações são mostradas nas Figs 6.39a ou 6.39d, quando a CI é considerada em uma coluna, e Fig.6.39h para CI nas duas colunas. Nota-se que nessas situações a CI é na mesma direção de H.

Nessas análises encontram-se as seguintes relações para λ_{col} quando se consideram os efeitos da CI, (com ou sem TR):

- a. $\lambda_{col} () \cong \lambda_{col} (| + \lambda_{col} (- \lambda_{col} | | e \lambda_{col} ((\cong \lambda_{col} (| + \lambda_{col} (- \lambda_{col} | | ;$
- b. $\lambda_{col} () \cong \lambda_{col} (| + \lambda_{col} () - \lambda_{col} | | e \lambda_{col} () \cong \lambda_{col} (| + \lambda_{col} () - \lambda_{col} | | ; e$
- c. o efeito da CI δ_0 em 2 colunas é menos crítico que o efeito de $2\delta_0$ em 1 coluna.

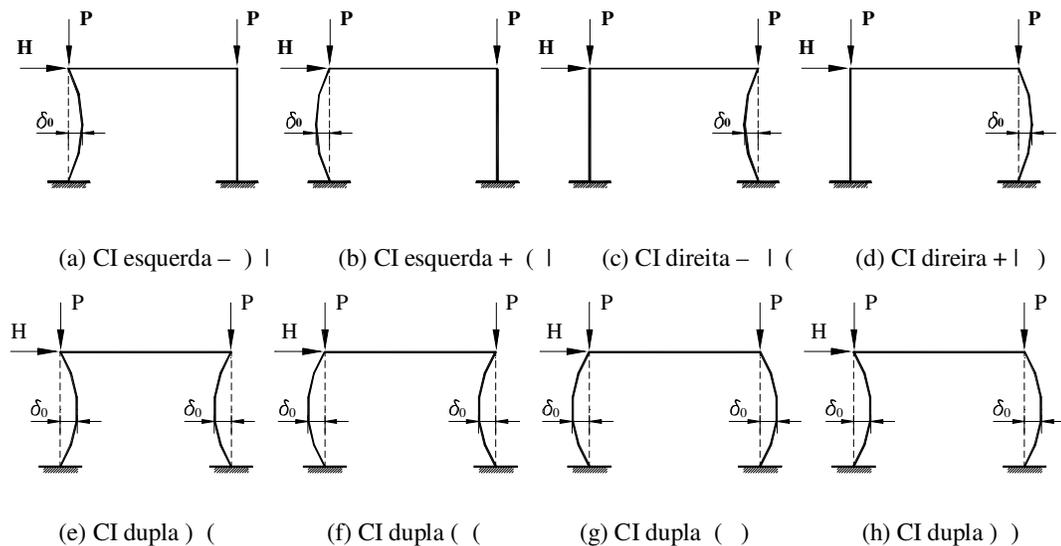


Figura 6.39 Configurações com CI do portal modificado.

Tabela 6.33 Efeito da CI no portal modificado.

(a) CI $\delta_0 = A/500$ em apenas uma coluna.

Fator [%]	TR	CI				
		sem	a.)	b. (c. (d.)
λ_y sup.	sem	60.2	58.0	59.1	60.3	56.9
	com	35.5	34.6	34.9	36.0	33.5
λ_{col} inf.	sem	68.0	67.4	68.4	68.3	67.4
	com	66.4	66.0	66.7	66.7	66.0

(b) CI $\delta_0 = A/1000$ para as duas colunas.

Fator [%]	TR	CI				
		sem	e.) (f. ((g. ()	h.))
λ_y sup.	sem	66.5	59.2	61.4	58.0	59.1
	com	35.5	35.3	36.3	34.2	34.8
λ_{col} inf.	sem	68.0	67.9	68.4	67.9	67.4
	com	66.4	66.4	66.7	66.4	66.0

(c) CI $\delta_0 = A/500$ para as duas colunas.

Fator [%]	TR	CI				
		sem	e.) (f. ((g. ()	h.))
λ_y sup.	sem	60.2	57.1	62.7	56.0	57.9
	com	35.5	34.0	37.1	33.0	34.1
λ_{col} inf.	sem	67.9	67.7	68.7	67.9	66.9
	com	66.4	66.2	66.9	66.3	65.5

(d) Efeito da magnitude de δ_0 para situação da Fig. 6.39g: () s/ carga horizontal H.

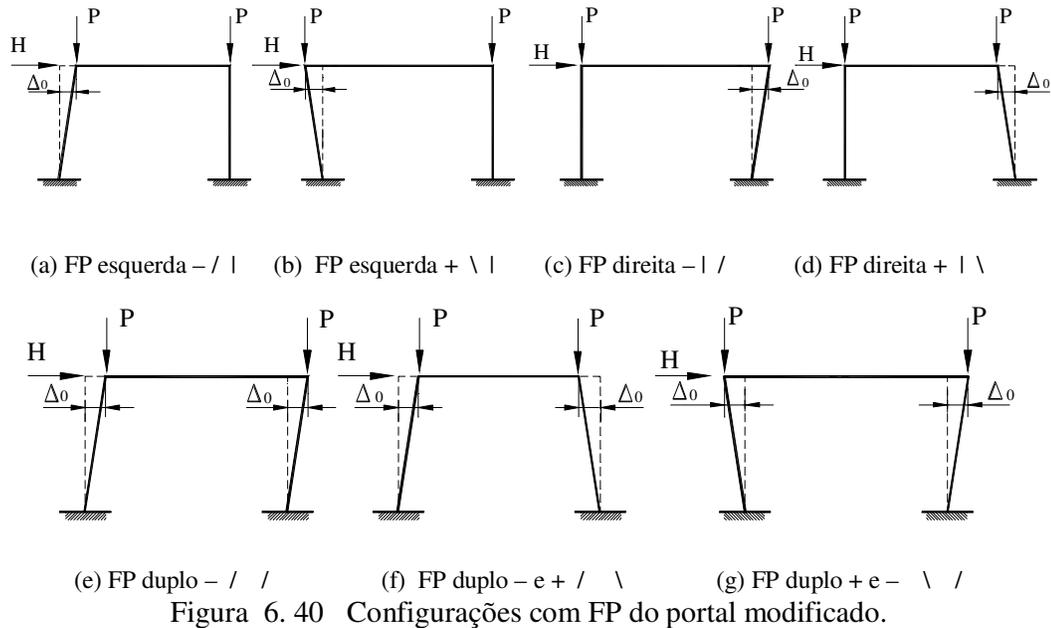
Fator [%]	TR	Magnitude da CI δ_0 [mm]					
		sem	A/1500	A/1000	A/500	A/250	A/100
		0.00	2.37	3.56	7.11	14.22	35.56
λ_y sup.	sem	100.0	97.2	95.9	92.0	85.3	70.0
	com	72.5	70.5	69.5	66.8	61.9	50.9
λ_{col} inf.	sem	100.1	98.2	97.3	94.9	90.4	79.5
	com	97.9	97.1	96.1	93.6	89.3	78.8

A Tab. 6.33d considera o efeito da magnitude de δ_0 , que é significativa, porém valores superiores a A/500 caracterizam peças refugadas pelo controle de qualidade das fábricas, não tendo uso prático. Para obter esses resultados (Tab. 6.33d), foi utilizado o modelo da Fig. 6.39g, que curiosamente se torna assimétrico, próximo à configuração de colapso.

6.7.4 Fora de Prumo (FP)

Devido à simetria do modelo, são poucas as configurações de FP a serem analisadas, como mostra a Fig. 6.40. Na realidade, as situações das Fig.s 6.40c,d comportam-se da mesma maneira que os das Fig.s 6.40a,b quando não é aplicada a carga H, e por isso não foram consideradas nas análises seguintes.

O objetivo principal agora é avaliar o efeito $P\Delta$, e a sua participação na carga de colapso por flambagem.



A presença da carga horizontal H majora o deslocamento horizontal no topo (Δ_H), e por conseqüência, o efeito $P\Delta$ fica acoplado ($\Delta = \Delta_H + \Delta_0$), impedindo uma melhor análise da influência do FP (Δ_0).

Na Tab. 6.34a os fatores de carga de colapso dessas configurações são listados, considerando $\Delta_0 = A/500$, para uma ou duas colunas, como previsto nas normas ($\beta_H = 0$ nesses casos). Também é colocada a condição $\Delta_0 = A/250$ para uma só coluna.

Os modelos das Fig.s 6.40f,g são os casos em que o efeito do FP é benéfico por causa da formação de um triângulo (que é geometricamente estável), razão pela qual se obtém os mesmos valores da condição perfeita.

Verifica-se nessas análises que todas as grandezas obtidas para a condição de FP nas 2 colunas de Δ_0 , correspondem às grandezas do portal com FP em 1 coluna de $2\Delta_0$, sendo que a diferença máxima entre os esforços obtidos é inferior a 3 %.

Deve-se também observar que os fatores de carga de colapso (sem a carga H) considerando FP de $A/500$, representam apenas 3 a 5 % de redução na carga de flambagem da estrutura. Isso acontece porque o portal possui pequena altura de coluna (A) e a carga H não foi considerada. Note-se que na Tab. 6.30 para $\beta_H = 0$ os fatores de carga são $\lambda_y \text{ sup.} = 70.2$ e $\lambda_{\text{col}} \text{ inf.} = 96.2$, respectivamente, maiores que os correspondentes a FP dos casos (a) / | , (b) \ | e (e) / / da Tab. 6.34a com TR.

Tabela 6.34 Efeito do FP no portal modificado.

(a) Efeito de $\Delta_0 = A/500$

Fator [%]	TR	FP $\Delta_0 = A/500$.				$\Delta_0 = A/250$. a./ l, b.\ l
		sem	a. / l, b.\ l	e. / /	f / \, g \ /	
λ_y sup.	sem	99.9	96.4	93.1	99.9	93.1
	com	72.5	70.1	67.8	72.5	67.8
λ_{col} inf.	sem	100.0	96.9	94.2	100.0	94.2
	com	97.9	93.8	91.1	98.0	91.1

(b) Efeito da magnitude de Δ_0 com TR

Fator [%]	FP Caso	Magnitude do FP Δ_0 [mm]				
		A/500	A/400	A/300	A/200	A/100
λ_y sup.	a. / l	70.1	69.5	68.5	66.7	61.9
	e./ /	67.8	66.8	65.1	62.0	54.5
λ_{col} inf.	a. / l	93.8	93.1	91.9	89.9	84.6
	e./ /	91.1	89.9	88.0	84.6	76.3

(c) Efeito de H com TR e $\Delta_0 = A/500$ no caso da Fig. 6.40e / /

Fator [%]	$\beta_H = H / H_y$							
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
λ_y sup.	67.8	60.5	53.4	46.6	39.9	33.6	27.4	21.4
λ_{col} inf.	91.2	85.1	79.5	74.0	68.8	63.7	58.9	54.2

O efeito da magnitude do FP Δ_0 (Tab. 6.34b) é mais acentuado que o de CI δ_0 , embora valores superiores a A/400 sejam condições rejeitadas na montagem das obras.

Já com a presença de H (Tab. 6.34c), verifica-se uma drástica redução de capacidade do portal, coerente com a soma do efeito $P\Delta_0$ (do FP) com o efeito $P\Delta_H$, sendo Δ_H o deslocamento horizontal no topo, provocado apenas por H (exemplo: com $\beta_H = 0.5$, redução a 66.2 %).

6.7.5 Curvatura Inicial e Fora de Prumo Conjugados (CI+FP)

Agora, as situações combinadas de imperfeições geométricas CI e FP geram 4 configurações para imperfeições em apenas 1 coluna, e 12 configurações para as 2 colunas, que são representadas na Fig. 6.41a-p.

Para se estabelecer a pior dessas configurações, será avaliado o portal sujeito inicialmente apenas às cargas verticais 2P, e em seguida se avalia a presença de H.

Na Tab. 6.35 são mostrados os fatores de carga de colapso para todas essas configurações com imperfeições, considerando $\Delta_0 = A/500$ e $\delta_0 = A/1000$, para 1 ou 2 colunas imperfeitas. Para o pior caso de 1 coluna, considera-se o valor $2\Delta_0 = A/250$ e $2\delta_0 = A/500$; sendo o esforço horizontal H desconsiderado ($\beta_H = 0$) ou não ($\beta_H = \pm 0.5$), porém sem incluir TR.

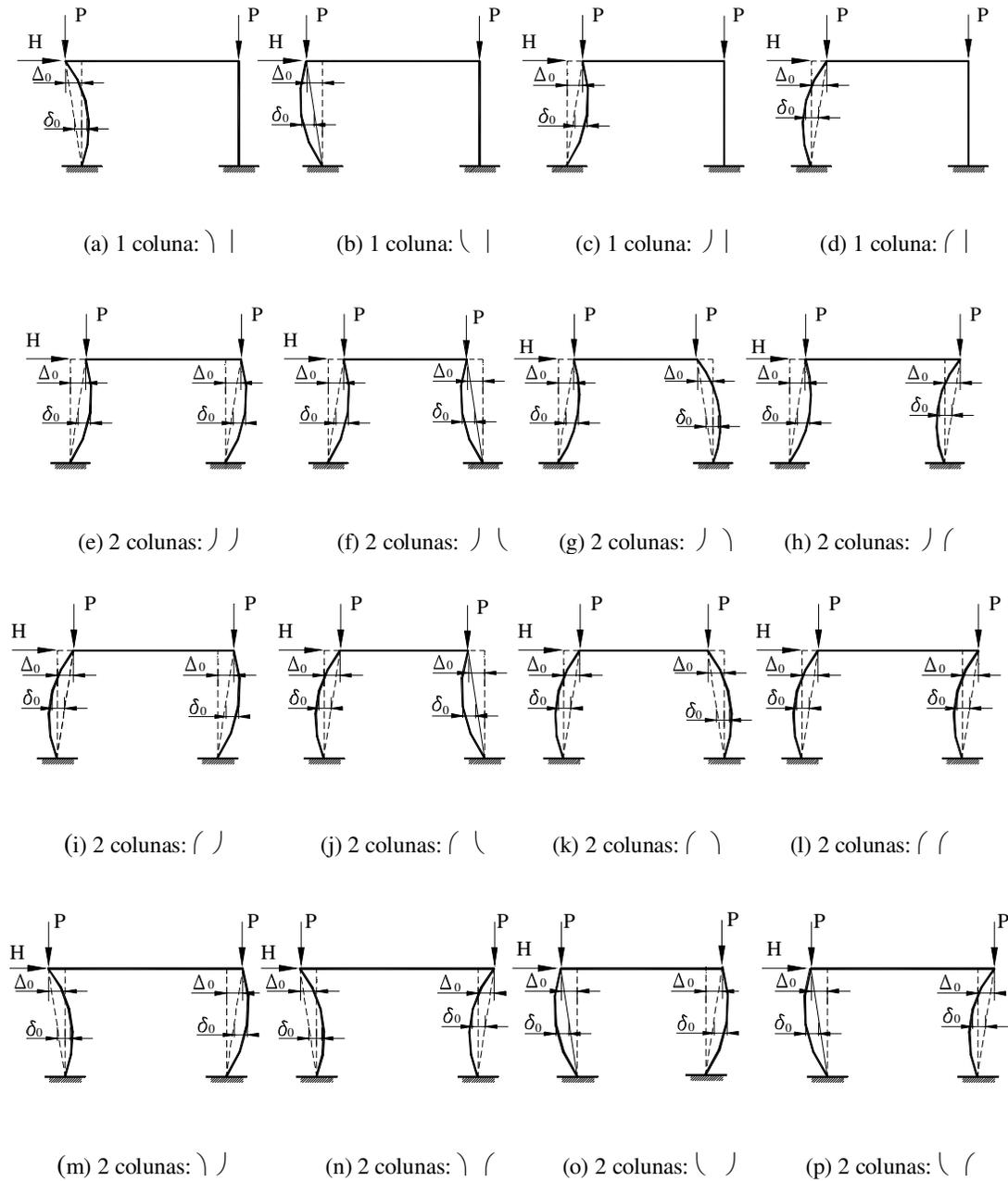


Figura 6.41 Configurações com CI e FP conjugados no portal modificado.

Observe que esses fatores de carga de colapso são próximos, variam entre 92 a 98 % quando $\beta_H = 0.0$, e entre 64 a 69 % quando $\beta_H = 0.5$. A condição governante corresponde à configuração geométrica mais propensa ao colapso, que é a da Fig. 6.41e para ambas colunas.

Tabela 6.35 Efeito do CI e FP conjugados no portal modificado.

(a) Efeito de $\Delta_0 = A/500$ e $\delta_0 = A/1000$ em 1 coluna, sem TR.

Fator [%]	H= $\beta_H H_y$	FP + CI em 1 coluna					$2\Delta_0$ e $2\delta_0$ b: \
		sem	a: \	b: \	c: /	d: /	
λ_y sup.	$\beta_H = +0.5$	–	61.4	61.4	58.1	58.0	55.2
	$\beta_H = 0.0$	99.9	95.5	93.5	93.6	95.3	87.9
	$\beta_H = -0.5$	–	59.1	56.9	62.7	60.3	53.9
λ_{col} inf.	$\beta_H = +0.5$	–	69.2	69.8	66.2	66.7	64.6
	$\beta_H = 0.0$	100.0	96.2	96.1	96.1	96.3	92.6
	$\beta_H = -0.5$	–	66.6	66.4	69.9	69.4	64.5

(b) Efeito de $\Delta_0 = A/500$ e $\delta_0 = A/1000$ em 2 colunas, sem TR.

Fator [%]	H= $\beta_H H_y$	FP + CI em 2 colunas					
		e: /)	f: / (^(a)	g: / \	h: / (^(a)	i: /)	j: / \
λ_y sup.	$\beta_H = 0.0$	91.4	95.8	97.1	89.8	89.5	97.1
	$\beta_H = +0.5$	55.8	59.2	59.2	56.1	54.9	61.5
λ_{col} inf.	$\beta_H = 0.0$	92.7	97.4	97.6	93.4	93.5	97.6
	$\beta_H = +0.5$	64.5	68.0	67.5	64.9	65.0	68.5
Fator [%]	H= $\beta_H H_y$	FP + CI em 2 colunas					
		k: / \	l: / (m: \)	n: \ /	o: \)	p: \ /
λ_y sup.	$\beta_H = 0.0$	95.9	92.4	97.1	95.9	95.8	97.1
	$\beta_H = +0.5$	58.1	57.9	59.0	59.1	57.9	61.3
λ_{col} inf.	$\beta_H = 0.0$	97.3	93.8	97.5	97.4	97.3	97.5
	$\beta_H = +0.5$	68.0	65.4	67.4	67.8	67.9	68.3

^(a) Ver. 2008: Valores das colunas (f) e (h) estavam invertidos na versão original de 2005.

Deve-se notar que o fator de colapso para a configuração tendo 1 coluna com imperfeição da Fig. 6.41b, quando $2\Delta_0 = A/250$ e $2\delta_0 = A/500$, é o mesmo do mais crítico (Fig. 6.41e) para 2 colunas com imperfeição, usando $\Delta_0 = A/500$ e $\delta_0 = A/1000$. Já o fator de carga de escoamento para o caso da Fig. 6.41b é menor, porque ao colocar todas as imperfeições numa só coluna, o seu escoamento iniciou de forma prematura.

Por outro lado, no exemplo 6.4, da coluna engastada-livre, a configuração inicial governante usava uma CI+ (positiva), agora a(s) configuração(ões) inicial(ais) governante(s) têm uma CI- (negativa). Observa-se que, na configuração inicial mais desfavorável (da Fig. 6.41e), a CI e o FP estão na mesma direção do esforço H.

6.7.6 Tensões Residuais (TRs)

Conhecendo a configuração inicial mais crítica (da Fig. 6.41e), tendo 2 colunas com imperfeições: FP $\Delta_0 = A/500$ e CI $\delta_0 = A/1000$, agora se avalia o efeito das TRs. Já foi visto na seção 6.4 que o parâmetro η influi mais no fator de colapso que o diagrama de TR. Na Tab. 6.36 verifica-se a variação da carga de colapso com η , ao adotar o diagrama de Galambos e Ketter (1957), incluindo a carga horizontal H ($\beta_H = 0.5$).

Tabela 6.36 Influência das TR no portal modificado.

Fator [%]	Fator $\eta = \sigma_r / \sigma_y$ (Galambos e Ketter, 1957)						
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
λ_y sup.	55.8	48.3	40.6	33.0	25.3	17.5	5.6
λ_{col} inf.	64.5	64.2	63.8	63.3	62.7	62.1	61.4
λ_{col}/λ_p 0.3	101.9	101.4	100.8	100.0	99.1	98.1	97.0
Fator [%]	Fator $\eta = \sigma_r / \sigma_y$ (Galambos e Ketter, 1957)				ECCS (1984)	AS4100 (1990)	I soldado (PT)
	0.70	0.80	0.90	1.00			
λ_y sup.	1.8	–	–	–	18.2	30.2	–
λ_{col} inf.	60.8	60.1	59.5	58.8	63.6	64.2	62.1
λ_{col}/λ_p 0.3	96.1	95.1	94.0	92.9	100.5	101.4	98.1

Além disso, verifica-se na Tab. 6.36 a condição de TR duplo linear do ECCS (1984), de Bild e Trahair (1989) da AS4100(1990) e a de I soldados aproximada no PT. Pode-se verificar que as variações são pequenas, sendo que o I soldado é o mais afetado.

Observa-se que a variação nos fatores de carga de colapso devido a TR para esse problema é pequena, da ordem 2%: $63.3 (\eta=0.3) < 64.5 (s/TR)$. Disso pode-se concluir que as TRs contribuem na antecipação do início da plastificação, provocando uma trajetória com deslocamentos maiores para um mesmo fator de carga e uma distribuição da plasticidade mais alongada, o que reduz um pouco os valores finais do fator de carga de colapso.

6.7.7 Configuração Inicial

Tendo estudado todos os aspectos importantes desse portal modificado, pode-se enfim apresentar os resultados dessa análise avançada, seguindo a Tab. 6.37.

Tabela 6.37 Análise avançada do portal modificado.

(a) Com $\beta_H = 0.5$

Caso	Condição	Fig.	s/ TR		c/ TR	
			λ_y	λ_{col}	λ_y	λ_{col}
a	Sem imperfeição	6.38a	60.1 < 60.2	68.0 < 68.1	35.4 < 35.5	66.4 < 66.5
b	Curvatura inicial	6.40h	59.0 < 59.1	67.4 < 67.5	34.7 < 34.8	66.0 < 66.1
c	Fora de prumo	6.41e	56.8 < 56.9	65.0 < 65.1	33.5 < 33.6	63.6 < 63.7
d	CI e FP conjugados	6.42e	55.7 < 55.8	64.5 < 64.6	32.9 < 33.0	63.3 < 63.4

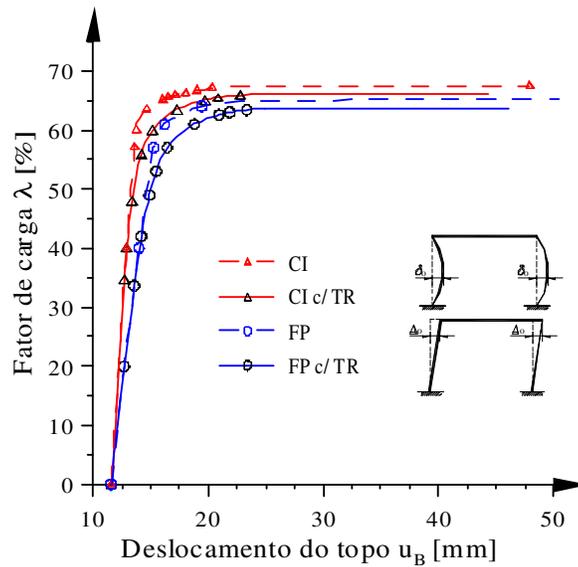
(b) Com $\beta_H = 0$ (somente 2P aplicado)

Caso	Condição	Fig.	s/ TR		c/ TR	
			λ_y	λ_{col}	λ_y	λ_{col}
e	Sem imperfeição	6.38a	–	100.0 < 100.1	72.4 < 72.5	97.9 < 98.0
f	Curvatura inicial	6.40g	95.8 < 95.9	97.3 < 97.4	69.4 < 69.5	96.1 < 96.2
g	Fora de prumo	6.41e	93.0 < 93.1	94.2 < 94.3	67.7 < 67.8	91.1 < 91.2
h	CI e FP conjugados	6.42e	91.3 < 91.4	92.7 < 92.8	66.4 < 66.5	90.3 < 90.4

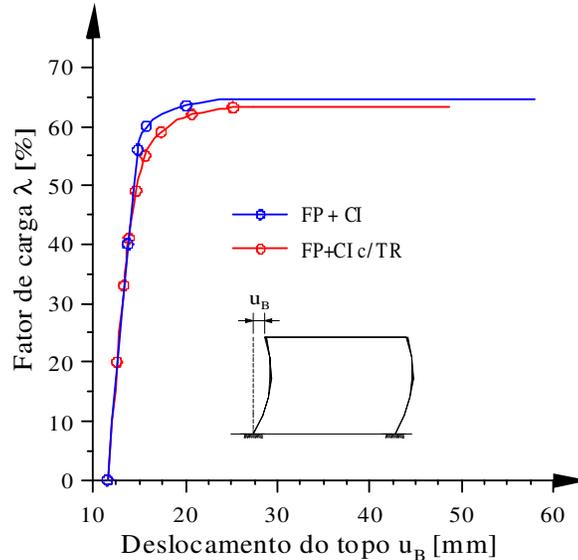
Conclusão: o valor da carga limite para o portal modificado é definido pela análise avançada na configuração da Fig. 6.37b com TR: $\lambda = 63.3\%$ ($P = 932$ kN).

As trajetórias de equilíbrio são apresentadas tanto para os efeitos isolados, na Fig. 6.42a: caso (b) CI e (c) FP, como para os efeitos combinados, na Fig. 6.42b caso (d) com CI + FP. Nessas figuras são representadas as situações com e sem TR.

Como já visto na seção 6.4, a CI é menos crítica que o FP para as estruturas deslocáveis. E os efeitos combinados são os mais críticos.



(a) Efeitos isolados, com e sem TR.



(b) Efeitos combinados, com e sem TR.

Figura 6.42 Trajetórias de equilíbrio do portal modificado.

A situação combinada, mostrada na Fig. 6.42b, é a que governa a análise avançada, onde os efeitos de FP + CI + TR acoplados geram o menor fator de carga de colapso. A magnitude do efeito da TR para esse exemplo, entretanto, não é expressiva (2%).

Através da Fig. 6.43a pode-se verificar a configuração final pré-colapso (com fator de escala 50). No diagrama de plasticidade Λ [%], representado na Fig. 6.43b, notam-se zonas plásticas à compressão nos pontos onde são previstas as RPs do mecanismo plástico de andar. Entretanto, não se atinge o limite de resistência, comprovando novamente que o colapso ocorre por flambagem inelástica.

Tomando agora a configuração com imperfeição geométrica mais crítica (Fig. 6.37b) para esse portal, incluindo os aspectos importantes já definidos ($\eta=0.3$), realiza-se então uma variação geral nos carregamentos H e P. Pode-se considerar que o parâmetro $\beta_H (= H/H_y)$ relaciona o momento de plastificação (formação do mecanismo de andar) M_p com a carga horizontal H, e que a carga P determina o axial N nas colunas, podendo ser relacionado à carga de escoamento na compressão N_y .

Através da análise avançada determina-se um novo diagrama $N/N_y \times M/2M_p$, apresentado na Fig. 6.44, similar ao da Fig. 6.27, já visto na seção 6.5 para o portal de Kanchanalai (1977). Na Tab. 6.38 são listados tanto os dados da curva de início do escoamento, considerando o efeito das imperfeições da configuração inicial, bem como da curva principal que representa a *superfície limite* obtida na análise avançada.

Essa curva foi denominada no presente trabalho por superfície limite porque corresponde a todos os estados limites desse portal, sujeito às cargas dadas, no seu plano de análise e dimensionamento (considerando a resistência e a estabilidade).

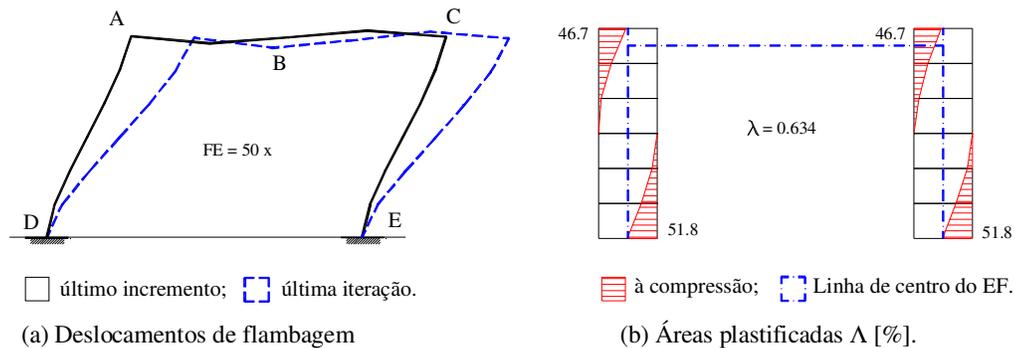


Figura 6.43 Configuração de colapso do portal modificado.

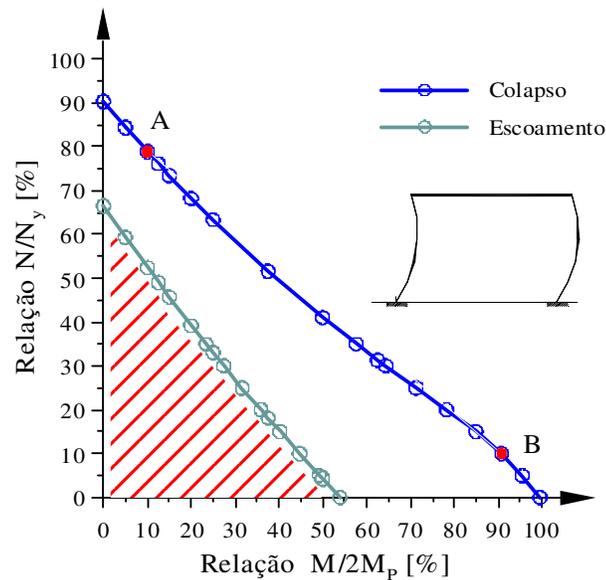


Figura 6.44 *Superfície limite* obtida na análise avançada do portal modificado.

Para pequenos valores de $\beta_M (= M/2M_p)$, o portal apresenta uma flambagem inelástica com pequena flexão. À medida que β_M cresce a flambagem começa a ser mesclada com uma plasticidade cada vez maior, e para valores superiores a 0.5 acontece uma plasticidade elevada com colapso por flambagem no final.

Quando se aproxima do extremo ($\beta_H = 2$, $P = 0$ e $\beta_M = 1$), apresenta-se o mecanismo de andar com RPs formadas na flexo-compressão (sem flambagem), como previsto na plasticidade clássica (ERP).

Deve-se lembrar primeiro, que nesse problema são formadas (pela teoria plástica clássica) 4 RPs, e por isso o fator adimensional dos momentos é $2M_p$. Assim, o comportamento do conjunto reduz à metade a influência do momento, em relação à análise de uma barra simples, cujo diagrama é dado apenas por N/N_y e M/M_p .

Nota-se também que ambas curvas indicadas (nesse diagrama) tendem a ficar mais linear que as similares obtidas na Fig. 6.27, da seção 6.5, tanto no escoamento como na carga limite. Isso significa que a relação entre $N/N_y \times M/(\nu M_p)$ está se aproximando do linear, sendo ν um coeficiente que define a quantidade de RP necessária para formar o mecanismo plástico de andar dividido pelo número de colunas (parâmetro $\nu = 4$ RPs para mecanismo de andar/2 colunas = 2).

Tabela 6.38 Superfície limite do portal modificado.

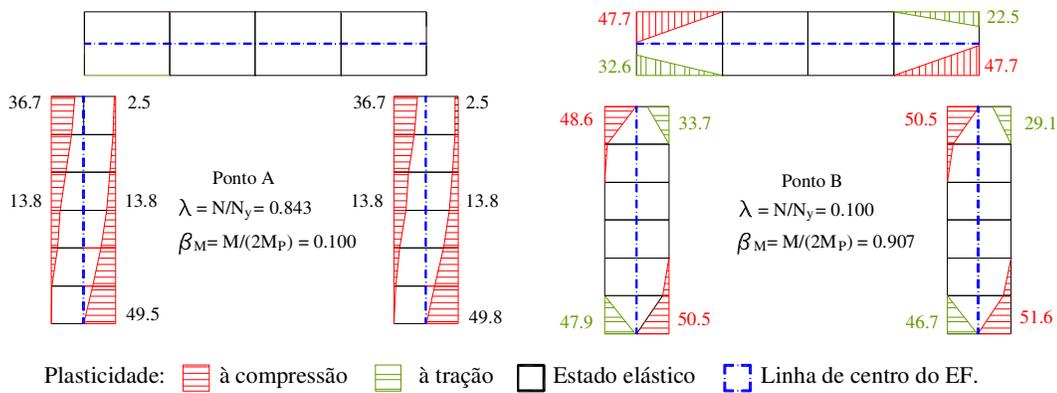
N/N_y	$M/2M_p$	N/N_y	$M/2M_p$
0.000	0.995	0.410	0.500
0.050	0.954	0.526	0.375
0.100	0.907	0.633	0.250
0.150	0.849	0.682	0.200
0.200	0.782	0.734	0.150
0.250	0.712	0.761	0.125
0.300	0.643	0.788	0.100
0.313	0.625	0.843	0.050
0.350	0.576	0.903	0.000

Note que no portal de Kanchanalai (1977) o valor do parâmetro é $\nu = 1$, então o diagrama foi realizado usando como fator adimensional $1 M_p$. Já a superfície limite do portal modificado foi definida com $\nu = 2$, então o fator adimensional agora é $2 M_p$, tendo o efeito de reduzir a magnitude da não-linearidade.

Como os valores de N estão relacionados com M , na medida que os efeitos $P\Delta$, $P\delta$, e indiretamente $M\phi$, estão participando ativamente em M , e que as TRs e a plasticidade vão reduzindo os valores do momento fletor efetivo M_{efet} que está atuando no sistema estrutural (percebido pelo mecanismo plástico), ou seja, pode-se escrever:

$$M_{efet}(TR, \epsilon_p) = M(TR, \epsilon_p) - (P\Delta + P\delta + M\phi), \tag{6.7}$$

onde se indica que M é função da TR e da plasticidade (ϵ_p), e que o M_{efet} perde uma parcela de efeitos de segunda ordem, que provocam a flambagem antes que apareça a formação do mecanismo de andar.



(a) Flambagem inelástica (b) Mecanismo com flexo-compressão

Figura 6.45 Fatias plastificadas Λ [%] no colapso.

Para se entender melhor o comportamento que esse diagrama descreve, são mostrados nas Fig.s 6.45a,b os diagramas de plasticidade de dois pontos (A e B) próximos aos extremos da superfície da Fig. 6.44 de onde se pode afirmar:

- a. o ponto (A) como ilustra a Fig. 6.45a, possui pequeno β_M , e assim existe a predominância da flambagem inelástica no colapso. Com isso as ZPs são praticamente idênticas em ambas colunas, sendo apenas de compressão e duplas, se estendendo ao longo de toda altura, não ocorrendo ZPs na viga;
- b. o ponto (B) como mostra a Fig. 6.45b, na extremidade da curva próxima ao valor $\beta_M (= M/2M_p) = 1$, (N/N_y tende a zero), mostra que o comportamento nesse trecho da superfície é notoriamente não-linear e ressalta os efeitos da plasticidade formando o mecanismo de andar, contendo ZPs de tração e de compressão (as últimas um pouco maiores devido ao esforço normal N , que pode ser pequeno mas não é desprezável), como mostra a Fig. 6.45b.

Enquanto no primeiro caso a plasticidade se desenvolve em ZPs apenas nas colunas, no último caso as ZPs também abrangem a viga, com um comportamento mais próximo de um conjunto.

É importante verificar que todo esse comportamento é influenciado pela *configuração inicial*. Portanto, os valores $P\Delta$ e $P\delta$ irão contribuir significativamente quando o valor de P for expressivo. Assim, esses efeitos serão mais importantes se provocam acréscimos de momentos, do que nos outros esforços (N, Q), e principalmente, ao ampliar cada vez mais os deslocamentos (u, v, θ), no sentido de tornar a configuração inicial mais próxima da configuração de colapso. (Observe que a contribuição de $M\phi$ é pequena, e tende apenas a reduzir a tendência à formação do mecanismo plástico de andar).

Concluindo: *se as imperfeições geométricas são dispostas de tal forma a favorecer o aparecimento de efeitos $P\Delta$ e $P\delta$, que aceleram a degradação da rigidez da estrutura na direção do colapso, o fator de carga tende a ser minimizado.*

Essa é a mais importante conclusão (corolário) deste trabalho e servirá de base para a proposta de um teorema a ser apresentada no próximo capítulo.

Por fim, é desejo do autor desta dissertação que esses exemplos, cuidadosamente selecionados e com os dados claramente identificados, possam constituir um banco de provas mínimo, que possa ser também utilizado por outros pesquisadores e engenheiros do Brasil, com o intuito de comprovar suas formulações e qualificarem suas análises inelásticas de segunda ordem, de forma a realizar uma análise avançada no plano (segundo as definições de Chen e White, 1993).

6.8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AISC, 1978. *Manual of steel construction - Specification for structural steel buildings*. 8^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC ASD, 1989. *Allowable stress design - Specification for structural steel buildings*. 9^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC LRFD, 1986. *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 1^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC LRFD, 1993. *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. 2^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AS4100, 1990. *Steel Structures*. Standards Association of Australia, Sidnei, Austrália.
- Avery, P; e Mahendran, M; 2000. Distributed plasticity analysis of steel frame structures comprising non-compact sections. *Engineering Structures*. Vol. 22 2000, pp. 901 a 919.
- Batterman, RH; e Johnston, BG; 1967. Behavior and maximum strength of metal columns. *ASCE J. Struct. Division*. Vol. 93 (4) 1967, pp. 205 a 230.
- Bild, S; e Trahair, NS; 1989. In plane strengths of steel columns and beam-columns. *J.S.C. Research*. Vol. 13 (1), 1989, pp. 1 a 22.
- Bjorhovde, R; Brozzetti, J; Alpstein, GA; e Tall, L; 1972; Residual stresses in thick welded plates. Welding research supplement. *AWS Welding Journal*. Vol. 8, pp. 392 a 405.
- Chan, SL; e Chui, PPT; 1997. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept. *Engineering Structures*. Vol. 19 (8) 1996 pp. 628 a 636.
- Chan, SL; e Chui, PPT; 2000. *Non linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Elsevier, Oxford.
- Chan, SL; e Zhou, ZH; 2004. Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member: I-one hinge along member, II- three hinges along member. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 130 (4) 2004 pp. 538 a 553.
- Chen, WF; Goto, Y; e Liew, JYR; 1996. *Stability Design of Semi-rigid Frames*. John Willey and Sons, Nova Iorque.
- Chen,WF; e White, DW; 1993. *Plastic hinge based methods for advanced analysis and*

- design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art*. SSRC, Bethlehem, pp 229.
- Chen, WF; e Sohal, I; 1995. *Plastic design and second-order analysis of steel frames*. Springer-Verlag, Nova Iorque.
- Crisfield, MA; 1991. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 1. Willey & sons, Nova Iorque, pp. 1 a 20.
- Clarke, MJ; 1994. em Chen, WF; e Toma, S; *advanced analysis of steel frames, theory software and applications*. CRC Press, Boca Raton.
- Cook Jr., NE; e Gerstle, KH; 1985. Load history effects on structural members. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 111 (3), pp. 628 a 639.
- Disque, RQ; 1973. Inelastic K-factor for column design. *AISC Engineering Journal* 2/4 pp. 33 a 35.
- Eurocode 3, 1992. *CEN EUROCODE 3 Design of Steel Structures*. Vol. Part 1, European Committee for Standardization, ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.
- ECCS, 1984. *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints*. Technical working group 8.2 Publicação 33. European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.
- El-Zanaty, MH; Murray, DW;. e Bjorhovde, R; 1980. Inelastic behavior of multi-story steel frames. *Structural Engineering Report*. Vol. n. 83, Univ. Alberta, Canadá.
- Foley, CM; 2001. Advanced analysis of steel frames using parallel processing and vectorization. *Computer-aided Civil and Infrastructure Eng*. Vol. 16, pp. 305 a 325.
- Galambos, TV; 1982. *Structural members and frames*. Depto. Civil Engineering, Un. Minnesota, Mineapolis.
- Galambos, TV e Ketter, RL; 1957. Em Columns under combined bending and thrust. *Transations ASCE*. Vol. 126 (1), (1961), pp. 1 a 25.
- Galambos, TV; e outros, 1998. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 5ª Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Hajjar, JF *et al.*, 1997. *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for american steel design*. ASCE, Nova Iorque.
- Higgins, TR *et al.*, 1971. *Plastic Design in Steel - A guide and commentary*. ASCE WRC. *Manuals and reports on engineering practice*. Vol. 41, Nova Iorque.

- Hsieh, SH; Deierlein, GG; McGuire, W; e Abel, JF; 1989. Technical manual for CU-Stand. *Struct. Eng. Report*. Vol. 13, Cornell Univ., Ithaca, Nova Iorque.
- Kanchanalai, T; 1977. The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames *AISI Project 189 Rep. 2*. Univ. Texas, Austin, Civil Eng./Structural Research Lab.
- Kim, SE; e Lee, DH; 2002. Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames. *Engineering Structures*. Vol. 24 pp. 735 a 744.
- Kim, SE; Kim MK; e Chen, WF; 2000. Improved refined plastic hinge analysis accounting for strain reversal. *Engineering Structures*. Vol. 22 pp. 15 a 25.
- Lavall, ACC; 1996. *Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal*. Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP, Brasil.
- Liew, JYR; 1992. Em Chan, SL; e Chui, PPT; 1997. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept. *Engineering Structures*. Vol. 19 (8) 1996 pp. 628 a 636.
- Liew, JYR; White, DW; e Chen, WF; 1993. Second-order refined plastic-hinge analysis for Frame Design. Part I-II. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 119 (11), pp.3196 a 3237.
- Liew, JYR; White, DW; e Chen, WF; 1994. Notional load plastic-hinge method for frame design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (5), pp. 1434 a 1454.
- Machado, FCS; 2005. *Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Neal, BG; 1977. *The Plastic Methods of Structural Analysis*. 3^a Ed., Chapman and Hall, Londres, RU.
- Pimenta, RJ; 1996. *Proposição de uma curva de flambagem para perfis I soldados formados por chapas cortadas à maçarico*. Dissertação de Mestrado, EEUFMG, Belo Horizonte/MG, Brasil.
- Rocha, G; (2000). *Estratégias de incremento de carga e de iteração para a análise não-linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.

- Teh, LH; e Clarke, MJ; 1999. Plastic-zone analysis of 3D steel frames using beam elements. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 125 (11) 1999, pg. 1328 a 1337.
Discussion : Xu, Y; Liang, S *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 128 (9) 2002, pp. 1236 a 1239.
- Torkamani, MAM; e Sonmez, M; 2001. Inelastic large deflections modeling of beam-columns. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 123 (9) 1997, pp. 1225 a 1235.
- Vogel, U; 1985. Calibrating Frames. *Stahlbau.* Vol. 10 1985, pp. 295-301.
- Weston, G; Nethercot, DA; Crisfield, MA; 1991. Lateral buckling in continuous composite bridge girders. *The Structural Engineer.* Vol. 69 (5), 1991, pp. 79 a 87.
- White, DW; e Hajjar, JF; 1991. Application of second-order elastic analysis in LRFD-Research to practice. *AISC Engineering Journal* 4/4 pp. 133 a 148.
- White, DW; 1993. Plastic hinge methods for advanced analysis of steel frames. *JSC Research.* Vol. (9) 1993, pp. 121 a 152.
- Ziemian, RD; (1992). Em White, DW; e Chen,WF; 1993. *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art.* SSRC, Bethlehem pp. 299.
- Zhou, ZH; e Chan, SL; 1996. Refined second-order analysis of frames with members under lateral and axial loads *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 122 (5) 1996, pp. 548 a 554.
- Zhou, SP; Duan, L;Chen, WF; 1990. Comparison of Design Equations for Steel Beam-Columns. *Structural Engineering Review.* Vol. 2 (1) pp. 45 a 53.

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
7.1	Introdução	221
7.2	Conclusões	221
7.2.1	Análise Avançada	221
7.2.2	Método da Zona Plástica	224
7.2.3	Técnica das Fatias	228
7.2.4	Aspectos Importantes	229
7.2.5	Conceito Estrutural	230
7.3	Aspectos Críticos	235
7.4	Continuação da Pesquisa	238
7.5	Referências Bibliográficas	240

7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as conclusões, as críticas, as possíveis melhorias e finalmente inserções para a continuação desta pesquisa.

Na seção 7.2 procura-se enfatizar pontos já mostrados ao longo deste trabalho, culminando com a apresentação de uma proposta de teorema.

Os limites e falhas naturais contidas em qualquer processo de análise estrutural numérica, oriundos tanto das simplificações como dos modelos numéricos, e também alguns comentários sobre os procedimentos são apresentados na seção 7.3.

Em seguida, na seção 7.4, procura-se vislumbrar novos caminhos para a continuação deste trabalho e outras contribuições que podem ser desenvolvidas nesta linha de pesquisa.

As referências bibliográficas deste capítulo estão na seção 7.5.

7.2 CONCLUSÕES

As conclusões, algumas das quais já expressas em outras partes deste trabalho, serão apresentadas a seguir reunidas por tópicos relacionados às partes principais dessa dissertação, a saber:

- a. análise avançada;
- b. zona plástica;
- c. método das fatias;
- d. aspectos importantes; e complementando,
- e. conceito estrutural.

7.2.1 Análise Avançada

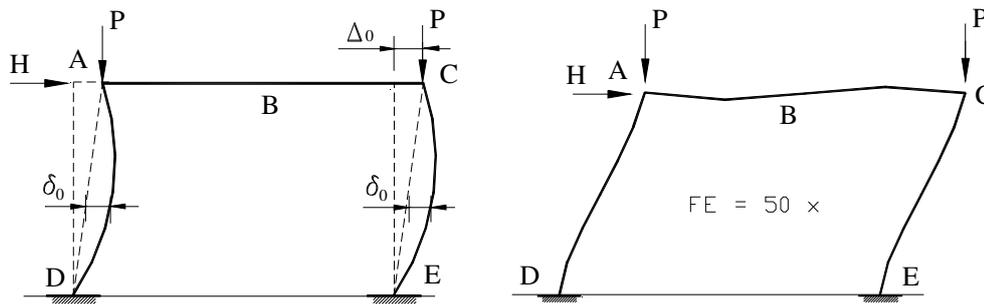
A análise avançada mostra circunstâncias do cálculo estrutural imaginadas raramente na prática. A procura de uma configuração geométrica inicial, com as imperfeições incluídas, foi levada às últimas conseqüências no final do capítulo 6 (na seção 6.7). Foram analisadas várias configurações com imperfeições, com o firme propósito de explorar todas as possibilidades.

Num escritório de projetos, evidentemente, não seria possível realizar todas essas variações de análise, tendo em vista o custo e o prazo das obras.

Surge daí, naturalmente, a necessidade de se definir um roteiro de cálculo que permita ao profissional de engenharia executar, futuramente, a sua análise avançada de forma objetiva. Propõe-se então um roteiro que poderá ser empregado nessa finalidade, que é composto das seguintes etapas:

- a. fazer o lançamento da estrutura ou a esboçar a concepção estrutural;
- b. realizar um cálculo preliminar elástico de primeira ordem, para uma visão inicial geral do comportamento estrutural e fazer o pré-dimensionamento (estimar perfis);
- c. executar um cálculo elástico de segunda ordem, com o objetivo de obter-se a deformada da estrutura, ou configuração deslocada básica, e avaliar se é necessário desenvolver um modelo inelástico (verificar se ocorre plasticidade e se isso afeta o comportamento da estrutura);
- d. com base nos resultados anteriores, para cada hipótese, deverá o engenheiro através também da sua experiência, dispor as imperfeições geométricas que sejam favoráveis à obtenção da configuração de colapso;
- e. realizar a análise inelástica de segunda ordem e determinar a configuração de colapso, ajustando em seguida as imperfeições geométricas de forma a procurar reproduzir condições para que essa geometria inicial favoreça o aparecimento da configuração final, ajustando e voltando ao passo (e) quando acontecer a introdução de modificações ou alterações de comportamento;
- f. por fim, executar a análise avançada e verificar assim o dimensionamento, ou seja, introduzir todos os aspectos importantes (CI + FP + TR) na análise inelástica de segunda ordem para determinar o fator de carga ou estado limite;
- g. analisar os resultados, ajustar perfis e materiais, retornando ao passo (d) ou (e) ou (f), conforme necessário;
- h. verificar adequação ao uso (deformações sob carga de trabalho) e condições complementares, seguindo para o restante do cálculo.

Nota-se que a configuração deformada de flambagem inelástica indicada na Fig. 7.1b sugere a adoção da configuração inicial com as imperfeições indicadas na Fig. 7.1a. Portanto, não seriam necessárias realmente tantas análises quanto as desenvolvidas. De fato tais análises serviram apenas para comprovar tacitamente o que agora é proposto.



(a) Configuração inicial com imperfeições

(b) Configuração de colapso

Figura 7.1 Configurações do portal de Zhou *et al.* (1990) modificado.

É importante lembrar que devem ser feitas as verificações fora do plano e garantir o atendimento às diversas exigências das normas e do próprio método, como as expressas nas seções 3.3, 3.4 e 4.4.

Pode-se concluir que a análise avançada é capaz de determinar com segurança a capacidade de uma estrutura na medida em que os problemas de banco de provas, tanto os aqui resolvidos como outros, de maneira geral, foram ensaiados em laboratórios, representando assim valores com extrema precisão, o que também qualifica os resultados do presente trabalho.

Deve-se esperar que ao longo dos próximos anos, com o natural desenvolvimento tecnológico, a análise avançada ganhe uma normalização própria e passe a ser empregada de maneira efetiva no projeto. Assim, uma das razões particulares desta dissertação, que é a divulgação e a apresentação dessa análise, fica cumprida.

Ao considerar os efeitos $P\Delta$, $P\delta$ e $M\phi$ na análise, e não através de uma forma indireta, como em curvas de coluna, equações de interação e cargas nocionais; consegue-se entender melhor o comportamento da estrutura. Mesmo em simples portais, como os analisados, pode-se verificar:

- o efeito de uma carga horizontal H amplificando o $P\Delta$, no portal modificado com FP , na parte final da seção 6.7;
- a curvatura das barras com $P\delta$, na estrutura travada de Zhou *et al.* (1990), no início da seção 6.7; e
- o efeito $M\phi$, o qual se supõe explicar pequenas diferenças nos resultados do portal de Kanchanalai (1977) da seção 6.5, ou seja, pode-se concluir que esse efeito também deve ser considerado.

Foi verificado pelos vários testes, nem todos necessariamente incluídos no corpo deste trabalho, que a superfície de plastificação do AISC LRFD (1993) representa um limite que raramente foi superado. Por outro lado, isso pode estar vinculado ao diagrama de tensões residuais (TR) de Galambos e Ketter (1957) empregado em vários exemplos.

Deve-se notar que a última estrutura analisada, Fig. 6.37a, sob a qual são feitas várias análises, representa um portal com pequena carga horizontal e grande carga vertical, onde o colapso acontece por flambagem inelástica. Com a presença de momentos, as seções dos perfis Is com plasticidade elevada se transformam em Ts, ou seja, a plasticidade está ocorrendo na alma, que possui TR constante, isso então pode de alguma forma influenciar esses resultados.

Em todas as análises, os efeitos secundários deram origem a importantes reduções na capacidade da estrutura, que de outra forma não seriam avaliados. Também propiciam um caminho para o aparecimento da configuração de colapso.

7.2.2 Método da Zona Plástica

O método da zona plástica permite compreender como a plasticidade evolui de forma gradual numa peça, como foi mostrado nos diagramas de plastificação de alguns exemplos do capítulo 6.

Agora é importante fazer um resumo das circunstâncias que envolvem o colapso das estruturas, relacionando com as premissas de sua configuração inicial.

Se uma estrutura é composta de barras esbeltas, a natureza do colapso será uma flambagem elástica. A plasticidade, caso se manifeste, é de carácter local, não modifica o comportamento ou a carga limite encontrada, como foi visto na flambagem elástica de colunas com $\lambda_c \geq 1.5$, na seção 6.3, onde a flambagem é elástica, mas acontecem regiões plásticas nas colunas. Talvez nessas condições, a análise avançada poderia até ser uma análise elástica de segunda ordem, como descrita na seção 2.4, incluindo as imperfeições geométricas estipuladas, baseando-se na deformada elástica mesmo.

Por outro lado, se a estrutura não é esbelta, a plasticidade pode modificar o seu comportamento, já que a carga de flambagem elástica será tão elevada que dificilmente é atingida sem que antes ocorram outros fenômenos.

Entra-se então no contexto desta dissertação, e assim podem-se descrever as seguintes situações nos portais:

- a. quando são aplicadas cargas na viga e ali se formam ZPs, sendo que as colunas sofrem pequenas ou nenhuma plastificação, então o colapso acontece por formação mecanismo plástico de viga, que é previsto na plasticidade clássica (PC). Isso sucede no portal com bases rotuladas de Zhou *et al.* (1990), visto na seção 6.7;
- b. quando as cargas verticais não são significativas, predominando cargas horizontais que provocam o tombamento do portal, então as ZPs se distribuem entre a viga e as colunas, formando um mecanismo plástico de andar à flexo-compressão, sem flambagem, como no caso do portal modificado, com M/M_p próximo de 1, (da subseção 6.7.1, Tab. 6.28);
- c. quando os esforços normais nas colunas (provocado por cargas verticais) permitem que os efeitos conjuntos descritos nos itens (a) e (b) anteriores não provoquem a flambagem, pode acontecer a formação do mecanismo plástico combinado à flexo-compressão. Isso quase ocorre no portal com bases engastadas de Zhou *et al.* (1990). Ambas as bases plastificam naquele portal, mas nenhuma chega ao limite de resistência. Por exemplo, se fossem aplicadas cargas P diferentes nas colunas, de tal maneira que apenas uma das bases engastadas apresenta-se ZP, o colapso aqui descrito aconteceria; e
- d. quando os esforços axiais nas colunas são significativos, o colapso é por flambagem inelástica, tendo ou não plasticidade associada. Em alguns casos a plasticidade alonga o traçado da trajetória de equilíbrio (curva fator de carga λ versus deslocamento no topo u), combinando-se à flambagem, principalmente no trecho intermediário da superfície limite da Fig. 6.44 da subseção 6.7.7.

As situações anteriormente descritas para os portais simples correspondem à situações de sistemas estruturais de maior porte também. Note que as situações descritas nos itens (a), (b) e (c) são típicas da formação de mecanismo plástico, nas quais a influência das imperfeições geométricas é menor.

Nesses casos, em geral uma pequena melhoria do dimensionamento da viga com maiores plastificações, inibe que os itens (a) e (c) governem o problema.

A situação do item (b) é basicamente de um sistema estrutural com elevadas cargas horizontais (exemplo: pórtico de travamento), o que também não é usual. Ao se desenvolver a concepção de uma estrutura para resistir a esses tipos de esforços, sugere-se a adoção de sistemas contraventados (menos deslocáveis e mais econômicos).

Portanto, considerando a prática do projeto, a situação predominante é a do item (d), que foi de fato o tipo de estrutura avaliado no presente trabalho, ou seja, o colapso é determinado por flambagem inelástica do conjunto, ou parte do mesmo.

Em peças sujeitas a cargas de compressão maiores, com tensões residuais também elevadas (exemplo: perfis soldados), a influência dos aspectos importantes (CI, FP e TR) parece ser mais relevante, razão para se utilizar o método da ZP e expressar alguma preocupação no uso de métodos de plasticidade concentrada nesses problemas, e até recomendar pesquisas complementares avaliando esse tema.

Foi mostrado que é possível, em alguns casos, adotar o método das cargas nocionais (ERP-CN) para aproximar circunstâncias relativas à curvatura inicial (CI) e fora de prumo (FP), majorando a última imperfeição para englobar a primeira (subseção 6.4.3, Fig. 6.21). Esse procedimento pode causar certo superdimensionamento, por outro lado facilita bastante a análise. Entretanto, as restrições indicadas nas normas parecem justificadas.

Embora o método ERP refinado (ERP-R) possa capturar os efeitos de segunda ordem com menor número de EFs; os modelos deveriam usar pelo menos 4 EFs por barra, com o objetivo tanto de capturar o efeito $P\delta$, como também melhorar a resposta (mais próxima de ZP).

Os modelos ERP com seção montada (ERP-M), dentre os que avaliam a plasticidade concentrada, mostraram um comportamento mais pretensioso, porém não é o objetivo desse trabalho comparar métodos. Deve-se ressaltar, entretanto, que aspectos encontrados na ZP merecem um estudo mais cuidadoso por parte dos pesquisadores que procuram simplificar o fenômeno da plasticidade. Alguns pontos devem ser apreciados:

- a. os métodos ERP deveriam considerar o traslado dos CGs das seções plásticas. Conforme Kim e Chen (1996), os resultados produzidos por El Zanaty *et al.* (1980) não consideram isso. A parte de ensaios desse último trabalho é importante, mas os resultados obtidos pela formulação não deveriam ser usados pelos pesquisadores como banco de provas;

- b. a distribuição da plasticidade em zonas e sua forma ao longo da barra (EFs) são variáveis, o que pode interferir no comportamento do modelo. Pode acontecer também de não ser avaliado adequadamente, quando é aplicado um método de plasticidade concentrada (ERP);
- c. é discutível a proposta de Chan e Chui (1997, 2000) que a alma se encarregue de absorver todo o esforço normal, pois isso depende da distribuição de TRs adotada nas seções, que podem favorecer ou não a plastificação acelerada da alma. Nos exemplos empregando o modelo de TRs de Galambos e Ketter (1957), na maioria das vezes, as abas já apresentavam uma plasticidade elevada, quando as almas começaram a escoar.

Assim, é sugerido que os refinamentos precisam de fórmulas ou ajustes para que possam acompanhar o que está sendo mostrado por modelos de ZP. A degradação da rigidez varia ao longo da barra (e dos vários EFs), e não apenas nas extremidades de uma única barra. Parece que o caminho mais simples seria subdividir as barras, embora essa subdivisão, por outro lado, signifique perder um pouco dos atrativos da abordagem com a plasticidade concentrada.

Também é de destaque o papel da TR, na análise com ZP. É muito importante perceber que os diagramas de TRs são hipotéticos, ou seja, nas peças reais alguns pontos podem atingir valores de tensões muito elevados, durante o seu trabalho estrutural. Ao empregar modelagens mais sofisticadas de TR, como a de Bild e Trahair (1989), a dupla linear da ECCS (1984), entre outras, nota-se comportamentos diferentes, em que a plasticidade cria duas e em alguns casos até três ZPs ao longo da barra, nas mesmas seções, como no portal de Vogel (1985) da seção 6.6. Isso significa que ao simplificar os modelos, podem-se cometer enganos de apreciação induzidos pela falta de informação sobre o comportamento no interior da(s) barra(s).

Por outro lado, embora não seja objetivo desta dissertação, ao utilizar as ZPs, pontos potenciais de ocorrência da flambagem local ficam evidenciados, permitindo assim uma atitude de precaução do engenheiro.

Aliado à análise avançada, o método da ZP provou que nos dias de hoje, é necessário um empenho por parte dos fabricantes de computadores e sistemas operacionais para que se possam disponibilizar recursos tanto nas máquinas quanto nas linguagens, de forma que a ZP possa sair do meio acadêmico, para o uso no projeto.

Ao contemplar todos os recursos que as máquinas hoje já oferecem, pode-se prever que muito em breve isso poderá ser realidade.

7.2.3 Técnica das Fatias

A técnica das fatias, do ponto de vista conceitual, já provou seus méritos; porém ao se fazer simplificações e ao passar do puramente matemático infinitesimal para o campo numérico: “*formulações menos robustas costumam apresentar inconsistências*”, como alertaram Meek e Loganathan (1990). O que justificou as divergências encontradas e deram origem as modificações introduzidas nesta dissertação.

Um aspecto que não foi indicado antes se refere ao limite de uso da formulação numérica desta dissertação às estruturas sujeitas ao regime de pequenas deformações (pequenos deslocamentos). Ficou claro que os bons resultados obtidos estão ligados ao fato de serem abordados problemas dessa categoria. Fora do contexto desta dissertação, constatou-se, por exemplo, que para o problema do galpão de Vogel (1985), com um modelo bem similar aos empregados neste trabalho, os resultados obtidos não se apresentaram tão acurados.

Por outro lado, a contribuição do presente trabalho denominada *integração iterativa dos esforços normais* conseguiu obter resultados surpreendentemente bons, tendo em vista a simplicidade do processo introduzido.

A coerência dos resultados é demonstrada pelo número de fatias plastificadas que é igual em seções adjacentes, sujeitas aos mesmos esforços. Como essas fatias são avaliadas em 2 EFs distintos, com diferentes posições e relações de cortantes, esforços axiais, etc; era de se supor que isso não acontecesse. Melhor ainda, as deformações capturadas por fibras adjacentes de EFs distintos, muitas vezes também são idênticas ou muito próximas (exemplo: problema do portal de Vogel, 1985; ver apêndice I).

Isso leva a crer que os bons resultados deste trabalho são fruto tanto do acerto dessa contribuição, como também comprovam a coerência e exatidão de todo o restante principalmente nas considerações de translado do CGs, nas avaliações das propriedades, tensões e deformações do trabalho de Lavall (1996).

7.2.4 Aspectos Importantes

Ficou demonstrada neste trabalho a importância da consideração destes aspectos: curvatura inicial, fora de prumo e tensões residuais (CI, FP e TR), embora talvez o portal de analisado no final da seção 6.7 (de Zhou modificado) não tenha sido tão sensível quanto desejado.

A curvatura inicial sozinha não pareceu tão importante, porém quando conjugada ao fora de prumo, mostrou que precisa ser considerada, e mesmo nas estruturas aporticadas seu efeito pode surpreender.

O fora de prumo fica ressaltado na presença de cargas combinadas verticais e horizontais. É sempre importante, embora não tenha sido abordado aqui por causa do espaço, verificar a movimentação horizontal do andar, expressa agora no sentido do estado de uso, ou seja, um deslocamento lateral excessivo.

Ficou claro que a plasticidade reduz a rigidez das colunas, e em consequência, a estrutura fica mais flexível, o que leva a uma majoração dos efeitos secundários ($P\Delta$ e $P\delta$) e majoração de esforços (não apenas dos momentos). Considerando os estudos realizados no portal modificado, da subseção 6.7.7, houve a predominância do colapso determinado por flambagem inelástica, tendência essa que deve se estender às outras estruturas.

As tensões residuais, na forma como foram abordadas nesta dissertação, participam tanto no comprometimento da estrutura de forma antecipada, por causa do início do escoamento, como na expansão das ZPs, que assim deixam de ser algo num ponto localizado (RP) para se estender por vários EFs. Logo, a presença de uma maior quantidade de EFs é necessária para avaliar essa extensão da ZP de forma mais real.

Pode-se melhor esclarecer essa conclusão, reproduzindo em seguida alguns diagramas de plasticidade do portal analisado na subseção 6.7.7, na situação pré-colapso, onde se verificam diferentes distribuições de zonas plásticas, como mostrado na Fig. 7.2.

Mostrou-se que a forma do diagrama de TR algumas vezes é menos crítica do que a relação η . Por isso, surge a recomendação de que os processos de fabricação procurem diminuir as TRs nas peças. Talvez reduzir a elevada quantidade de soldas e de cortes ao maçarico nas peças. Por outro lado, podem-se usar processos de recuperação ou de alívio das tensões, principalmente nas regiões próximas às soldas (normalização).

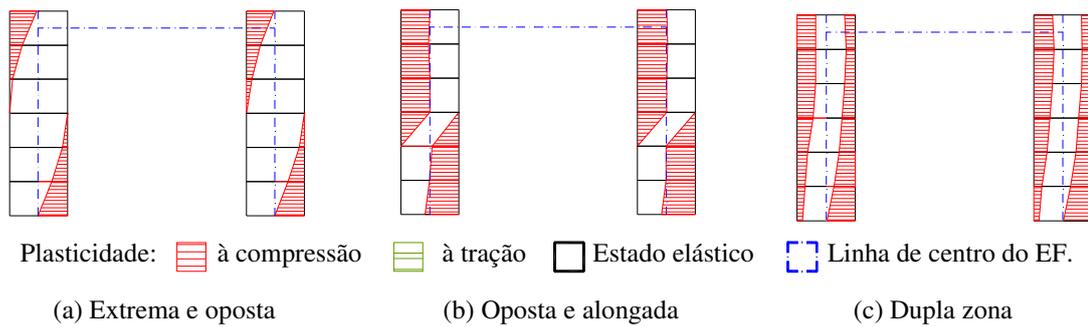


Figura 7.2 Distribuição das zonas plásticas.

7.2.5 Conceito Estrutural

Ao longo de todas essas análises que envolveram alguns cálculos processados inúmeras vezes, ficou claro que o colapso por formação de mecanismo plástico, do ponto de vista de estruturas com colunas robustas (pequenos λ_c), é bastante improvável que aconteça nas estruturas reais.

Isso porque tal mecanismo de plastificação só surge na quase ausência de esforços axiais de compressão. Na prática, as cargas axiais do sistema estrutural não são tão reduzidas assim. É possível que apareça uma plastificação crescente até acontecer a flambagem inelástica. Às vezes, os fenômenos parecem entrelaçados, mas mesmo assim, com *uma carga axial pequena haverá a tendência para que ocorra a flambagem inelástica antes da formação do mecanismo plástico de colapso*. As exceções podem ser:

- a. casos já citados anteriormente; e
- b. casos nos quais se incluem as ligações, cujo comportamento não foi avaliado neste trabalho, visto não ser objetivo do mesmo (supõe-se que pode haver modificações de comportamento).

No portal modificado da subseção 6.7.7 quando $0 \leq H \leq 0.25 H_y$, tem-se a condição onde parece que a plasticidade serve apenas para preparar a estrutura para a flambagem. Para valores maiores de H , o efeito parece se combinar, reduzindo a trajetória de equilíbrio, porém ainda manifestando flambagem. O mecanismo plástico de andar só aparece para valores elevados de H (próximos de $2H_y$).

O estado de plastificação das barras varia, conforme as diversas imperfeições introduzidas nos modelos, inclusive a ordem de formação dessas ZPs.

Proposta de um Teorema

Deseja-se agora, avaliar o comportamento genérico das estruturas, baseando-se nos portais já analisados, que terão o colapso provocado pela flambagem inelástica.

A idéia é apresentar um conceito mais amplo: no sentido de que a carga de colapso tem pequena variação, na medida em que representa a energia que é gasta para levar a estrutura da configuração inicial, com imperfeições impostas, à configuração de flambagem inelástica, que representaria um estado único, para aquela circunstância de carregamento.

Considerando uma dada estrutura, há situações em que o fator de carga de colapso é maior porque as imperfeições iniciais introduzidas no modelo opõem-se à movimentação da estrutura na direção da configuração de flambagem. Por outro lado, existem imperfeições que permitem a estrutura atingir a configuração de flambagem mais rapidamente, ou seja, requerem uma menor energia de deformação (menores cargas) e possuem portanto maior risco estrutural. A função do calculista é procurar determiná-las e assim estabelecer as condições necessárias de segurança.

Portanto, apresenta-se agora uma proposta de teorema, *definindo a existência de um estado de flambagem inelástica, para o qual todas as configurações iniciais convergem, estado esse que independe da trajetória (histórico do carregamento), e as diferenças encontradas nos fatores de cargas de colapso e esforços correspondentes, representam apenas uma medida de como a configuração inicial favorece ou não a estrutura poder atingir esse estado final.*

Chegando-se a esse estado, nenhum acréscimo de carga é possível, e a estrutura entra na conhecida parte descendente da trajetória, que levará à ruína. Por esta razão, é estabelecido como condição limite, o ápice da trajetória.

Esta condição limite é determinada por uma *superfície limite*, como a representada na Fig. 6.44. Para ser atingido esse estado de deformações, partes diferentes da estrutura podem sofrer plasticidade, dependendo da configuração inicial e das fontes de energia de deformação (cargas).

Pode-se construir um portal com a coluna engastada-livre de Hajjar *et al.* (1997) da seção 6.5, colocando-se uma viga inextensível ($A_g = \infty$), como ilustrado na Fig. 7.3a. Por conseqüência, a configuração de colapso encontrado seria o da Fig. 7.3b.

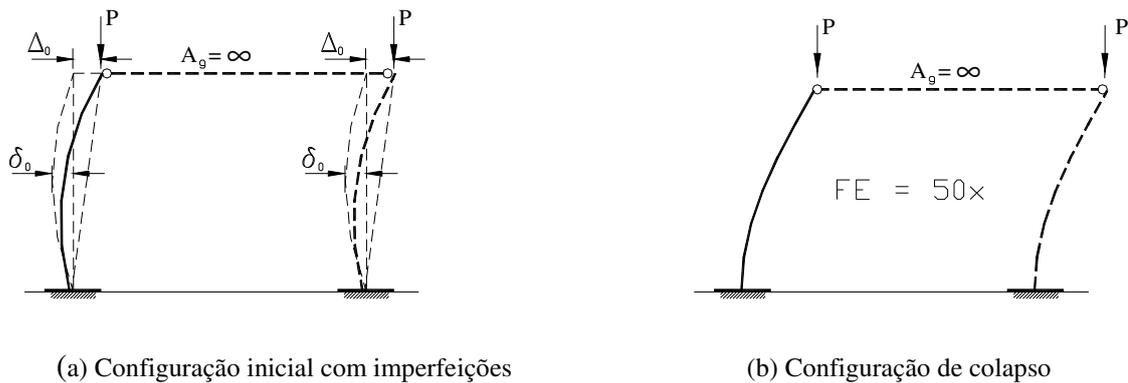


Figura 7.3 Portal formado com a coluna engastada-livre de Hajjar *et al.* (1997).

Comparando com a Fig. 7.1ab, nota-se claramente que a forma da flambagem inelástica é diferente, e que as configurações iniciais que obtiveram os menores valores da carga limite (em todas as possíveis), foram exatamente as que possuem uma forma geométrica que reproduz aproximadamente a da configuração de colapso.

Pode-se prever que uma ligação pode modificar esse comportamento, na proporção em que as configurações iniciais e de colapso dos portais mostrados, com a viga rigidamente ligada ou com a viga rotulada, são muito diferentes (!)

As partes menos resistentes geometricamente tendem a entrar em plastificação de forma mais abrupta, sendo as últimas a se formar na trajetória de equilíbrio, e com mínimos passos de carga. Já as partes mais resistentes consomem mais energia, são aonde a plasticidade manifesta-se primeiro e onde o processo é mais intenso.

Dessa forma, não se deve considerar as partes que escoam primeiro necessariamente como as “*mais fracas*”, e sim como as que apresentam maiores dificuldades ao estabelecimento da configuração de flambagem de parte ou de todo o conjunto da estrutura.

E às vezes, as imperfeições tanto favorecem numa dada direção (que resulta na configuração de flambagem), quanto impedem na outra direção (configuração de flambagem na direção oposta). Isso para estruturas geometricamente simétricas.

É importante também salientar aqui, que estruturas simétricas tendem a apresentar pontos de bifurcação do equilíbrio em configurações assimétricas (Silveira, 1995) visto que existem pequenas diferenças que transformam a suposta simetria numa irrealdade.

As tensões residuais servem tanto para iniciar mais rapidamente o processo de plastificação, como aproximar o estado final do colapso, tornando a trajetória de equilíbrio mais horizontal, num trecho maior, porém com um deslocamento final menor e carga de colapso menor, do que quando não é considerada. À medida que η cresce, a trajetória aumenta, porque costumam fechar as ZPs nos pontos onde remanesce a tração.

Assim, pretende-se enunciar essa proposta de teorema da seguinte forma:

a configuração de flambagem inelástica de uma estrutura com colunas robustas, sujeita a um dado carregamento, corresponde a uma configuração geométrica com imperfeições iniciais de aspecto similar, na qual é necessário o menor valor do fator de carga λ para atingir o colapso que corresponde ao aparecimento de singularidade na MRG (pivô).

Portanto o fator de carga de uma dada configuração geométrica, com quaisquer imperfeições, é uma medida de quanto a estrutura está próxima ou não do colapso. Isso indica que o fator de colapso (bem como esforços, tensões, deformações) é variável, mas a configuração de flambagem para aquele carregamento não. E assim, todas as trajetórias de equilíbrio de configurações com imperfeições, tendem a definir um único estado de flambagem inelástica, para um dado carregamento.

Isso se fundamenta nas pesquisas de von Kármán em 1909, que deram origem às curvas de deflexão de colunas, desenvolvidas por Chwalla (1934) ao estudar as barras à flexo-compressão (Higgins *et al.*, 1971).

No regime elástico, isso era definido por um ponto de bifurcação do equilíbrio. No regime inelástico ocorre o mesmo, porém com valores bem inferiores.

A deformada elástica não corresponde a essa configuração, porque a plasticidade pode modificar os modos de flambagem associados, porém serve como um ponto de partida (estimativa) para o engenheiro.

Por essa razão, ao se encontrar a deformada inelástica da estrutura, é possível se estabelecer as imperfeições geométricas adequadas, que fornecerão o menor dos fatores de carga para aquele carregamento. As imperfeições devem procurar reproduzir geometricamente a deformada inelástica, favorecendo assim a obter-se a configuração de flambagem inelástica, com o uso de menor energia (cargas). O menor de todos os fatores de cargas determina a carga limite que é objetivo da análise avançada.

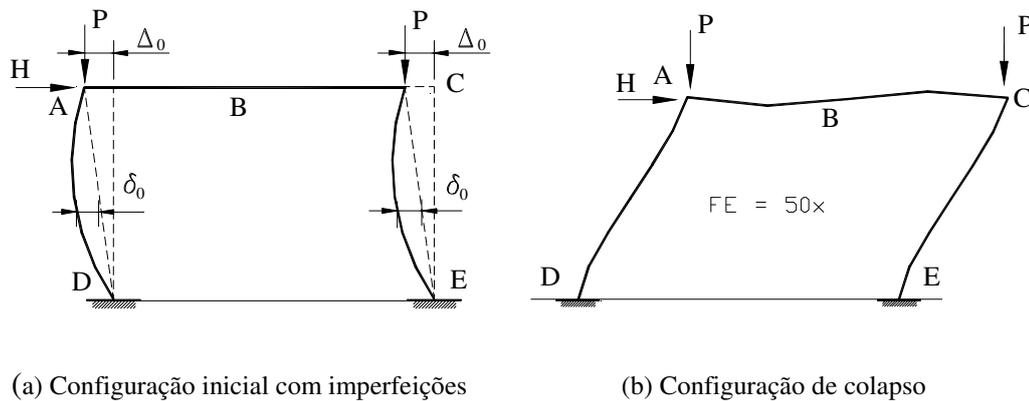


Figura 7.4 Configuração inicial contrária ao colapso.

A demonstração desta proposta de teorema fica mais simples acompanhando a Fig. 7.4a, onde se mostra o portal estudado na subseção 6.7.7, com a configuração de imperfeições iniciais mais crítica, porém na direção oposta ao esforço horizontal H (portal oposto). Se não houvesse essa carga, a configuração de flambagem seria oposta à indicada na Fig. 7.4.b. No entanto, a configuração de flambagem repete, por assim dizer, a configuração já vista na Fig. 7.1b.

Como a configuração inicial é exatamente o contrário da mais favorável, devem-se encontrar valores de fatores de carga maiores, como de fato:

- a. escoamento: $\lambda_y = 65.3$ (oposto) $>$ $\lambda_y = 55.7$ (limite); e
- b. flambagem: $\lambda_{col} = 71.8$ (oposto) $>$ $\lambda_{col} = 64.5$ (limite).

Note que os valores dos fatores de carga do portal oposto são também superiores a todos os indicados na Tab. 6.35b com $\beta_H = +0.5$. Ou seja, a configuração inicial pode favorecer (ou desfavorecer), desde que esteja reproduzindo favoravelmente (ou não) o aparecimento da configuração de flambagem inelástica.

Não foram consideradas as TRs, pois as mesmas não alteram essa proposição.

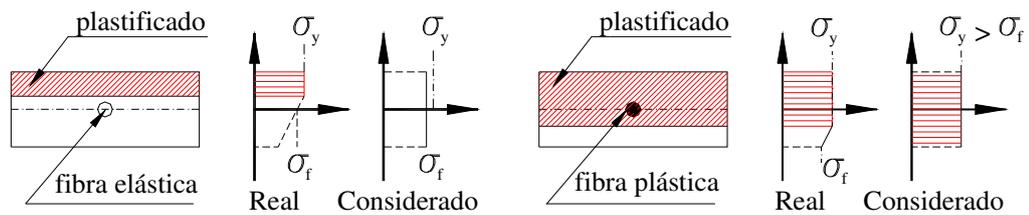
Apesar de parecer muito simples, esta constatação é importante já que pode reduzir a tarefa de estimar as imperfeições geométricas a serem impostas no modelo, de forma a se obter a carga limite desejada.

Assim, as possibilidades de colapso da estrutura, dentro dos limites deste trabalho, foram avaliadas; podendo se considerar que o objetivo maior desta dissertação: responder como uma barra participa no trabalho conjunto com a estrutura, na ótica de uma análise avançada, parece ter sido alcançado.

7.3 ASPECTOS CRÍTICOS

Há logicamente vários limites em toda essa teoria e nos resultados obtidos nesta dissertação, entre os quais se devem citar:

- a. falhas de operação numérica: a precisão de dígitos da representação numérica, a quantidade de operações e de funções trigonométricas envolvida, incluindo o processo de solução do sistema de equações lineares por redução de Gauss e a recuperação dos esforços internos por meio da integração das tensões;
- b. falhas do processo de avaliação das propriedades dos EFs: na rigidez das barras e em outras propriedades são feitas médias que independem do tamanho dos EFs, da variação da distribuição interna dos esforços, etc.;
- c. falhas decorrentes do método das fatias: a fibra avalia um ponto intermediário da fatia; assim, antes desse ponto escoar, a parte extrema já escoou e não é computada; posteriormente, o ponto da fibra escoará e a área remanescente não, e se considera tudo escoado, como ilustra a Fig. 7.5. Portanto, aqui se admite que a fibra seja uma média representativa, isso pode não ser correto;
- d. falhas do modelo estrutural: ao se fazer uma concepção de EFs em barras, várias condições da peça real são desprezadas:
 - i efeito de Poisson;
 - ii paralelismo das abas dos perfis e perpendicularidade à alma;
 - iii efeito das ligações: comportamento $M \times \theta$, rigidez, excentricidades;
 - iv avaliação da plasticidade por fatia;
 - v efeito das bases e ancoragens;
 - vi efeito da introdução de cargas e concentrações de tensões; e
 - vii dimensões reais (suas variações) e as de linha de centro.
- e. falhas de unidades e medidas: vários dados são aproximados, como as dimensões dos perfis vistos na seção 6.2;
falhas das funções de interpolação devido às simplificações, inclusive de tensões residuais (aproximadas nas fibras), das curvaturas (usou-se arco de círculo, o que pode ter compensado o ângulo de CI não empregado);
- f. Avaliação da plasticidade da fatia.



(a) Fibra elástica em fatia com trecho plástico (b) Fibra plástica em fatia com trecho ainda elástico

Figura 7.5 Avaliação da plasticidade da fatia.

- g. falhas nos resultados comparados, visto que muitos são obtidos por reprodução gráfica, cuja qualidade é questionável;
- h. falhas na modelagem: o método da ZP requer uma maior quantidade de EFs, mas é difícil estabelecer quanto seria o ideal. Vogel (1985) adotou 40 EFs numa coluna, neste trabalho empregou-se muito menos. É complicado avaliar essa influência e por extensão a da malha de fatias;
- i. foram desconsiderados os efeitos do encruamento e de outros aspectos da plasticidade, (teoria de fluxo, gradiente de deformação);
- j. o modelo de TR para I soldados desenvolvido foi baseado em estimativas, sem ensaios experimentais, sem qualquer confrontação teórica, seguindo apenas uma forma sugerida (Weston *et al.*, 1991); e,
- k. as TR de Galambos e Ketter (1957), usadas extensamente nos exemplos, são válidas para I laminados americanos. Para laminados europeus entre outros perfis, seu uso é inadequado. Assim, a possibilidade de averiguação dos resultados do portal modificado, do ponto de vista experimental, fica reduzida, o que não é muito bom do ponto de vista de pesquisa.

Além dos resultados, também os procedimentos podem ser criticados:

- a. tempo de processamento extremamente elevado, em decorrência da programação incluir várias opções de tipos de EFs (para diversos tipos de barras), montagem da MRG completa, armazenamento temporário em disco, processo incremental-iterativo de Newton-Raphson puro (padrão), e da integração dos esforços normais;

- b. grande quantidade de informações manipuladas, exigindo o uso de arquivos intermediários (por exemplo, o problema do portal de Vogel, 1985: gerou 25 Mbyte de arquivos!). Isso provocou a necessidade de desenvolver módulos individuais e independentes, para dividir as tarefas;
- c. enorme tarefa de programação e depuração até se obter resultados confiáveis; levaram-se praticamente 2 anos e meio entre programação, depuração, testes e produção de resultados finais;
- d. dificuldade de serem obtidos exemplos completos e confiáveis de outros pesquisadores e métodos, no sentido de auxiliar na depuração;
- e. críticas feitas com relação ao sistema ou a linguagem, lembrando-se que os recursos do Windows são seguidamente alterados, que sistemas desse porte exigem pleno uso da máquina, recursos especiais de depuração e traçado; enfim, uma série de exigências, que culminam num elevado domínio da ferramenta. Dessa forma, a melhor linguagem computacional é a que mais profundamente se conhece e que preenche aspectos fundamentais de clareza, confiabilidade e portabilidade, porém nem sempre é a mais eficiente.

É difícil olhar para os resultados obtidos, envolvendo tantas grandezas, recursos, cheios de complexidade e limitações, com um consumo elevado de tempo e energia, e indicar qual o limite de credibilidade dos mesmos.

Não é possível, neste instante, estabelecer que o processo adotado seja melhor ou pior em relação a outros, talvez supor que esteja num plano intermediário, que consegue fornecer alguns resultados de qualidade, mas tem algumas deficiências para outros problemas.

Apesar disso, os resultados se mostraram melhores do que os esperados, indicando que todas as circunstâncias mencionadas, entretanto, não os prejudicaram.

7.4 CONTINUAÇÃO DA PESQUISA

Várias sugestões podem ser feitas para o prosseguimento deste trabalho, sendo algumas das quais listadas a seguir:

- a. complementar os estudos de portais planos, avaliando o efeito da curvatura da viga, combinações envolvendo também cargas distribuídas tanto na viga como nas colunas;
- b. determinar restrições e limites de uso para a proposta de teorema, inclusive investigando a sua validade na presença de ligações semi-rígidas;
- c. avaliar outros tipos de seções (perfis soldados) com outras tensões residuais;
- d. pequenas modificações de processo de solução: modificar o armazenamento da MRG para banda, processos de solução usando decomposição, verificar o uso de Newton-Raphson modificado;
- e. usar outras estratégias de incremento de carga ou de deslocamento, como controle do comprimento do arco (Crisfield, 1991), mostradas nos trabalhos de Rocha (2000);
- f. introduzir modificações mais refinadas: subestruturação, condensação e vetorização, para expandir a capacidade do processo, como descreve Folley (2001);
- g. desenvolver EF com uma extremidade rotulada (para poder gerar barras diagonais de travamento, para estruturas contraventadas);
- h. desenvolver EF tendo uma extremidade com ligação, para avaliar a influência das ligações nos modelos estruturais;
- i. desenvolver refinamentos que considerem o efeito de painel, a excentricidade de ligações;
- j. avaliar o comportamento de outros diagramas de tensão-deformação;
- k. desenvolver um processo de fatias com mais fibras, permitindo uma melhor integração dos esforços e reduzir a quantidade de fatias;
- l. desenvolver a teoria de fatias segundo tensores que permitam analisar grandes deformações, como os de Green e Piola-Kirchoff (Bathe, 1982);
- m. desenvolver a teoria de fatias introduzindo o efeito do cortante, usando as considerações de viga de Timoshenko (Owen e Hinton, 1980);

- n. desenvolver a teoria das fatias usando funções de interpolação estabelecidas com polinômios de ordem superior, como os PEP (Chan e Zhou, 1994);
- o. estudar os aspectos dinâmicos e efeitos de vibração, inclusive ações de terremoto;
- p. estudar os efeitos das cargas cíclicas e alternadas, avaliando a acomodação e a validade dos teoremas de acomodação sob estruturas com imperfeições iniciais (Tin-Loi e Vimonsatit, 1993);
- q. desenvolver a análise avançada em 3D com ZP, incluindo torção e empenamento (Ziemian *et al.*, 1992);
- r. desenvolver a análise avançada com ZP em estruturas mistas (Nethercot, 2002);
- s. estudar a estrutura dos edifícios de andares múltiplos, deslocável ou indeslocável, incluindo também o efeito do processo evolutivo (Vasconcelos Filho, 2002); e finalmente,
- t. desenvolver a análise avançada com ZP sob condições de incêndio (Silva e Fakuri, 2001).

Portanto, a continuação desse trabalho possibilita efetivamente o estabelecimento de um imenso campo de pesquisa, razão principal deste trabalho e da procura pelo autor da sua inserção no meio acadêmico docente (utilizando os seus 25 anos de experiência em projeto e as mais de 500 obras metálicas projetadas). Espera-se, portanto, poder pesquisar a maioria desses tópicos, e assim contribuir para o desenvolvimento tecnológico da engenharia de estruturas metálicas no Brasil.

7.5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AISC LRFD, 1993. *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. 2^a Ed., Chicago, Ilionois.
- Bathe, KJ; e Bolourch, S; 1979. Large displacements analysis of 3D beam structures. *Int. Journal for Num. Methods in Eng.* Vol. 14, pp. 901 a 986.
- Bild, S; e Trahair, NS; 1989. In plane strengths of steel columns and beam-columns. *J.S.C.Research*. Vol. 13 (1), 1989, pp. 1 a 22.
- Chan, SL; e Zhou, ZH; 1993. Pointwise equilibrating polynomial element for nonlinear analysis of frames. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 120 (6) 1994 pp. 1703 a 1716.
- Chan, SL; e Chui, PPT; 1997. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept. *Engineering Structures*. Vol. 19 (8) 1996 pp. 628 a 636.
- Chwalla, E; 1934. Theorie des aussermittig gedruckten stabes aus baustahl. *Stahlbau*, Vol 7 (10-11), 1934.
- Crisfield, MA; 1991. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 1. Willey & sons, Nova Iorque, pp. 1 a 20.
- ECCS, 1984. *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints*. Technical working group 8.2 Publicação 33. European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.
- El-Zanaty, MH; Murray, DW;. e Bjorhovde, R; 1980. Inelastic behavior of multi-story steel frames. *Structural Engineering Report*. Vol. n. 83, Univ. Alberta, Canadá.
- Foley, CM; 2001. Advanced analysis of steel frames using parallel processing and vectorization. *Computer-aided Civil and Infrastructure Eng.* Vol. 16, pp. 305 a 325.
- Galambos, TV e Ketter, RL; 1957. Em Columns under combined bending and thrust. *Transations ASCE*. Vol. 126 (1), (1961), pp. 1 a 25.
- Hajjar, JF *et al.*, 1997. *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for american steel design*. ASCE, Nova Iorque.
- Higgins, TR; e outros, 1971. *Plastic Design in Steel- A guide and commentary*. ASCE WRC. *Manuals and reports on engineering practice*. Vol. 41, Nova Iorque.
- Kanchanalai, T; 1977. The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames *AISI Project 189 Rep. 2*. Univ. Texas, Austin, Civil Eng., Structural

Research Lab.

- Kim, SE; e Chen, WF; 1996. Practical advanced analysis for unbraced steel frame design. Practical Advanced Analysis for Braced Steel Frame Design. *ASCE J. Struct. Engineer.* 122 (11) 1996, pp. 1259 a 1274.
- Lavall, ACC; 1996. *Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal.* Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP, Brasil.
- Meek, JL; e Loganathan S; 1990. Geometric and material nonlinear behaviour of beam-columns. *Computers & Structures.* Vol. 34 (1) 1990, pp. 87 a 100.
- Nethercot, DA; 2002. Design of non-sway composite frames. *The Structural Engineer.* 19 (3), 2002, pp. 18 a 26.
- Owen, DRJ; e Hinton, E; 1980. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice.* Pineridge Press Ltd, Swansea, RU.
- Rocha, G; (2000). *Estratégias de incremento de carga e de iteração para a análise não-linear de estruturas.* Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silva, VP; Fakuri RH; (2001) Brazilian standards for steel structures fire design. *Fire Safety Journal.* Vol. 37, pp. 217 a 227, Inglaterra.
- Silveira, RAM; 1995. *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato.* Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC/RJ, Rio de Janeiro/MG, Brasil.
- Tin-Loi, F; e Vimonsatit, V; 1993. Shakedown of frames with semi-rigid connections - *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 119 (6) 1993, pp. 1694 a 1760.
- Vasconcelos Filho, A; 2002. *Análise Estrutural de Edifícios Altos,* Notas de aula, EEUFMG, BH, pp. 1 a 176.
- Vogel, U; 1985. Calibrating Frames. *Stahlbau.* Vol. 10, pp. 295-301.
- Weston, G; Nethercot, DA; Crisfield, MA; 1991. Lateral buckling in continuous composite bridge girders. *The Structural Engineer.* Vol. 69 (5), pg. 79 a 87.
- Ziemian, RD; McGuire, W; e Deierlein, GG; 1992. Inelastic limit states design, part II: Three-dimensional frame study. *ASCE J. Struct. Engineer.* 118 (9) 1992, pp. 2352 a 2568.

Zhou, SP; Duan, L; e Chen, WF; 1990. Comparison of Design Equations for Steel Beam-Columns. *Structural Engineering Review*. Vol. 2 (1) pg. 45 a 53.

APÊNDICE

SUMÁRIO

Seção	Título	Pág.
A	Matriz de Rigidez Elástica	244
B	Equações dos Ábacos de Julian e Lawrence (1959)	244
C	Teoremas da Plasticidade	245
D	Fórmula de Perry-Robertson	247
E	Diagramas de Tensão – Deformação	248
F	Fórmulas de Interpolação da Técnica das Fatias	248
G	Avaliação da MRE aproximada	249
H	Tensões Residuais em I Soldados	250
I	Resultados do Portal de Vogel (1985)	253
J	Referências Bibliográficas	291

A. MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA

Ver cap. 2 Eq. 2.2. No contexto do MEF, utilizando os polinômios de Hermite para elemento de barra, ou aplicando-se o método da rigidez direta, é obtida a matriz de rigidez constitutiva elástica do elemento finito expressa por (Johnson e Weaver, 1990):

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ & B & C & 0 & -B & C \\ & & D & 0 & -C & D/2 \\ & & & A & 0 & 0 \\ & sim. & & & B & -C \\ & & & & & D \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde os termos A , B , C e D dentro da matriz valem:

$$A = \frac{EA_g}{L}, \quad B = \frac{12EI_z}{L^3}, \quad C = \frac{6EI_z}{L^2} \quad \text{e} \quad D = \frac{4EI_z}{L}. \quad (\text{A.2a-d})$$

sendo: A_g , I_z , L a área, a inércia sobre o eixo z-z da seção e o comprimento do EF, respectivamente.

B. EQUAÇÕES DOS ÁBACOS DE JULIAN E LAWRENCE (1959)

As equações transcendentais representadas nos ábacos são descritas em diversas fontes (Galambos, 1982; Queiroz, 1986; Hajjar *et al.*, 1997, etc), exigem uma solução numérica refinada (devido à existência de uma falta de continuidade no intervalo onde se procura a solução), sendo expressas por:

Estruturas indeslocáveis

$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{\pi}{k} \right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2} \right) \left(1 - \frac{\pi/k}{\tan \pi/k} \right) + 2 \frac{\tan \pi/2k}{\pi/k} = 1. \quad (\text{A.3})$$

Estruturas deslocáveis

$$\frac{G_A G_B (\pi/k)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} = \left(\frac{\pi/k}{\tan \pi/k} \right). \quad (\text{A.4})$$

Dumonteil (1992) apresenta as equações francesas aproximadas, que produzem rapidamente resultados similares (com pequenos desvios):

Estruturas indeslocáveis

$$k = \frac{3G_A G_B + 1.4(G_A + G_B) + 0.64}{3G_A G_B + 2.0(G_A + G_B) + 1.28}. \quad (\text{A.5})$$

Estruturas deslocáveis

$$k = \sqrt{\frac{1.6G_A G_B + 4.0(G_A + G_B) + 7.5}{G_A + G_B + 7.5}}. \quad (\text{A.6})$$

Moore II (1993) indica que a falta de continuidade quando k tende a 2, interfere na solução, quando a primeira estimativa de k , está do lado errado da curva. Recomenda usar o método de Newton de aproximações sucessivas, de rápida convergência e excelente precisão, com as equações:

Estruturas indeslocáveis

$${}^{(\omega+1)}x = {}^\omega x - \frac{Ax^3 - 2Bx^2/\tan(x) + 2Bx - 4x + 8 \tan(x/2)}{3Ax^3 - 4Bx/\tan(x) + 2Bx^2/\sin^2(x) + \tan^2(x/2)}. \quad (\text{A.7})$$

Estruturas deslocáveis

$${}^{(\omega+1)}x = {}^\omega x - \frac{(Ax^2 - 36)\tan(x) - 6Bx}{(Ax^2 - 36)/\cos^2(x) + 2A \tan(x) - 6B}, \quad (\text{A.8})$$

onde: ${}^{(\omega+1)}x$ é o valor obtido na iteração $\omega+1$, e ${}^\omega x$ é o valor da tentativa atual, que pode ser feito inicialmente $\pi/4$, $A = G_A G_B$ e $B = G_A + G_B$; sendo que a tolerância recomendada é ${}^{(\omega+1)}x - {}^\omega x \leq 0.001$ (0.1 %).

C. TEOREMAS DA PLASTICIDADE

Apenas por razão de complementar (ver seção 2.6.1), apresenta-se aqui a dedução dos resultados obtidos a partir dos teoremas plásticos. Aplica-se o *teorema estático*, seguindo os diagramas de corpo-livre das Fig.s 2.17b,c e expressando as equações de equilíbrio dos momentos no ponto B, encontra-se:

$$\text{no lado esquerdo: } V_A(L/3) - M_A = M_B, \quad (\text{A.9a})$$

$$\text{e no lado direito: } V_C(2L/3) - M_C = M_B. \quad (\text{A.9b})$$

Aplicando agora a condição da Eq. 2.24, ou seja: $M_A = M_C = -M_p$ e $M_B = +M_p$, vem:

$$V_A(L/3) = (M_A + M_B) = 2 M_P \therefore V_A = 6M_P/L, \quad (\text{A.10a})$$

$$V_C(2L/3) = (M_C + M_B) = 2 M_P \therefore V_C = 3M_P/L. \quad (\text{A.10b})$$

Desde que, pelo equilíbrio das forças verticais: $V_A + V_C = \lambda P$, obtém-se então:

$$\lambda P = 6M_P/L + 3M_P/L = 9M_P/L, \text{ portanto: } \lambda \leq \lambda_{\text{est}} = 9M_P/(PL). \quad (\text{A.11})$$

Seja o mecanismo composto de 3 RPs, nos pontos de maiores momentos: A, B e C; como mostrado na Fig. 2.17e. O princípio dos trabalhos virtuais (PTV) iguala o trabalho dos esforços internos (momentos \times rotações) com o trabalho das forças externas (carga \times flecha), ou seja:

$$\sum M_i \theta_i = \sum P_e \delta_e, \quad (\text{A.12})$$

então, considerando o diagrama de momentos da Fig. 2.17d, pode-se escrever:

$$-M_A(-\alpha) + M_B(\alpha + \gamma) - M_C(-\gamma) = \lambda P \delta. \quad (\text{A.13})$$

Da geometria da figura se obtém que:

$$\delta \cong (\alpha L / 3) \cong (\gamma 2L / 3), \text{ portanto: } \alpha = 2\gamma. \quad (\text{A.14})$$

Expressando Eq. A.13 em função de γ , e lembrando Eq. 2.24, chega-se a:

$$M_P(2\gamma) + M_P(3\gamma) + M_P(\gamma) = 6M_P(\gamma) = 2\lambda PL(\gamma) / 3. \quad (\text{A.15})$$

Mas $\gamma \neq 0$ (não trivial), logo:

$$6M_P = 2\lambda PL / 3. \quad (\text{A.16})$$

De onde, aplicando o *teorema cinemático*, se encontra então:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{cin}} = 9 M_P / (PL). \quad (\text{A.17})$$

O mesmo processo pode se estender aos outros problemas, porém é mais rápido estabelecer todas as equações de equilíbrio, gerando um sistema linear de equações e resolvendo com programação linear (PL).

D. FÓRMULA DE PERRY-ROBERTSON

Antes da descoberta das tensões residuais, a aparente inaplicabilidade da teoria do módulo tangente no diagrama bi-linear tensão-deformação, levou ao conceito de que o comportamento da coluna pudesse ser determinado por uma análise das tensões elásticas em que fossem incluídos os efeitos das imperfeições iniciais. Portanto, o limite seria estabelecido pela carga que causasse o escoamento direto, combinando axial e momento. Isso gerou uma fórmula para pontes, adotada nos primórdios da construção metálica. (Johnston *et. al.*, 1976).

Similar aos estudos de Timoshenko e Gere (1961), considerando a tensão máxima como σ_y e introduzindo-se diretamente uma excentricidade (e), a carga axial (P) na barra ficaria determinada, encontrou-se então a expressão:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A_g} = \frac{\sigma_y}{\left[1 + \frac{ed}{2r^2} \sec\left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA_g}} \right) \right]}, \quad (\text{A.18})$$

onde r é o raio de giro da seção no mesmo plano da excentricidade e os demais termos já são conhecidos. A Eq. A.18 é chamada de *fórmula secante* e fornece um valor bastante conservador de estimativa de uma tensão média à compressão da coluna.

De igual forma, ao avaliar a carga máxima de flambagem de uma coluna bi-rotulada, com uma curvatura inicial em arco senoidal δ_0 , com o mesmo conceito de fator de amplificação de Timoshenko (seção 2.2), sendo σ_e a tensão de Euler, obtém-se:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A_g} = \frac{\sigma_y}{\left[1 + \frac{\delta_0 d}{2r^2} \left(\frac{1}{1 - \sigma_{\max}/\sigma_e} \right) \right]}, \quad (\text{A.19})$$

que resolvida diretamente, fornece a fórmula de Perry-Robertson:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left[\sigma_y + \sigma_e \left(1 + \frac{\delta_0 d}{2r^2} \right) - \sqrt{\left[\sigma_y + \sigma_e \left(1 + \frac{\delta_0 d}{2r^2} \right) \right]^2 - 4\sigma_y \sigma_e} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Ao utilizar-se essa fórmula (Eq. A20), ocorre um superdimensionamento.

E. DIAGRAMAS DE TENSÃO - DEFORMAÇÃO

A norma AS4100 (1990) utiliza diagramas tensão deformação tri-lineares, com os seguintes parâmetros para o ASTM A 36, ou similar, com $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$:

$$E = 20000 \text{ kN/cm}^2, \quad E_{st} = 600 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\varepsilon_y = 1.25 \text{ mm/m}, \quad \varepsilon_{st} = 13.75 \text{ mm/m},$$

limite do diagrama: $\varepsilon_{ult} = 38.75$ (a partir do qual se considera que o material rompeu).

Outros valores (AISC LRFD, 1993) podem ser encontrados em Higgins *et al.* (1971).

F. FÓRMULAS DE INTERPOLAÇÃO DA TÉCNICA DAS FATIAS

Essas fórmulas são estabelecidas considerando o EF como uma barra simples e impondo as condições de contorno relativas aos deslocamentos dos seus nós extremos (J_A e J_B). Partindo da equação genérica do deslocamento horizontal do centróide 0, que é suposta linear:

$$u_0(x) = ax + b. \tag{A.21}$$

Desde que o domínio de x está no intervalo $[-L/2, +L/2]$, então usando as condições conhecidas que são os deslocamentos desses nós, pode-se escrever:

$$u_0(-L/2) = 0 \therefore -aL/2 + b = 0; \quad e \tag{A.22a}$$

$$u_0(+L/2) = q_1 \therefore +aL/2 + b = q_1. \tag{A.22b}$$

Portanto, se obtém os valores das constantes:

$$a = q_1/L; \quad e \quad b = q_1/2, \tag{A.23a,b}$$

que substituídas na Eq. A.21 permitem encontrar a Eq. 4.15.

De igual forma, partindo da função de deslocamento vertical do centróide que é considerado um polinômio do terceiro grau, e obtendo-se as derivadas correspondentes, podem ser definidas as seguintes relações:

$$v_0(x) = cx^3 + dx^2 + ex + f; \quad (\text{A.24a})$$

$$v_0'(x) = 3cx^2 + 2dx + e; \quad e \quad (\text{A.24b})$$

$$v_0''(x) = 6cx + 2d. \quad (\text{A.24c})$$

Desde que x pertence ao domínio do intervalo $[-L/2, +L/2]$, então aplicando a condição que não há deslocamento vertical nesses nós, obtêm-se:

$$v_0(-L/2) = 0 \quad \therefore \quad -cL^3/8 + dL^2/4 - eL/2 + f = 0; \quad e \quad (\text{A.25a})$$

$$v_0(+L/2) = 0 \quad \therefore \quad +cL^3/8 + dL^2/4 + eL/2 + f = 0. \quad (\text{A.25b})$$

Dessas equações resultam as seguintes relações diretas:

$$e = -cL^2/4; \quad e \quad f = -dL^2/4. \quad (\text{A.26a,b})$$

Equações adicionais surgem considerando as rotações desses nós:

$$v_0'(-L/2) = q_2 \quad \therefore \quad 3cL^2/4 - dL + e = q_2; \quad e \quad (\text{A.27.a})$$

$$v_0'(L/2) = q_3 \quad \therefore \quad 3cL^2/4 + dL + e = q_3. \quad (\text{A.27.b})$$

Com essas equações consegue-se determinar as constantes de $v_0(x)$, $v_0'(x)$ e $v_0''(x)$, conforme:

$$c = \xi(q_2 + q_3)/L^2; \quad d = \xi(q_3 - q_2)/(2L); \quad (\text{A.28a,b,c,d})$$

$$e = -\xi(q_2 + q_3)/4 \quad e \quad f = -\xi(q_3 - q_2)/8.$$

Dessas expressões se obtém as fórmulas das funções de interpolação (ψ_2 e ψ_3), substituindo as constantes (c , d , e e f) e agrupando termos expressos em q_2 e q_3 , obtendo-se as equações Eq.s 4.16 e 4.17a,b.

G. AVALIAÇÃO DA MRE APROXIMADA

É importante notar que a expressão representada na Eq. 4.12 não pode ser aplicada de forma direta, para se obter a MR do EF, com a avaliação de $\partial \epsilon / \partial q_\alpha$ ou de $\partial^2 \epsilon / (\partial q_\alpha \partial q_\beta)$, porque possui valores diferentes nas extremidades do EF.

Por isso define-se uma deformação média para todo o EF, que é então utilizada para as diversas diferenciações e com a qual se obtém as MR expressas nas Eq.s 4.32a,b,c.

Essa deformação média é definida pela expressão:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{L_r} \int_{-L_r/2}^{L_r/2} \varepsilon(x) dx, \quad (\text{A.29})$$

sendo então $\varepsilon(x)$ determinado pela expressão 4.12 com as funções de aproximação indicadas nas Eq.s 4.15 e 4.16 (Lavall, 1996).

Deve-se lembrar ainda, que se está obtendo uma MR do EF no sistema local do EF paralelo ao sistema de referência (ou global), ou seja, com $\varphi_d = 0$. Considerado a montagem da rigidez global (**S**) é necessário tanto fazer a ordenação dos GDLs, como uma rotação de eixos para cada EF, utilizando para isso o ângulo de giro atualizado θ , ou seja, fazer a transformação linear característica:

$$\mathbf{K}(\theta) = \mathbf{T}^T \mathbf{K}(0) \mathbf{T}, \quad (\text{A.30})$$

na qual a matriz de transformação **T** [6,6] é expressa como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

sendo **0** [3,3] a matriz nula de ordem 3, e **R** [3,3] a matriz de rotação, definida por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} +\cos(\theta) & +\cos(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & +\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

H. TENSÕES RESIDUAIS EM PERFIS I SOLDADOS

As tensões residuais de Bild e Trahair (1989) foram adotadas na norma AS4100 (1990), conforme diagrama mostrado em Pi e Trahair (1994), com valor $\eta = \sigma_r / \sigma_y = 0.5$; constitui um diagrama linear diferido que é válido para I laminados.

Os diagramas de I soldados indicados no Eurocode 3, referentes à Fig. 3.6c(i), consideram as tensões residuais conforme:

- a. de tração: $\sigma_{rt} = \sigma_y$; e
- b. de compressão: $\sigma_{rc} = 0.25 \sigma_y$.

De forma aproximada se escreve então:

$$a. \quad \sigma_{rt} b_r / 2 = \sigma_{rc} (b - b_r) \therefore b_r \cong b/3; e \quad (A.33a)$$

$$b. \quad 2 \sigma_{rt} a_r / 2 = \sigma_{rc} (d_a - 2a_r) \therefore a_r \cong a/3. \quad (A.33b)$$

Esses valores podem ser usados como estimativas, fazendo-se pequenos ajustes a seguir em σ_{rc} , para considerar a pequena transição inclinada.

Em Weston *et al.* (1991), se indicou que a expressão $a_r = 0.75 b_r$. Para a Fig. 3.6c(ii) foi indicada a mesma relação e também que $\sigma_{rt} = 0.7 \sigma_y$ (na extremidade da aba). O valor de σ_{rc} não é informado, sendo o diagrama relacionado a Estuar (1965)! Para a viga I 836x303x12.7x20.2; adotou-se $b_r = 85$ mm, ou seja 28 % b, e $\sigma_{rc} = 0.15 \sigma_y$.

Bradford e Trahair (1985) mostraram um digrama parabólico nas abas, com borda $\sigma_{rc} = 0.35 \sigma_y$ e na parte central $\sigma_{rt} = 0.5 \sigma_y$; para perfis experimentais:

- a. I 914x914x388 UB, e
- b. I 914x305x201 UB; padrão australiano.

Na alma foi representado um diagrama diferente, como uma meia parábola simétrica à meia altura da alma. Tração na extremidade $\sigma_{rt} = 0.5 \sigma_y$, maior compressão próximo à dimensão $d_a/4$ das extremidades, com os seguintes valores:

- a. (i) $\sigma_{rc} = 0.54 \sigma_y$; e
- b. (ii) $\sigma_{rc} = 0.38 \sigma_y$;

e no centro da alma, um valor menor de compressão:

- a. (i) $\sigma_{rc} = 0.39 \sigma_y$; e
- b. (ii) $\sigma_{rc} = 0.14 \sigma_y$.

Davids e Hancock (1986) fizeram estudos com I soldados compostos com chapas cortadas a frio na guilhotina e soldadas com filete, porém executadas com aço especial de $\sigma_y = 35$ kN/cm². Indicaram que as tensões residuais são proporcionais às deformações medidas (em 10 μ m/m). O diagrama mostrado é o mesmo da Fig. 3.6.c(i), sendo que a tensão de compressão não é constante, porém reduz do máximo positivo ao máximo negativo, no centro da aba; e reduz para a borda da aba; dividindo a meia aba em 4 partes, com as seguintes medidas de deformação (médias):

- a. centro da aba: 2750 a 2080 (calibrado como σ_y), na 1ª parte,
- b. extremo da aba: -540 a -200, na 4ª parte,
- c. interior máx. aba: -340 a -500, na 2ª parte.

Na alma a deformação varia de -225 a -150, no centro, sendo aproximadamente constante, com picos nas extremidades iguais ao item a .

Davids e Hancock (1985) apresentaram outro trabalho, com perfis longos (colunas esbeltas), aba com $t = 5$ mm, $b = 190, 240, 310$, e alturas $d = 240, 250, 300$, com o mesmo aço. Usaram o mesmo diagrama, com outras medidas de deformação:

- a. centro da aba: 2250 a 2100 (calibrado como σ_y), na 1ª parte,
- b. extremo da aba: -540 a -200, na 4ª parte,
- c. interior máx. aba: -340 a -500, na 2ª parte.

Na alma o valor varia de -170 a -340, aproximadamente constante. Indicaram também que a dimensão tracionada da alma $a_r \cong 0.25b$, e as abas divididas em $b/4$.

Em nenhum desses casos é indicado adequadamente, quais os valores devem ser usados nas fórmulas aproximadas.

Para os problemas deste trabalho referentes aos perfis I soldados, adotam-se, de forma simplificada, equações que não possuem qualquer verificação experimental, o que as tornam inadequadas ao uso não acadêmico. Foram obtidas a partir de relações puramente geométricas e de equilíbrio, merecendo um estudo mais profundo posterior.

Os valores das TRs adotados nos diagramas de I soldados empregados nos exemplos da seção 6.3 são:

- a. nas abas:
 - (i) próximo da alma $\sigma_{rt} = +25.0 \text{ kN/cm}^2$,
 - (ii) no meio da aba $\sigma_{rc} = -11.3 \text{ kN/cm}^2$, e
 - (iii) no extremo $\sigma_{rt} = +12.5 \text{ kN/cm}^2$;
- b. nas almas:
 - (i) próximo da aba $\sigma_{rt} = +25.0 \text{ kN/cm}^2$, e
 - (ii) no meio da alma $\sigma_{rc} = -4.05 \text{ kN/cm}^2$.

Os demais valores geométricos são determinados pelas condições de equilíbrio e pela forma do diagrama de TR.

I. RESULTADOS DO PORTAL DE VOGEL (1985)

Devido ao espaço, são mostrados a seguir trechos da listagem produzida por PPLANAV* para esse exemplo, incluindo o incremento de escoamento e colapso.

```

LISTAGEM DO ARQUIVO TESTE10ER.TXT produzido por PLANAV*
*****
* PERSEC Engenharia de Projetos Ltda           11:28:22   11-29-2004 *
* PPLANAV* - Portico PLano ANalise AVancada    *
*****

Identificacao: Portal de Vogel (1985) c/ 22 EF

                Dados Gerais da Estrutura

Numero de nos           Nnos = 23
Numero de elementos     Nele = 22
Numero de barras        Nbar = 3
Numero de restricoes    Nrst = 6

Numero de nos suportes  Nsup = 2
Numero de materiais     Nmr = 1
Numero de propriedades  Npr = 2
Numero de tipos de lig. Ntl = 0

Numero de rotulas       Nrot = 0
Numero de ligacoes      Nlga = 0
Graus de liberdade      Ngl = 63
Largura min. banda S    Lb = 6

                Coordenadas dos Nos [cm]

No           Coord X      Coord Y
1            0.0          0.0
    
```

3	0.0	125.0
4	0.0	187.5
5	0.0	250.0
6	0.0	312.5
7	0.0	375.0
8	0.0	437.5
9	0.0	500.0
10	66.7	500.0
11	133.3	500.0
12	200.0	500.0
13	266.7	500.0
14	333.3	500.0
15	400.0	500.0
16	400.0	437.5
17	400.0	375.0
18	400.0	312.5
19	400.0	250.0
20	400.0	187.5
21	400.0	125.0
22	400.0	62.5
23	400.0	0.0

Incidencia dos Elementos

Elem	no in	no fn	__Cx__	__Cy__	__L_cm__	__Fi__gr__
1	1	2	0.0000	1.0000	62.50	90.0000
2	2	3	0.0000	1.0000	62.50	90.0000
3	3	4	0.0000	1.0000	62.50	90.0000
4	4	5	0.0000	1.0000	62.50	90.0000
5	5	6	0.0000	1.0000	62.50	90.0000

6	6	7	0.0000	1.0000	62.50	90.0000
7	7	8	0.0000	1.0000	62.50	90.0000
8	8	9	0.0000	1.0000	62.50	90.0000
9	9	10	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
10	10	11	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
11	11	12	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
12	12	13	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
13	13	14	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
14	14	15	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
15	15	16	0.0000	-1.0000	62.50	270.0000
16	16	17	0.0000	-1.0000	62.50	270.0000
17	17	18	0.0000	-1.0000	62.50	270.0000
18	18	19	0.0000	-1.0000	62.50	270.0000
19	19	20	0.0000	-1.0000	62.50	270.0000
20	20	21	0.0000	-1.0000	62.50	270.0000
21	21	22	0.0000	-1.0000	62.50	270.0000
22	22	23	0.0000	-1.0000	62.50	270.0000

Dimensoes das Secoes e Numero de Fatias

Num.	Dimensoes do Perfil I [mm]				Quantidade de Fatias			
	Prop	Altura	Largura	___Espessuras___	Metade Flange	Alma	Total	
			Flange	Alma	horiz.	vert.	vert.	
1	300.0	300.0	19.965	11.230	10	20	52	452
2	330.0	300.0	17.498	9.495	10	10	30	230

Propriedades Geometricas das Secoes

Num.	_____Areas [cm2]	_____ Mod. Resistencia [cm3]	Inercia	_Peso_
------	------------------	------------------------------	---------	--------

Prop	Alma	Flange	Total	Elastico	Plastico	[cm4]	[kN/m]
1	29.2	59.9	149.0	1678.04	1867.16	25171	1.15
2	28.0	52.5	133.0	1678.20	1847.03	27690	1.02

Propriedades dos Materiais

Diagrama de Analise F x e: 2 -Elastico perfeitamente plastico
 Tensoes Residuais Fr: 4 -Diagrama linear p/ flange e alma

Modulo Elasticidade E[kN/cm2]= 20500

Num.	Escoamento	Residual	Parametros do Diagrama		
Mat.	[kN/cm2]	[kN/cm2]	H a	eo b	n
1	23.500	11.750	0.00	0.00000	0.000

Restricoes Nodais

No	Irx	Iry	Irz
1	1	1	1
23	1	1	1

Materiais-Secoos-Ligacoes-Curvatura-Prumo

Elem	Barra	Pos.	Material	Scao	Extremo	Ligacao	Curvatura	Fora prumo
1	1	1	1	1	0	0	-0.0010	0.0025
2	1	2	1	1	0	0	-0.0010	0.0025
3	1	3	1	1	0	0	-0.0010	0.0025
4	1	4	1	1	0	0	-0.0010	0.0025
5	1	5	1	1	0	0	-0.0010	0.0025
6	1	6	1	1	0	0	-0.0010	0.0025

7	1	7	1	1	0	0	-0.0010	0.0025
8	1	8	1	1	0	0	-0.0010	0.0025
9	2	1	1	2	0	0	0.0000	0.0025
10	2	2	1	2	0	0	0.0000	0.0025
11	2	3	1	2	0	0	0.0000	0.0025
12	2	4	1	2	0	0	0.0000	0.0025
13	2	5	1	2	0	0	0.0000	0.0025
14	2	6	1	2	0	0	0.0000	0.0025
15	3	1	1	1	0	0	0.0010	0.0025
16	3	2	1	1	0	0	0.0010	0.0025
17	3	3	1	1	0	0	0.0010	0.0025
18	3	4	1	1	0	0	0.0010	0.0025
19	3	5	1	1	0	0	0.0010	0.0025
20	3	6	1	1	0	0	0.0010	0.0025
21	3	7	1	1	0	0	0.0010	0.0025
22	3	8	1	1	0	0	0.0010	0.0025

Modelo de barras com curvatura inicial

Modelo com barras fora de prumo

Coordenadas dos Nos com Imperfeicoes [cm]

No	Coord Ximp	Coord Yimp
1	0.0000	0.0000
2	0.3750	62.5000
3	0.6875	125.0000
4	0.9375	187.5000
5	1.1250	250.0000
6	1.2500	312.5000
7	1.3125	375.0000

12	201.2500	500.0000
13	267.9167	500.0000
14	334.5833	500.0000
15	401.2500	500.0000
16	401.3125	437.5000
17	401.3125	375.0000
18	401.2500	312.5000
19	401.1250	250.0000
20	400.9375	187.5000
21	400.6875	125.0000
22	400.3750	62.5000
23	400.0000	0.0000

Elementos com Imperfeicoes Geometricas

Elem	no in	no fn	<u>Cx</u>	<u>Cy</u>	<u>L cm</u>	<u>Fi gr</u>
1	1	2	0.0060	1.0000	62.501	89.6562
2	2	3	0.0050	1.0000	62.501	89.7135
3	3	4	0.0040	1.0000	62.500	89.7708
4	4	5	0.0030	1.0000	62.500	89.8281
5	5	6	0.0020	1.0000	62.500	89.8854
6	6	7	0.0010	1.0000	62.500	89.9427
7	7	8	0.0000	1.0000	62.500	90.0000
8	8	9	-0.0010	1.0000	62.500	90.0573
9	9	10	1.0000	0.0000	66.667	0.0000
10	10	11	1.0000	0.0000	66.667	0.0000
11	11	12	1.0000	0.0000	66.667	0.0000
12	12	13	1.0000	0.0000	66.667	0.0000
13	13	14	1.0000	0.0000	66.667	0.0000
14	14	15	1.0000	0.0000	66.667	0.0000

15	15	16	0.0010	-1.0000	62.500	270.0573
16	16	17	-0.0000	-1.0000	62.500	270.0000
17	17	18	-0.0010	-1.0000	62.500	269.9427
18	18	19	-0.0020	-1.0000	62.500	269.8854
19	19	20	-0.0030	-1.0000	62.500	269.8281
20	20	21	-0.0040	-1.0000	62.500	269.7708
21	21	22	-0.0050	-1.0000	62.501	269.7135
22	22	23	-0.0060	-1.0000	62.501	269.6562

FINAL DA GEOMETRIA

 Carregamento 1. Carga Horizontal H= 12.5 % P

Cargas nodais Ncg= 1

No	Ic	Fx [kN]	Fy [kN]	Mz [kN.m]
9	2	35.0	0.0	0.00

Soma Cargas	SFx[kN]	SFy[kN]	SMz[kN.m]
	35.0	0.0	0.00

Momento em O Mo	Centro Cargas (Xc, Yc)
-175.00 kNm	0.00 cm 500.00 cm

Carregamento 2. Carga Vertical P (02x)= 80 % Py

Cargas nodais Ncg= 2

No	Ic	Fx [kN]	Fy [kN]	Mz [kN.m]
9	2	0.0	-2800.0	0.00
15	2	0.0	-2800.0	0.00
Soma Cargas		SFx [kN]	SFy [kN]	SMz [kN.m]
		0.0	-5600.0	0.00
Momento em O Mo		Centro Cargas (Xc, Yc)		
-11200.00 kNm		200.00 cm	0.00 cm	
FINAL DE CARREGAMENTOS				

Hipotese: 1				
Carregamento	Fator	Hipotese Incremental		
1	1.000	Considerar todas as cargas como incrementais.		
2	1.000	Considerar todas as cargas como incrementais.		
PROCESSO INCREMENTAL				
N. vezes Incremento:	5	1	1	12
Passo Incremento %:	10.000	4.200	0.100	1.700 2.000
N. vezes Incremento:	18	4	40	
Passo Incremento %:	1.000	0.500	0.100	
Algoritmo Nalg: 2 -Rigidez tangente Newton-Raphson				
Numero maximo iteracao		Nitr: 400		

Tolerancia p/ convergencia Tol: 0.00500
 Criterio de Convergencia usado: 4 -Norma dos Deslocamentos Separados

Opcao de Saida: 1 -Resultado final, apos convergencia, (1 res)

FINAL DE DADOS

Hipotese 1 - 7.o Incremento - Fator 0.5430 - 2.a Iteracao
 Converge com: 0.0006 (11.42 % da tolerancia), com criterio 4.

DESLOCAMENTOS NODAIS

No'	Desloc. X -----cm-----	Desloc. Y -----cm-----	Rotacao Z ---rad.-----grau---
1	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.015139	-0.030918	-0.0004667
3	0.055053	-0.061956	-0.0007933
4	0.111221	-0.093032	-0.0009875
5	0.175652	-0.124084	-0.0010585
6	0.240971	-0.155074	-0.0010168
7	0.300502	-0.185988	-0.0008743
8	0.348348	-0.216832	-0.0006440
9	0.379457	-0.247636	-0.0003399
10	0.379225	-0.260596	-0.0000671
11	0.378994	-0.259000	0.0000968
12	0.378762	-0.250103	0.0001519
13	0.378531	-0.241164	0.0000981
14	0.378300	-0.239438	-0.0000645
15	0.378069	-0.238104	-0.0000360

16	0.347231	-0.220812	-0.0006393	-0.036629
17	0.299682	-0.189399	-0.0008696	-0.049827
18	0.240428	-0.157917	-0.0010128	-0.058027
19	0.175337	-0.126358	-0.0010554	-0.060470
20	0.111069	-0.094738	-0.0009855	-0.056466
21	0.054999	-0.063094	-0.0007923	-0.045395
22	0.015129	-0.031487	-0.0004664	-0.026722
23	0.000000	0.000000	0.0000000	0.000000

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

Elem	J Normal	J Corte	J Momento	K Normal	K Corte	K Momento
----	----kN----	----kN---	----kNcm---	----kN----	----kN---	----kNcm---
1	1506.409	18.965	4445.252	-1506.409	-18.965	-3260.477
2	1506.421	18.056	3260.477	-1506.421	-18.056	-2132.539
3	1506.434	16.941	2132.539	-1506.434	-16.941	-1074.268
4	1506.448	15.633	1074.268	-1506.448	-15.633	-97.706
5	1506.462	14.147	97.706	-1506.462	-14.147	786.038
6	1506.477	12.500	-786.038	-1506.477	-12.500	1566.909
7	1506.491	10.711	-1566.909	-1506.491	-10.711	2236.020
8	1506.503	8.800	-2236.020	-1506.503	-8.800	2785.760
9	9.450	-13.900	-2785.760	-9.450	13.900	1859.118
10	9.447	-13.902	-1859.118	-9.447	13.902	932.339
11	9.446	-13.903	-932.339	-9.446	13.903	5.490
12	9.446	-13.903	-5.490	-9.446	13.903	-921.358
13	9.447	-13.902	921.358	-9.447	13.902	-1848.139
14	9.450	-13.900	1848.139	-9.450	13.900	-2774.782
15	1534.306	8.670	2774.782	-1534.306	-8.670	-2233.175
16	1534.294	10.616	2233.175	-1534.294	-10.616	-1570.030
17	1534.282	12.422	1570.030	-1534.282	-12.422	-786.038

18	1534.266	14.117	793.033	-1534.266	-14.117	88.813
19	1534.251	15.631	-88.813	-1534.251	-15.631	1065.289
20	1534.237	16.965	-1065.289	-1534.237	-16.965	2125.082
21	1534.224	18.102	-2125.082	-1534.224	-18.102	3255.912
22	1534.213	19.029	-3255.912	-1534.213	-19.029	4444.677
ESFORCOS MINIMOS E MAXIMOS DOS ELEMENTOS						
	Normal min	Corte min	Momento min	Normal max	Corte max	Momento max
----	----kN----	----kN---	----kNcm---	----kN----	----kN---	----kNcm---
Esf.	-1534.306	-13.903	-4445.252	-9.446	19.029	4444.677
Elem	15	12	1	12	22	22
REACOES DOS APOIOS						
No'	Forca Fx	Forca Fy	Momento Mz			
----	----kN---	----kN---	---kNcm---			
1	-9.557	1506.499	4445.252			
23	-9.448	1534.302	4444.677			
ESTADO DAS FATIAS NOS ELEMENTOS						
Fatias do Elemento 1						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	3.440	Fatia=	252	Neg= -23.326 Fatia= 10
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	2.840	Fatia=	252	Neg= -22.622 Fatia= 10
Fatias do Elemento 2						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	2.840	Fatia=	252	Neg= -22.622 Fatia= 10

Fatias do Elemento 3						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	2.268	Fatia= 252	Neg= -21.952	Fatia= 10
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	1.732	Fatia= 252	Neg= -21.419	Fatia= 226
Fatias do Elemento 4						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	1.732	Fatia= 252	Neg= -21.419	Fatia= 226
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	1.237	Fatia= 252	Neg= -21.410	Fatia= 226
Fatias do Elemento 5						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	1.237	Fatia= 252	Neg= -21.410	Fatia= 226
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	1.586	Fatia= 201	Neg= -21.417	Fatia= 227
Fatias do Elemento 6						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	1.585	Fatia= 201	Neg= -21.417	Fatia= 227
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	1.981	Fatia= 201	Neg= -21.617	Fatia= 452
Fatias do Elemento 7						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	1.981	Fatia= 201	Neg= -21.617	Fatia= 452
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	2.320	Fatia= 201	Neg= -22.014	Fatia= 452
Fatias do Elemento 8						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	2.320	Fatia= 201	Neg= -22.014	Fatia= 452
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	2.599	Fatia= 201	Neg= -22.341	Fatia= 452

Fatias do Elemento 9						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	12.330	Fatia= 101	Neg= -12.297 Fatia= 230
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	11.853	Fatia= 101	Neg= -11.748 Fatia= 230
Fatias do Elemento 10						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	11.853	Fatia= 101	Neg= -11.748 Fatia= 230
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	11.376	Fatia= 101	Neg= -11.199 Fatia= 230
Fatias do Elemento 11						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	11.376	Fatia= 101	Neg= -11.199 Fatia= 230
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	10.898	Fatia= 101	Neg= -11.038 Fatia= 116
Fatias do Elemento 12						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	10.898	Fatia= 101	Neg= -11.038 Fatia= 116
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	11.370	Fatia= 130	Neg= -11.192 Fatia= 10
Fatias do Elemento 13						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	11.370	Fatia= 130	Neg= -11.192 Fatia= 10
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	11.847	Fatia= 130	Neg= -11.742 Fatia= 10
Fatias do Elemento 14						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	11.847	Fatia= 130	Neg= -11.742 Fatia= 10
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	12.325	Fatia= 130	Neg= -12.291 Fatia= 10

Fatias do Elemento 15						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	2.406	Fatia= 252	Neg= -22.521 Fatia= 10
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	2.132	Fatia= 252	Neg= -22.199 Fatia= 10
Fatias do Elemento 16						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	2.132	Fatia= 252	Neg= -22.199 Fatia= 10
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	1.796	Fatia= 252	Neg= -21.805 Fatia= 10
Fatias do Elemento 17						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	1.796	Fatia= 252	Neg= -21.805 Fatia= 10
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	1.402	Fatia= 252	Neg= -21.603 Fatia= 226
Fatias do Elemento 18						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	1.403	Fatia= 252	Neg= -21.603 Fatia= 226
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	1.046	Fatia= 201	Neg= -21.596 Fatia= 227
Fatias do Elemento 19						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	1.046	Fatia= 201	Neg= -21.596 Fatia= 227
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	1.541	Fatia= 201	Neg= -21.606 Fatia= 227
Fatias do Elemento 20						
No' Inicial	Tensoes	Max:	Pos=	1.541	Fatia= 201	Neg= -21.606 Fatia= 227
No' Final	Tensoes	Max:	Pos=	2.078	Fatia= 201	Neg= -22.134 Fatia= 452

```
Fatias do Elemento 21
No' Inicial Tensoes Max: Pos= 2.078 Fatia= 201 Neg= -22.134 Fatia= 452
No' Final Tensoes Max: Pos= 2.651 Fatia= 201 Neg= -22.806 Fatia= 452
```

```
Fatias do Elemento 22
Plasticacao: No' Final A/Ag= 99.8 I/Ig= 99.7 Fatias= 1 yg= 149.7 mm
No' Inicial Tensoes Max: Pos= 2.651 Fatia= 201 Neg= -22.806 Fatia= 452
No' Final Tensoes Max: Pos= 3.253 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 452
No' Final Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 452 Neg=-0.000001 Fatia= 452
```

RESUMO:

```
Tensoes Maximas: Pos= 12.330 Elem.= 9 Neg= -23.500 Elem.= 22
Deformacoes Plasticas: Pos= 0.000000 Elem.= 0 Neg=-0.000001 Elem.= 22
Num fatias plastif.: No' Final= 1 Elem.= 22
```

=====

Hipotese 1 - 49.o Incremento - Fator 1.0070 - 304.a Iteracao
 Converge com: 0.0050 (99.60 % da tolerancia), com criterio 4.

DESLOCAMENTOS NODAIS

No'	Desloc. X	Desloc. Y	Rotacao Z
---	----cm----	----cm----	---rad.-----grau----
1	0.000000	0.000000	0.000000

2	0.096627	-0.063085	-0.0026957	-0.154452		
3	0.304245	-0.126269	-0.0038685	-0.221647		
4	0.567914	-0.189258	-0.0045014	-0.257910		
5	0.855874	-0.251863	-0.0046511	-0.266487		
6	1.139107	-0.314134	-0.0043534	-0.249429		
7	1.390611	-0.376222	-0.0036370	-0.208384		
8	1.585075	-0.438012	-0.0025292	-0.144914		
9	1.699056	-0.499779	-0.0010631	-0.060913		
10	1.698655	-0.542505	-0.0002693	-0.015431		
11	1.698268	-0.542450	0.0002203	0.012620		
12	1.697878	-0.519897	0.0004056	0.023239		
13	1.697487	-0.495132	0.0002866	0.016423		
14	1.697100	-0.488440	-0.0001366	-0.007826		
15	1.696706	-0.520104	-0.0008640	-0.049505		
16	1.594824	-0.455719	-0.0023456	-0.134394		
17	1.410668	-0.391478	-0.0034943	-0.200209		
18	1.166354	-0.326956	-0.0042679	-0.244533		
19	0.886431	-0.262222	-0.0046324	-0.265420		
20	0.597320	-0.197160	-0.0045592	-0.261224		
21	0.327410	-0.131644	-0.0040128	-0.229915		
22	0.107807	-0.065857	-0.0029384	-0.168357		
23	0.000000	0.000000	0.0000000	0.000000		
ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS						
Elem	J Normal	J Corte	J Momento	K Normal	K Corte	K Momento
----	----kN----	----kN---	----kNcm---	----kN----	----kN---	----kNcm---
1	2780.526	40.427	9853.452	-2780.526	-40.427	-7329.253
2	2780.486	42.596	7329.255	-2780.486	-42.596	-4669.615
3	2780.401	42.200	4669.614	2780.401	42.200	2027.004

4	2780.516	40.607	2027.903	-2780.517	-40.607	507.567
5	2780.559	37.613	-507.568	-2780.559	-37.613	2856.100
6	2780.613	33.417	-2856.102	-2780.613	-33.417	4942.608
7	2780.673	28.093	-4942.610	-2780.673	-28.093	6696.712
8	2780.730	21.725	-6696.716	-2780.730	-21.725	8053.208
9	15.837	-38.845	-8053.233	-15.837	38.845	5463.584
10	15.812	-38.855	-5463.584	-15.812	38.855	2873.258
11	15.799	-38.860	-2873.258	-15.799	38.860	282.577
12	15.798	-38.861	-282.577	-15.798	38.861	-2308.139
13	15.808	-38.857	2308.139	-15.808	38.857	-4898.570
14	15.831	-38.848	4898.570	-15.831	38.848	-7488.394
15	2858.448	17.615	7488.362	-2858.448	-17.615	-6388.571
16	2858.398	24.243	6388.566	-2858.398	-24.243	-4874.935
17	2858.344	29.858	4874.932	-2858.344	-29.858	-3010.684
18	2858.293	34.350	3010.681	-2858.293	-34.350	-865.998
19	2858.252	37.632	865.995	-2858.252	-37.632	1483.603
20	2858.225	39.614	-1483.604	-2858.225	-39.614	3956.963
21	2858.217	40.172	-3956.964	-2858.217	-40.172	6465.174
22	2858.255	37.906	-6465.173	-2858.255	-37.906	8831.900
ESFORCOS MINIMOS E MAXIMOS DOS ELEMENTOS						
	Normal min	Corte min	Momento min	Normal max	Corte max	Momento max
----	----kN----	----kN---	----kNcm---	----kN----	----kN---	----kNcm---
Esf.	-2858.448	-38.861	-9853.452	-15.798	42.596	8831.900
Elem	15	12	1	12	2	22
REACOES DOS APOIOS						
No'	Forca	Fx	Forca	Fy	Momento	Mz

```

----      ----kN---      ----kN---      ---kNcm---
  1         -19.433         2780.745         9854.060
 23         -15.812         2858.455         8832.476
    
```

ESTADO DAS FATIAS NOS ELEMENTOS

Fatias do Elemento 1

```

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 44.7 I/Ig= 48.8 Fatias= 253 yg= 284.8 mm
                No' Final  A/Ag= 91.1 I/Ig= 99.1 Fatias= 183 yg= 151.4 mm
    
```

```

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -1.054 Fatia= 443 Neg= -23.500 Fatia= 1
No' Final   Tensoes Max: Pos= -3.728 Fatia= 443 Neg= -23.500 Fatia= 212
    
```

```

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000000 Fatia= 402 Neg=-0.001817 Fatia= 10
No' Final   Deform Plas: Pos=-0.000004 Fatia= 212 Neg=-0.000766 Fatia= 10
    
```

Fatias do Elemento 2

```

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 91.1 I/Ig= 99.1 Fatias= 183 yg= 151.4 mm
                No' Final  A/Ag= 87.4 I/Ig= 90.5 Fatias= 174 yg= 136.6 mm
    
```

```

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -3.728 Fatia= 443 Neg= -23.500 Fatia= 212
No' Final   Tensoes Max: Pos= -5.648 Fatia= 252 Neg= -23.500 Fatia= 223
    
```

```

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000004 Fatia= 212 Neg=-0.000766 Fatia= 10
No' Final   Deform Plas: Pos=-0.000000 Fatia= 135 Neg=-0.000592 Fatia= 10
    
```

Fatias do Elemento 3

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 87.4 I/Ig= 90.5 Fatias= 174 yg= 136.6 mm							
No' Final A/Ag= 82.7 I/Ig= 85.8 Fatias= 160 yg= 128.9 mm							
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	-5.648	Fatia=	252	Neg=	-23.500 Fatia= 223
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	-7.391	Fatia=	252	Neg=	-23.500 Fatia= 222
No' Inicial	Deform Plas:	Pos=-0.000000	Fatia=	135	Neg=-0.000592	Fatia=	10
No' Final	Deform Plas:	Pos=-0.000000	Fatia=	6	Neg=-0.000459	Fatia=	10
Fatias do Elemento 4							
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 82.7 I/Ig= 85.8 Fatias= 160 yg= 128.9 mm							
No' Final A/Ag= 77.5 I/Ig= 81.1 Fatias= 179 yg= 120.3 mm							
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	-7.391	Fatia=	252	Neg=	-23.500 Fatia= 222
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	-8.568	Fatia=	201	Neg=	-23.500 Fatia= 220
No' Inicial	Deform Plas:	Pos=-0.000000	Fatia=	6	Neg=-0.000459	Fatia=	10
No' Final	Deform Plas:	Pos=-0.000000	Fatia=	236	Neg=-0.000391	Fatia=	227
Fatias do Elemento 5							
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 77.5 I/Ig= 81.1 Fatias= 179 yg= 120.3 mm							
No' Final A/Ag= 72.7 I/Ig= 76.3 Fatias= 180 yg= 110.6 mm							
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	-8.568	Fatia=	201	Neg=	-23.500 Fatia= 220
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	-6.926	Fatia=	201	Neg=	-23.500 Fatia= 219
No' Inicial	Deform Plas:	Pos=-0.000000	Fatia=	236	Neg=-0.000391	Fatia=	227
No' Final	Deform Plas:	Pos=-0.000000	Fatia=	227	Neg=-0.000459	Fatia=	150

Fatias do Elemento 6

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 72.7 I/Ig= 76.3 Fatias= 180 yg= 110.6 mm
 No' Final A/Ag= 68.5 I/Ig= 71.7 Fatias= 179 yg= 100.0 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -6.926 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 219
 No' Final Tensoes Max: Pos= -5.570 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 219

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 237 Neg=-0.000486 Fatia= 452
 No' Final Deform Plas: Pos=-0.000000 Fatia= 267 Neg=-0.000600 Fatia= 452

Fatias do Elemento 7

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 68.2 I/Ig= 71.7 Fatias= 179 yg= 100.0 mm
 No' Final A/Ag= 64.8 I/Ig= 67.9 Fatias= 196 yg= 89.7 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -5.571 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 219
 No' Final Tensoes Max: Pos= -4.293 Fatia= 1 Neg= -23.500 Fatia= 219

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000000 Fatia= 267 Neg=-0.000600 Fatia= 452
 No' Final Deform Plas: Pos=-0.000000 Fatia= 316 Neg=-0.000715 Fatia= 452

Fatias do Elemento 8

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 64.8 I/Ig= 67.9 Fatias= 196 yg= 89.7 mm
 No' Final A/Ag= 60.4 I/Ig= 63.9 Fatias= 198 yg= 77.2 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -4.293 Fatia= 1 Neg= -23.500 Fatia= 219
 No' Final Tensoes Max: Pos= -3.267 Fatia= 1 Neg= -23.500 Fatia= 218

No' Inicial	Deform Plas:	Pos=-0.000000	Fatia= 316	Neg=-0.000715	Fatia= 452
No' Final	Deform Plas:	Pos=-0.000001	Fatia= 179	Neg=-0.000827	Fatia= 452
Fatias do Elemento 9					
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos= 15.230	Fatia= 1	Neg= -15.468	Fatia= 230
No' Final	Tensoes Max:	Pos= 13.695	Fatia= 1	Neg= -13.933	Fatia= 230
Fatias do Elemento 10					
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos= 13.695	Fatia= 1	Neg= -13.933	Fatia= 230
No' Final	Tensoes Max:	Pos= 12.327	Fatia= 101	Neg= -12.397	Fatia= 230
Fatias do Elemento 11					
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos= 12.328	Fatia= 101	Neg= -12.397	Fatia= 230
No' Final	Tensoes Max:	Pos= 10.993	Fatia= 101	Neg= -11.090	Fatia= 116
Fatias do Elemento 12					
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos= 10.993	Fatia= 101	Neg= -11.090	Fatia= 116
No' Final	Tensoes Max:	Pos= 12.037	Fatia= 130	Neg= -12.062	Fatia= 10
Fatias do Elemento 13					
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos= 12.036	Fatia= 130	Neg= -12.062	Fatia= 10
No' Final	Tensoes Max:	Pos= 13.370	Fatia= 130	Neg= -13.598	Fatia= 10
Fatias do Elemento 14					

No' Inicial Tensoes Max: Pos= 13.370 Fatia= 130 Neg= -13.598 Fatia= 10
 No' Final Tensoes Max: Pos= 14.895 Fatia= 221 Neg= -15.133 Fatia= 10

Fatias do Elemento 15

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 58.0 I/Ig= 61.6 Fatias= 226 yg= 231.0 mm
 No' Final A/Ag= 62.8 I/Ig= 66.5 Fatias= 204 yg= 214.9 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -4.232 Fatia= 443 Neg= -23.500 Fatia= 3
 No' Final Tensoes Max: Pos= -5.122 Fatia= 443 Neg= -23.500 Fatia= 4

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000000 Fatia= 451 Neg=-0.000875 Fatia= 10
 No' Final Deform Plas: Pos=-0.000024 Fatia= 212 Neg=-0.000770 Fatia= 10

Fatias do Elemento 16

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 62.8 I/Ig= 66.5 Fatias= 204 yg= 214.9 mm
 No' Final A/Ag= 67.6 I/Ig= 71.4 Fatias= 188 yg= 201.2 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -5.122 Fatia= 443 Neg= -23.500 Fatia= 4
 No' Final Tensoes Max: Pos= -6.283 Fatia= 252 Neg= -23.500 Fatia= 5

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000024 Fatia= 212 Neg=-0.000770 Fatia= 10
 No' Final Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 310 Neg=-0.000658 Fatia= 10

Fatias do Elemento 17

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 67.6 I/Ig= 71.4 Fatias= 188 yg= 201.2 mm
 No' Final A/Ag= 71.6 I/Ig= 76.1 Fatias= 182 yg= 189.9 mm

```

No' Inicial Tensoes Max: Pos=  -6.283  Fatia= 252   Neg=  -23.500  Fatia=  5
No' Final   Tensoes Max: Pos=  -7.563  Fatia= 252   Neg=  -23.500  Fatia=  6

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000001  Fatia= 310   Neg=-0.000658  Fatia= 10
No' Final   Deform Plas: Pos=-0.000002  Fatia= 236   Neg=-0.000545  Fatia= 10

Fatias do Elemento  18

Plastificacao: No' Inicial A/Ag=  71.6  I/Ig=  76.1  Fatias= 182  yg=  189.9 mm
                No' Final   A/Ag=  76.0  I/Ig=  80.9  Fatias= 181  yg=  179.9 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos=  -7.563  Fatia= 252   Neg=  -23.500  Fatia=  6
No' Final   Tensoes Max: Pos=  -9.130  Fatia= 252   Neg=  -23.500  Fatia=  7

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000002  Fatia= 236   Neg=-0.000545  Fatia= 10
No' Final   Deform Plas: Pos=-0.000005  Fatia= 216   Neg=-0.000434  Fatia= 10

Fatias do Elemento  19

Plastificacao: No' Inicial A/Ag=  76.0  I/Ig=  80.9  Fatias= 181  yg=  179.9 mm
                No' Final   A/Ag=  80.0  I/Ig=  85.5  Fatias= 181  yg=  170.9 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos=  -9.129  Fatia= 252   Neg=  -23.500  Fatia=  7
No' Final   Tensoes Max: Pos=  -8.535  Fatia= 201   Neg=  -23.500  Fatia=  8

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000004  Fatia= 216   Neg=-0.000434  Fatia= 10
No' Final   Deform Plas: Pos=-0.000009  Fatia= 258   Neg=-0.000479  Fatia= 452

Fatias do Elemento  20

```

```

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 80.0 I/Ig= 85.5 Fatias= 181 yg= 170.9 mm
                No' Final   A/Ag= 81.0 I/Ig= 86.8 Fatias= 196 yg= 168.3 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -8.535 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 8
No' Final   Tensoes Max: Pos= -6.790 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 9

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000009 Fatia= 258 Neg=-0.000479 Fatia= 452
No' Final   Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 58  Neg=-0.000608 Fatia= 452

Fatias do Elemento 21

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 81.0 I/Ig= 86.8 Fatias= 196 yg= 168.3 mm
                No' Final   A/Ag= 77.3 I/Ig= 84.1 Fatias= 204 yg= 153.2 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -6.790 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 9
No' Final   Tensoes Max: Pos= -4.972 Fatia= 1    Neg= -23.500 Fatia= 9

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 58  Neg=-0.000608 Fatia= 452
No' Final   Deform Plas: Pos=-0.000013 Fatia= 9   Neg=-0.000777 Fatia= 452

Fatias do Elemento 22

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 77.3 I/Ig= 84.1 Fatias= 204 yg= 153.2 mm
                No' Final   A/Ag= 42.9 I/Ig= 47.6 Fatias= 261 yg= 13.9 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -4.972 Fatia= 1    Neg= -23.500 Fatia= 9
No' Final   Tensoes Max: Pos= -2.023 Fatia= 1    Neg= -23.500 Fatia= 130

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000013 Fatia= 9   Neg=-0.000777 Fatia= 452
No' Final   Deform Plas: Pos=-0.000007 Fatia= 100  Neg=-0.000147 Fatia= 452
    
```

RESUMO:

Tensoes Maximas: Pos= 15.230 Elem.= 9 Neg= -23.500 Elem.= 1
 Deformacoes Plasticas: Pos= 0.000000 Elem.= 0 Neg=-0.001817 Elem.= 1
 Num fatias plastif.: No' Inicial=253 Elem.= 1 No' Final=261 Elem.= 22

=====

Hipotese 1 - 50.o Incremento - Fator 1.0080 - 250.a Iteracao

DESLOCAMENTOS NODAIS

No'	Desloc. X	Desloc. Y	Rotacao Z
---	----cm----	----cm----	---rad.-----grau----
1	0.000000	0.000000	0.0000000
2	0.222670	-0.069263	-0.0058930
3	0.638362	-0.135118	-0.0073074
4	1.119337	-0.200106	-0.0080066
5	1.625407	-0.264417	-0.0081132
6	2.120303	-0.328127	-0.0076490
7	2.568482	-0.391341	-0.0066140
8	2.932991	-0.454135	-0.0049570
9	3.147318	-0.522263	-0.0016016
10	3.146949	-0.589873	-0.0004932
11	3.146614	-0.596903	0.0002158
12	3.146275	-0.569981	0.0005253
13	3.145932	-0.535741	0.0004353
14	3.145597	-0.520815	-0.0000541
15	3.145255	-0.551836	-0.0009431
16	3.045255	-0.451836	0.0050500

17	2.578701	-0.409278	-0.0065981	-0.378045
18	2.133013	-0.343240	-0.0075921	-0.434993
19	1.641788	-0.276615	-0.0080597	-0.461789
20	1.137820	-0.209368	-0.0080006	-0.458403
21	0.655005	-0.141354	-0.0073770	-0.422671
22	0.231913	-0.072341	-0.0060689	-0.347723
23	0.000000	0.000000	0.0000000	0.000000

ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

Elem	J Normal	J Corte	J Momento	K Normal	K Corte	K Momento
----	----kN----	----kN----	----kNcm----	----kN----	----kN----	----kNcm----
1	2895.126	4.720	8465.291	-2895.126	-4.720	-8170.584
2	2794.557	48.329	8452.658	-2794.557	-48.329	-5435.050
3	2770.277	51.416	5370.075	-2770.277	-51.416	-2159.719
4	2763.092	53.606	2148.038	-2763.092	-53.606	1199.110
5	2768.850	49.076	-1177.124	-2768.850	-49.076	4241.408
6	2774.427	43.265	-4242.143	-2774.427	-43.265	6943.551
7	2787.436	34.148	-6957.550	-2787.436	-34.148	9089.704
8	2908.482	1.561	-8042.679	-2908.482	-1.561	8140.115
9	13.703	-51.001	-11137.001	-13.703	51.001	7736.941
10	13.667	-51.014	-7736.943	-13.667	51.014	4336.052
11	13.645	-51.021	-4336.053	-13.645	51.021	934.698
12	13.639	-51.022	-934.697	-13.639	51.022	-2466.759
13	13.652	-51.018	2466.760	-13.652	51.018	-5867.953
14	13.686	-51.009	5867.954	-13.686	51.009	-9268.519
15	3102.732	1.099	5520.271	-3102.732	-1.099	-5451.679
16	2868.275	30.325	8033.059	-2868.275	-30.325	-6139.704
17	2865.431	37.340	6161.197	-2865.431	-37.340	-3829.833
18	2862.885	42.861	3857.822	-2862.885	-42.861	-1175.614

19	2861.301	46.868	1213.596	-2861.301	-46.868	1712.709
20	2867.198	45.674	-1722.708	-2867.198	-45.674	4574.405
21	2890.373	42.765	-4653.441	-2890.373	-42.765	7323.515
22	2969.160	4.803	-7147.966	-2969.160	-4.803	7447.833
ESFORÇOS MINIMOS E MAXIMOS DOS ELEMENTOS						
	Normal min	Corte min	Momento min	Normal max	Corte max	Momento max
----	----kN----	----kN---	----kNcm---	----kN----	----kN---	----kNcm---
Esf.	-3102.732	-51.022	-9268.519	-13.639	53.606	11137.001
Elem	15	12	14	12	4	9
REACOES DOS APOIOS						
No'	Forca Fx	Forca Fy	Momento Mz			
----	----kN---	----kN---	---kNcm---			
1	-21.614	2771.385	11849.344			
23	-13.666	2873.415	10189.195			
ESTADO DAS FATIAS NOS ELEMENTOS						
Fatias do Elemento 1						
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 40.6 I/Ig= 46.1 Fatias= 267 yg= 288.2 mm						
No' Final A/Ag= 57.1 I/Ig= 60.8 Fatias= 259 yg= 231.5 mm						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	-0.592	Fatia=	443	Neg= -23.500 Fatia= 1
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	-3.796	Fatia=	443	Neg= -23.500 Fatia= 1
No' Inicial	Tensoes Min:	Pos=	0.00000	Fatia=	201	Neg= 0.004500 Fatia= 10

No' Final	Deform Plas: Pos=-0.000000	Fatia= 321	Neg=-0.001091	Fatia= 10
Fatias do Elemento 2				
Plastificacao: No' Inicial	A/Ag= 60.8	I/Ig= 64.4	Fatias= 206	yg= 221.3 mm
No' Final	A/Ag= 74.4	I/Ig= 72.5	Fatias= 182	yg= 195.3 mm
No' Inicial	Tensoes Max: Pos= -3.054	Fatia= 443	Neg= -23.500	Fatia= 3
No' Final	Tensoes Max: Pos= -5.343	Fatia= 443	Neg= -23.500	Fatia= 5
No' Inicial	Deform Plas: Pos=-0.000023	Fatia= 235	Neg=-0.000891	Fatia= 10
No' Final	Deform Plas: Pos=-0.000004	Fatia= 214	Neg=-0.000643	Fatia= 10
Fatias do Elemento 3				
Plastificacao: No' Inicial	A/Ag= 76.1	I/Ig= 72.9	Fatias= 180	yg= 193.2 mm
No' Final	A/Ag= 87.6	I/Ig= 85.9	Fatias= 160	yg= 130.5 mm
No' Inicial	Tensoes Max: Pos= -5.223	Fatia= 252	Neg= -23.500	Fatia= 5
No' Final	Tensoes Max: Pos= -7.255	Fatia= 252	Neg= -23.444	Fatia= 221
No' Inicial	Deform Plas: Pos=-0.000016	Fatia= 195	Neg=-0.000619	Fatia= 10
No' Final	Deform Plas: Pos=-0.000000	Fatia= 6	Neg=-0.000459	Fatia= 10
Fatias do Elemento 4				
Plastificacao: No' Inicial	A/Ag= 87.9	I/Ig= 86.0	Fatias= 160	yg= 130.8 mm
No' Final	A/Ag= 79.4	I/Ig= 81.1	Fatias= 179	yg= 120.5 mm

No' Final	Tensoes Max: Pos=	-8.098	Fatia= 201	Neg=	-23.500	Fatia= 230
No' Inicial	Deform Plas: Pos=-	0.000000	Fatia= 6	Neg=-	0.000459	Fatia= 10
No' Final	Deform Plas: Pos=-	0.000005	Fatia= 236	Neg=-	0.000397	Fatia= 452
Fatias do Elemento 5						
Plastificacao: No' Inicial	A/Ag=	79.0	I/Ig=	81.1	Fatias= 179	yg= 120.4 mm
No' Final	A/Ag=	73.5	I/Ig=	76.3	Fatias= 180	yg= 110.6 mm
No' Inicial	Tensoes Max: Pos=	-8.148	Fatia= 201	Neg=	-23.500	Fatia= 227
No' Final	Tensoes Max: Pos=	-6.145	Fatia= 201	Neg=	-23.500	Fatia= 222
No' Inicial	Deform Plas: Pos=-	0.000005	Fatia= 7	Neg=-	0.000399	Fatia= 452
No' Final	Deform Plas: Pos=-	0.000011	Fatia= 218	Neg=-	0.000551	Fatia= 452
Fatias do Elemento 6						
Plastificacao: No' Inicial	A/Ag=	73.5	I/Ig=	76.3	Fatias= 180	yg= 110.6 mm
No' Final	A/Ag=	64.6	I/Ig=	68.1	Fatias= 202	yg= 90.2 mm
No' Inicial	Tensoes Max: Pos=	-6.185	Fatia= 201	Neg=	-23.500	Fatia= 221
No' Final	Tensoes Max: Pos=	-4.301	Fatia= 1	Neg=	-23.500	Fatia= 218
No' Inicial	Deform Plas: Pos=-	0.000011	Fatia= 218	Neg=-	0.000555	Fatia= 452
No' Final	Deform Plas: Pos=-	0.000001	Fatia= 266	Neg=-	0.000726	Fatia= 452
Fatias do Elemento 7						
No' Inicial	Tensoes Max: Pos=	-6.185	Fatia= 201	Neg=	-23.500	Fatia= 221
No' Final	Tensoes Max: Pos=	-4.301	Fatia= 1	Neg=	-23.500	Fatia= 218
No' Inicial	Deform Plas: Pos=-	0.000011	Fatia= 218	Neg=-	0.000555	Fatia= 452
No' Final	Deform Plas: Pos=-	0.000001	Fatia= 266	Neg=-	0.000726	Fatia= 452

No' Final	A/Ag= 57.7	I/Ig= 61.4	Fatias= 242	yg= 67.9 mm			
No' Inicial	Tensoes Max: Pos= -4.375	Fatia= 1	Neg= -23.500	Fatia= 218			
No' Final	Tensoes Max: Pos= -2.706	Fatia= 1	Neg= -23.500	Fatia= 218			
No' Inicial	Deform Plas: Pos=-0.000011	Fatia= 218	Neg=-0.000741	Fatia= 452			
No' Final	Deform Plas: Pos=-0.000003	Fatia= 314	Neg=-0.000961	Fatia= 452			
Fatias do Elemento 8							
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 52.1 I/Ig= 56.0 Fatias= 277 yg= 46.7 mm							
No' Final A/Ag= 45.5 I/Ig= 49.7 Fatias= 267 yg= 15.2 mm							
No' Inicial	Tensoes Max: Pos= -3.931	Fatia= 1	Neg= -23.500	Fatia= 216			
No' Final	Tensoes Max: Pos= -2.990	Fatia= 1	Neg= -23.500	Fatia= 120			
No' Inicial	Deform Plas: Pos=-0.000010	Fatia= 9	Neg=-0.001244	Fatia= 452			
No' Final	Deform Plas: Pos=-0.000005	Fatia= 139	Neg=-0.002074	Fatia= 452			
Fatias do Elemento 9							
No' Inicial	Tensoes Max: Pos= 17.074	Fatia= 1	Neg= -17.280	Fatia= 230			
No' Final	Tensoes Max: Pos= 15.058	Fatia= 1	Neg= -15.264	Fatia= 230			
Fatias do Elemento 10							
No' Inicial	Tensoes Max: Pos= 15.058	Fatia= 1	Neg= -15.264	Fatia= 230			
No' Final	Tensoes Max: Pos= 13.097	Fatia= 101	Neg= -13.248	Fatia= 230			

```

No' Inicial Tensoes Max: Pos= 13.097 Fatia= 101 Neg= -13.248 Fatia= 230
No' Final Tensoes Max: Pos= 11.345 Fatia= 101 Neg= -11.232 Fatia= 230

Fatias do Elemento 12

No' Inicial Tensoes Max: Pos= 11.345 Fatia= 101 Neg= -11.232 Fatia= 230
No' Final Tensoes Max: Pos= 12.134 Fatia= 130 Neg= -12.140 Fatia= 10

Fatias do Elemento 13

No' Inicial Tensoes Max: Pos= 12.134 Fatia= 130 Neg= -12.140 Fatia= 10
No' Final Tensoes Max: Pos= 13.951 Fatia= 221 Neg= -14.156 Fatia= 10

Fatias do Elemento 14

No' Inicial Tensoes Max: Pos= 13.950 Fatia= 221 Neg= -14.156 Fatia= 10
No' Final Tensoes Max: Pos= 15.966 Fatia= 221 Neg= -16.172 Fatia= 10

Fatias do Elemento 15

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 41.5 I/Ig= 46.4 Fatias= 299 yg= 286.7 mm
                No' Final A/Ag= 46.2 I/Ig= 50.1 Fatias= 301 yg= 282.0 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -6.159 Fatia= 443 Neg= -23.500 Fatia= 1
No' Final Tensoes Max: Pos= -7.228 Fatia= 443 Neg= -23.500 Fatia= 1

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000000 Fatia= 244 Neg=-0.002737 Fatia= 10
No' Final Deform Plas: Pos=-0.000009 Fatia= 450 Neg=-0.001617 Fatia= 10

```

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 53.1 I/Ig= 56.9 Fatias= 245 yg= 249.2 mm						
No' Final A/Ag= 62.1 I/Ig= 66.3 Fatias= 210 yg= 215.9 mm						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	-4.051	Fatia=	443	Neg= -23.500 Fatia= 2
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	-5.548	Fatia=	443	Neg= -23.500 Fatia= 4
No' Inicial	Deform Plas:	Pos=-0.000003	Fatia=	142	Neg=-0.000961	Fatia= 10
No' Final	Deform Plas:	Pos=-0.000001	Fatia=	310	Neg=-0.000758	Fatia= 10
Fatias do Elemento 17						
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 62.4 I/Ig= 66.5 Fatias= 210 yg= 215.0 mm						
No' Final A/Ag= 67.2 I/Ig= 71.4 Fatias= 201 yg= 201.2 mm						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	-5.516	Fatia=	443	Neg= -23.500 Fatia= 4
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	-7.205	Fatia=	252	Neg= -23.500 Fatia= 5
No' Inicial	Deform Plas:	Pos=-0.000001	Fatia=	310	Neg=-0.000757	Fatia= 10
No' Final	Deform Plas:	Pos=-0.000001	Fatia=	185	Neg=-0.000595	Fatia= 10
Fatias do Elemento 18						
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 67.2 I/Ig= 71.4 Fatias= 201 yg= 201.2 mm						
No' Final A/Ag= 72.0 I/Ig= 76.2 Fatias= 181 yg= 189.4 mm						
No' Inicial	Tensoes Max:	Pos=	-7.173	Fatia=	252	Neg= -23.500 Fatia= 5
No' Final	Tensoes Max:	Pos=	-9.008	Fatia=	252	Neg= -23.500 Fatia= 7
No' Inicial	Deform Plas:	Pos=-0.000000	Fatia=	185	Neg=-0.000595	Fatia= 10
No' Final	Deform Plas:	Pos=-0.000010	Fatia=	210	Neg=-0.000451	Fatia= 10

Fatias do Elemento 19						
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 72.0 I/Ig= 76.2 Fatias= 181 yg= 189.4 mm						
No' Final A/Ag= 76.8 I/Ig= 81.9 Fatias= 181 yg= 177.5 mm						
No' Inicial Tensoes Max: Pos= -8.976 Fatia= 252 Neg= -23.500 Fatia= 7						
No' Final Tensoes Max: Pos= -8.441 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 222						
No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000013 Fatia= 216 Neg=-0.000451 Fatia= 10						
No' Final Deform Plas: Pos=-0.000009 Fatia= 258 Neg=-0.000479 Fatia= 452						
Fatias do Elemento 20						
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 76.8 I/Ig= 81.9 Fatias= 181 yg= 177.5 mm						
No' Final A/Ag= 56.3 I/Ig= 58.4 Fatias= 197 yg= 116.4 mm						
No' Inicial Tensoes Max: Pos= -8.479 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 217						
No' Final Tensoes Max: Pos= -6.548 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 218						
No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000013 Fatia= 258 Neg=-0.000482 Fatia= 452						
No' Final Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 58 Neg=-0.000645 Fatia= 452						
Fatias do Elemento 21						
Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 55.8 I/Ig= 58.1 Fatias= 199 yg= 116.9 mm						
No' Final A/Ag= 58.3 I/Ig= 62.1 Fatias= 228 yg= 71.0 mm						
No' Inicial Tensoes Max: Pos= -6.681 Fatia= 201 Neg= -23.500 Fatia= 217						
No' Final Tensoes Max: Pos= -4.587 Fatia= 1 Neg= -23.500 Fatia= 217						

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 58 Neg=-0.000669 Fatia= 452
 No' Final Deform Plas: Pos=-0.000013 Fatia= 9 Neg=-0.000904 Fatia= 452

Fatias do Elemento 22

Plastificacao: No' Inicial A/Ag= 48.9 I/Ig= 51.8 Fatias= 267 yg= 75.9 mm
 No' Final A/Ag= 38.4 I/Ig= 43.9 Fatias= 281 yg= 11.3 mm

No' Inicial Tensoes Max: Pos= -5.193 Fatia= 1 Neg= -23.500 Fatia= 9
 No' Final Tensoes Max: Pos= -1.730 Fatia= 1 Neg= -23.500 Fatia= 50

No' Inicial Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 323 Neg=-0.001070 Fatia= 452
 No' Final Deform Plas: Pos=-0.000001 Fatia= 168 Neg=-0.004846 Fatia= 452

RESUMO:

Tensoes Maximas: Pos= 17.074 Elem.= 9 Neg= -23.500 Elem.= 1
 Deformacoes Plasticas: Pos= 0.000000 Elem.= 0 Neg=-0.004532 Elem.= 1
 Num fatias plastif.: No' Inicial=299 Elem.= 15 No' Final=301 Elem.= 15

Hipotese 1 - 50.o Incremento- Fator 1.0080 - 251.a Iteracao

A M.R.G. ficou singular no GDL : 63 indicando COLAPSO.
 Corresponde a deslocamento rz do no' 22

Dados de entrada lidos ou gerados por PPLANAV1/2 para esse problema:

"Identificacao: ", "Portal de Vogel (1985) c/ 22 EF"

"Dados Gerais da Estrutura"

"Numero de nos Nnos =", 23

"Numero de elementos Nele =", 22

"Numero de barras Nbar =", 3

"Numero de restricoes Nrst =", 6

"Numero de nos suportes Nsup =", 2

"Numero de materiais Nmr =", 1

"Numero de propriedades Npr =", 2

"Numero de tipos de lig. Ntl =", 0

"Numero de rotulas Nrot =", 0

"Numero de ligacoes Nlga =", 0

"Graus de liberdade Ngl =", 63

"Largura min. banda S Lb =", 6

"Coordenadas dos Nos [cm]"

"No Coord X Coord Y"

1,0,0

2,0,62.5

3,0,125

4,0,187.5

5,0,250

6,0,312.5

7,0,375

8,0,437.5

9,0,500

10,66.6666666666667,500

11,133.3333333333333,500

12,200,500

13,266.6666666666667,500

14,333.3333333333334,500

15,400,500

16,400,437.5

17,400,375

18,400,312.5

19,400,250

20,400,187.5

21,400,125

22,400,62.5

23,400,0

"Incidencia dos Elementos"

"Elem no in no fn __Cx__ __Cy__ __L_cm__

__Fi__gr_"

1,1,2,0,1,62.5,90

2,2,3,0,1,62.5,90

3,3,4,0,1,62.5,90

4,4,5,0,1,62.5,90

5,5,6,0,1,62.5,90

```

6,6,7,0,1,62.5,90
7,7,8,0,1,62.5,90
8,8,9,0,1,62.5,90
9,9,10,1,0,66.66666666666667,0
10,10,11,1,0,66.66666666666667,0
11,11,12,1,0,66.66666666666666,0
12,12,13,1,0,66.66666666666669,0
13,13,14,1,0,66.66666666666669,0
14,14,15,1,0,66.66666666666663,0
15,15,16,0,-1,62.5,270
16,16,17,0,-1,62.5,270
17,17,18,0,-1,62.5,270
18,18,19,0,-1,62.5,270
19,19,20,0,-1,62.5,270
20,20,21,0,-1,62.5,270
21,21,22,0,-1,62.5,270
22,22,23,0,-1,62.5,270
"Dimensoes das Secoes e Numero de Fatias"
"Num. Dimensoes do Perfil I [mm]          Quantidade de
Fatias          "
"Prop Altura Largura ___Espessuras___  Metade
Flange|Alma |Total"
"          Flange |  Alma  horiz.|vert.
|vert.|          "
1,30,30,1.996500015258789,1.122999906539917,10,20,52
2,33,30,1.749799966812134,.9494999647140503,10,10,30
"Propriedades Geometricas das Secoes"
"Num. _____Areas [cm2] _____ Mod. Resistencia [cm3]
Inercia _Peso_"
"Prop Alma  Flange  Total Elastico  Plastico
[cm4]      [kN/m]"
1,29.20585823059082,59.89500045776367,148.9958648681641,
1678.043332635386,1867.158832932981,25170.64998953079,1.
147268176078796
2,28.01062965393066,52.49399948120117,132.9986267089844,
1678.203668049351,1847.029179555107,27690.36052281429,1.
024089455604553
"Propriedades dos Materiais"
"Diagrama de Analise F x e: "
"-Elastico perfeitamente plastico",2
"Tensoes Residuais  Fr:          "
"-Diagrama linear p/ flange e alma          ",4
"Modulo Elasticidade E[kN/cm2]=",20500
"Num.  Escoamento  Residual  Parametros do Diagrama"
"Mat.   [kN/cm2]    [kN/cm2]  H|a      eo|b      n      "
1,23.5,11.75,0,0,0
"Restricoes Nodais"
"No      Irx      Iry      Irz"

```

```

1,1,1,1
23,1,1,1
"Dados das Ligacoes"
"Num Lig.    Rigidez Inicial    Momento Ult.    Expoente"
"           Rki [kN.m/rad]      Mu [kN.m]      n []    "
"Materiais-Secoos-Ligacoes-Curvatura-Prumo"
"Elem Barra Pos. Material Secao Extremo Ligacao
Curvatura Fora prumo"
1,101,1,1,0,0,-1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
2,102,1,1,0,0,-1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
3,103,1,1,0,0,-1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
4,104,1,1,0,0,-1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
5,105,1,1,0,0,-1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
6,106,1,1,0,0,-1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
7,107,1,1,0,0,-1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
8,108,1,1,0,0,-1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
9,201,1,2,0,0,0,2.499999944120646E-003
10,202,1,2,0,0,0,2.499999944120646E-003
11,203,1,2,0,0,0,2.499999944120646E-003
12,204,1,2,0,0,0,2.499999944120646E-003
13,205,1,2,0,0,0,2.499999944120646E-003
14,206,1,2,0,0,0,2.499999944120646E-003
15,301,1,1,0,0,1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
16,302,1,1,0,0,1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
17,303,1,1,0,0,1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
18,304,1,1,0,0,1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
19,305,1,1,0,0,1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
20,306,1,1,0,0,1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
21,307,1,1,0,0,1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
22,308,1,1,0,0,1.000000047497451E-
003,2.499999944120646E-003
"Modelo de barras com curvatura inicial  ", "S"
"Modelo com barras fora de prumo      ", "S"

```

```

"Matriz Indicadora de Deslocamentos"
1,64,65,66
2,1,2,3
3,4,5,6
4,7,8,9
5,10,11,12
6,13,14,15
7,16,17,18
8,19,20,21
9,22,23,24
10,25,26,27
11,28,29,30
12,31,32,33
13,34,35,36
14,37,38,39
15,40,41,42
16,43,44,45
17,46,47,48
18,49,50,51
19,52,53,54
20,55,56,57
21,58,59,60
22,61,62,63
23,67,68,69
"FINAL DA GEOMETRIA"
"Carregamento ",1
"Carga Horizontal H= 12.5 % P"
"Cargas nodais Ncg= ",1
"No   Ic       Fx [kN]   Fy [kN]   Mz [kN.m]"
9,2,35,0,0
"Soma Cargas SFx[kN]   SFy[kN]   SMz[kN.m]"
35,0,0
"Momento em O Mo           Centro Cargas (Xc,Yc)"
-175,0,500
"Carregamento ",2
"Carga Vertical P (02x)= 80 % Py"
"Cargas nodais Ncg= ",2
"No   Ic       Fx [kN]   Fy [kN]   Mz [kN.m]"
9,2,0,-2800,0
15,2,0,-2800,0
"Soma Cargas SFx[kN]   SFy[kN]   SMz[kN.m]"
0,-5600,0
"Momento em O Mo           Centro Cargas (Xc,Yc)"
-11200,200,0
"FINAL DE CARREGAMENTOS",2

```

J. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AISC LRFD, 1993. *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 2^a Ed., Chicago, Illinois.
- AS4100, 1990. *Steel Structures*. Standards association of Australia, Sidney, Austrália.
- Bild, S; e Trahair, NS; 1989. In plane strengths of steel columns and beam-columns. J.S.C.Research. Vol. 13 (1), 1989, pp. 1 a 22.
- Davids, AJ; e Hancock, GJ; 1986. Compression tests of short welded I sections. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 112 (5) 1986, pp. 960 a 975.
- Davids, AJ; e Hancock, GJ; 1985. Compression tests of long welded I sections. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 111 (2) 1985, pp. 2281 a 2290.
- Dumonteil, P; 1992. Simple equations or effective length factors. *AISC Engineering Journal* 3/4 pp. 111 a 115.
- Estuar, FR; (1965). *Welding residual stresses and the strenght of heavy columns*. PHD Dissertation, Lehigh University, Ithaca, Nova Iorque.
- Galambos, TV; e outros, 1998. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 5^a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Hajjar, JF; e outros, 1997. *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for american steel design*. ASCE, Nova Iorque.
- Higgins, TR; e outros, 1971. *Plastic Design in Steel- A guide and commentary*. ASCE WRC – *Manuals and reports on engineering practice* n. 41, Nova Iorque.
- Johnston, BG; e outros, 1976. *SSRC Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. 3^a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Julian, OG; e Lawrence, LS; 1959. *Notes on J and L nomographs for determination of effective lenghts*. Reportagem não publicada de propriedade de Jackson & Moreland Eng. Boston, Massachussets (1959).
- Moore II, WE; 1993. Discussion on simple equations or effective length factors. *AISC Engineering Journal* 1/4 pp. 37.
- Pi, YL; e Trahair, NS; 1994. Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns. I- Theory e II- Applications. *ASCE J. Struct. Engineer*. 120 (7) pp. 2041 a 2083.
- Weston, G; Nethercot, DA Crisfield, MA; 1991. Lateral buckling in continuous Composite bridge girders. *The structural engineer*, Vol. 69 (5) 1991, pp. 79 a 87.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLETAS

- ABNT NBR 8800, 1986. *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*. ABCEM, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- AISC, 1972. *Manual of steel construction. Specification for structural steel buildings*. 7^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC, 1976. *Manual of steel construction. Specification for structural steel buildings*. 8^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC ASD, 1989. *Allowable stress design. Specification for structural steel buildings*. 9^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC LRFD, 1986. *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 1^a Ed., Chicago, Ilionois.
- AISC LRFD, 1993. *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 2^a Ed., Chicago, Ilionois.
- Al-Bermani, FGA; e Kitipornchai, S; 1992. Elasto-plastic large deformations analysis of thin walled structures. *Engineering Structures*. Vol. 12 (1) pp. 108 a 127.
- Al-Bermani, FGA; e Chan, SL; 1988. *Inelastic post-buckling behavior of tubular struts*.
- Alpstein, BG; e Tall, L; 1970. Residual stresses in heavy welded shapes. Welding research suplement. *AWS Welding Journal*. Vol. (3), pp. 93 a 105.
- Alvarez, RJ; e Birnstiel, C; 1969. Inelastic analysis of multistory multibay frames. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 95 (11) 1969, pp. 2477 a 2503.
- AS4100, 1990. *Steel structures*. Standards association of Australia, Sidnei, Austrália.
- Assaid, LMB; 2001. *Método plástico aplicado às estruturas aporticadas de aço*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia. Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Attalla, MR; Deierlein, GG; e McGuire, W; 1994. Spread of plasticity: a quasi-plastic hinge approach. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (8) 1994, pp. 2451 a 2473.
- Avery, P; e Mahendran, M; 2000. Distributed plasticity analysis of steel frame structures comprising non-compact sections. *Engineering Structures*. Vol. 22 2000, pp. 901 a 919.

- Bathe, KJ; 1982. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall. Massachusetts, pp. 427.
- Bathe, KJ; e Bolourch, S; 1979. Large displacements analysis of 3D beam structures. *Int. Journal for Num. Methods in Eng.* Vol. 14, pp. 901 a 986.
- Beedle, LS; e Tall, L; 1960. Basic Column Strength. *ASCE J. Struct. Division*. Vol. 86, (7) pp. 139 a 172.
- Bild, S; e Trahair, NS; 1989. In plane strengths of steel columns and beam-columns. *JSC Research*. Vol. 13 (1), 1989, pp. 1 a 22.
- Biot, 1939. Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for body under initial stress. *Philosophical Magazine*. Vol. 27, pp. 468 a 485.
- Bjorhovde, R.; 1984. Effect of end-restraint on column strength. Practical applications. *AISC Engineering Journal* Vol. 1/4 pp. 1 a 13.
- Bjorhovde, R; 1988. Column: from theory to practice. *AISC Engineering Journal*. Vol. 1/4, pp. 21 a 33.
- Bjorhovde, R; Brozzetti, J; Alpstein, GA; e Tall, L; 1972; Residual stresses in thick welded plates. Welding research supplement. *AWS Welding Journal*. Vol. 8, pp. 392 a 405.
- Bridge, RQ; e Fraser, DJ; 1987. Improved G-factor method for evaluating effective lengths of columns. *ASCE J. Struct. Division*. Vol. 113 (6) 1987, pp. 1341 a 1356.
- CEC, 1990. *EUROCODE 3 Design of Steel Structures*. Vol. Part 1. General rules and building rules. Commission of the European Communities, (versão de projeto).
- Chajes, A; e Churchill, JE; 1987. Nonlinear frame analysis by finite elements methods. *ASCE J. Struct. Division*. Vol. 113 (6) 1987, pp. 1221 a 1235.
- Chan, SL; e Kitipornchai, S; 1988. *Inelastic post-buckling behavior of tubular struts*.
- Chan, SL; e Zhou, ZH; 1994. Pointwise equilibrating polynomial element for nonlinear analysis of frames. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (6) 1994, pp. 1703 a 1717.
- Chan, SL; e Zhou, ZH; 2004. Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member: I-one hinge along member, II- three hinges along member. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 130 (4) 2004 pp. 538 a 553.
- Chan, SL; e Chui, PPT; 1997. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel

- frames by section assemblage concept. *Engineering Structures*. Vol. 19 (8) 1996 pp. 628 a 636.
- Chan, SL; e Chui, PPT; 2000. *Non linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Elsevier, Oxford.
- Chen,WF; e Atsuta, T; 1976. *Theory of beam-columns*. Vol. 1: In plane behavior and design. McGraw Hill, Nova Iorque.
- Chen, WF; Goto, Y; e Liew, JYR; 1996. *Stability Design of Semi-rigid Frames*. John Willey and Sons, Nova Iorque.
- Chen, WF; e Han, DJ; 1987. *Plasticity for structural engineers*. Spring-Verlag, Nova Iorque.
- Chen,WF; e Lui, EM; 1987. *Structural stability – Theory and implementation*. Elsevier, Nova Iorque.
- Chen,WF; e White, DW; 1993. *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art*. SSRC, Bethlehem.
- Chen,WF; e Sohal, I; 1995. *Plastic design and second-order analysis of steel frames*. Spring-Verlag, Nova Iorque.
- Chen, WF; e Toma, S; 1994. *Advanced analysis of steel frames: theory, software and applications*. CRC Press, Boca Raton.
- Chwalla, E; 1934. Theorie des aussermittig gedruckten stabes aus baustahl. *Stahlbau*. Vol 7 (10 a 11), 1934.
- Crisfield, MA; 1991. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 1. Willey & sons, Nova Iorque, pp. 1 a 20.
- Clarke, MJ; Bridge, RQ; Hancock, GH; e Trahair, NS; 1993. *Australian trends in the plastic analysis and design of steel building frames* em White e Chen (1993).
- Clarke, MJ; 1994. Em Chen, WF; e Toma, S; *Advanced analysis of steel frames: theory, software and applications*. CRC Press, Boca Raton.
- Clarke, MJ e Bridge, RQ, 1995. Application of the notional load approach to the design of multistory steel frames. *Proceedings of the SSRC Annual Technical Section*, pp. 191 a 211, Cidade de Kansas, Missouri.
- Cook, NE; e Gerstle, KH; 1985. Load history effects on structural members. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 111 (3), pp. 628 a 639.
- CSA S16, 1994. *Limit states design of steel structures*. CAN/CSA-S16.1-M94 Canadian

- Standards Association. Rexdale, Ontário.
- Davids, AJ; e Hancock, GJ; 1985. Compression tests of long welded I section columns. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 111 (2), pp. 2381 a 2390.
- Davies, JM; 2002. Second-order elastic-plastic analysis of plane frame. *JSC Research.* Vol. 58, 2002, pp. 1315 a 1330.
- Disque, RQ; 1973. Inelastic K-factor for column design. *AISC Engineering Journal.* Vol. 2/4, pp. 33 a 35.
- Duan, L; Sohal, IS; e Chen, WF, 1989 On Beam-column moment amplification factor. *AISC Engineering Journal.* Vol. 4/4, pp. 130 a 135.
- Duan, L; e Chen, WF; 1989 Design interaction equation for steel beam-columns. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 115 (5), pp. 1225 a 1243.
- Dumonteil, P; 1992. Simple equations or effective length factors. *AISC Engineering Journal.* Vol. 3/4, pp. 111 a 115.
- Dumonteil, P; 1990 Discussion: On beam-column moment amplification factor. *AISC Engineering Journal.* Vol. 4/4, pp. 168 a 172.
- Eurocode 3, 1992. CEN *EUROCODE 3 Design of Steel Structures.* Vol. Part 1, European Committee for Standardization, ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.
- ECCS, 1984. *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints.* Technical working group 8.2 Publicação 33. European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.
- El-Zanaty, MH; Murray, DW;. e Bjorhovde, R; 1980. Inelastic behavior of multi-story steel frames. *Structural Engineering Report.* Vol. n. 83, Univ. Alberta, Canadá.
- Euler, G; 1759. *Sur les forces des colones.* Memoires de L'Academie Royale des Science et Belles Lettres. Vol. 13, Berlim pp. 252. traduzido para o inglês por Van der Broek, JA; em *American Journal of Physics.* Vol. 15, (1947), pp. 309.
- Farrer, H; e outros, 1992. Fortran estruturado. *Programação de computadores.* Ed. Guanabara Koogan, Belo Horizonte/MG, pp 194.
- Fertis, D; 1993. *Nonlinear mechanics.* CRC Press, Boca Raton.
- Foley, CM; e Vinnakota, S; 1999. Inelastic behavior of multistory partially restrained steel frames. Part I-II. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 125 (8), pp. 854 a 868.
- Foley, CM; 2001. Advanced analysis of steel frames using parallel processing and vectorization. *Computer-aided Civil and Infrastructure Eng.* Vol. 16, pp. 305 a

325.

- Galambos, TV; 1982. *Structural members and frames*. Dept. Civil Engineering Un. Minnesota, Mineapolis, pp. 373.
- Galambos, TV; e outros, 1988. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 4^a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Galambos, TV; e outros, 1998. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 5^a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Galambos, TV e Ketter, RL; 1957. Em Columns under combined bending and thrust. *Transactions ASCE*. Vol. 126 (1), (1961), pp. 1 a 25.
- Gao, L; e Haldar, A; 1995. Safety evaluation of frames with PR connections. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 121 (7), pp. 1101 a 1109.
- Gonçalves, R; e Camotim, D; 2004. On the application of beam-column interaction formulae to steel members with arbitrary load and support conditions. *JSC Research*. Vol. 60, pp. 433 a 450.
- Goto, Y; e Chen, WF; 1987. Second-order elastic analysis for frame design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 113 (7) 1987, pp. 1501 a 1519.
- Geschwindner, LF; 1994. A practical approach to the leaning column. *AISC Engineering Journal*. Vol. 4/4, pp. 141 a 149.
- Hall, JF; e Challa, MVR; 1994. Earthquake collapse analysis of steel frame. *Earthquake Engineer. & Struct. Dynamics*. Vol. 23, pp. 1199 a 1218.
- Hajjar, JF; e outros, 1997. *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for american steel design*. ASCE, Nova Iorque.
- Higgins, TR; e outros, 1971. *Plastic Design in Steel- A guide and commentary*. ASCE WRC. *Manuals and reports on engineering practice*. Vol. 41, Nova Iorque.
- Higgins, TR; 1962. Column stability under elastic support. *AISC Engineering Journal*. Vol. 2/2, pp. 12.
- Hellesland, J; e Bjorhovde, R; 1996a. Restraint demand factors and effective lengths of braced columns. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 122 (10) 1996, pp. 1216 a 1224.
- Hellesland, J; e Bjorhovde, R; 1996b. Improved frame stability analysis with effective length. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 122 (11) 1996, pp. 1275 a 1283.
- Horne, MR; 1979. *Plastic theory of structures*. 2^a Ed. Pergamon Press, Oxford pp. 179.
- Hsieh, SH; Deierlein, GG; McGuire, W; e Abel, JF; 1989. Technical manual for CU-

- Stand. *Struct. Eng. Report*. Vol. 13, Cornell Univ. Ithaca, Nova Iorque.
- Hu, KK; e Lai, DC; 1986. Effective length for restrained beam-column. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 112 (2) 1986, pp. 241 a 255.
- Iwankin, NR; 1984. Note on beam-column moment amplification factor *AISC Engineering Journal*. Vol. 1/4, pp. 21 a 23.
- Johnston, BG; e outros, 1976. *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*. 3^a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Julian, OG; e Lawrence, LS; 1959. *Notes on J and L nomographs for determination of effective lengths*. Reportagem não publicada de propriedade de Jackson & Moreland Eng. Boston, Massachusetts (1959).
- Kavanaugh, TC; 1962. Effective length of framed columns. *Trans. of ASCE*. Vol. 127, pp. 81 a 101
- Kanchanalai, T; 1977. The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames *AISI Project 189 Rep. 2*. Univ. Texas, Austin, Civil Eng./Structural Research Lab.
- Kasar, T; 1975. *Finite element formulation for inelastic equilibrium and buckling of thin-walled structural systems*. Tese PHD, Minesota, Minneapolis.
- Kassimali, A; 1983. Large deformation analysis of elastic-plastic frames. *ASCE J. Struct. Division*. Vol. 109 (8) 1983, pp. 1869 a 1886.
- Kim, SE; e Chen, WF; 1996. Practical advanced analysis for unbraced steel frame design. Practical advanced analysis for braced steel frame design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 122 (11) 1996, pp. 1259 a 1274.
- Kim, SE; Kim MK; e Chen, WF; 2000. Improved refined plastic hinge analysis accounting for strain reversal. *Engineering Structures*. Vol. 22 pp. 15 a 25.
- Kim, SE; Lee, DH; 2002. Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames. *Engineering Structures*. Vol. 24 pp. 735 a 744.
- King, WS; White, DW; e Chen, WF; 1992. Second-order inelastic analysis methods for steel-frame design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 118 (2) 1992, pp. 408 a 428.
- Kishi, N; Komuro, M; e Chen, WF; 1995, Governing equations for K-factor of columns in semi-rigid sway frames. *Steel Structures 4 PSSC*. Vol. 1, Singapura, pp. 55 a 62.
- Landesman, A; 1999. *Análise e implementação de modelo plástico para estruturas*

- metálicas apertadas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Lavall, ACC; 1996. *Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal*. Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP, Brasil.
- LeMesurier, WJ; 1976. A practical method for second-order analysis –Part 1 Pin jointed systems. *AISC Engineering Journal*. Vol. 4/4, pp. 89 a 96.
- LeMesurier, WJ; 1977. A practical method for second-order analysis –Part 2 Rigid frames. *AISC Engineering Journal*. Vol. 2/4, pp. 49 a 67.
- LeMesurier, WJ; 1995. Simplified K-factors for stiffness controlled designs. *Proceedings of ASCE*. Congresso em Nova Iorque, pp. 1797 a 1812.
- Li, GQ; e Shen, ZY; 1995 Effective length of columns employed in braced steel frames. *Steel Structures 4 PSSC*. Vol. 1, Singapura, pp. 63 a 70.
- Liew, JYR; 1992. Em Chan, SL; e Chui, PPT; 1997. A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept. *Engineering Structures*. Vol. 19 (8) 1996, pp. 628 a 636.
- Liew, JYR; White, DW; e Chen, WF; 1993. Second-order refined plastic-hinge analysis for Frame Design. Part I-II. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 119 (11), pp.3196 a 3237.
- Liew, JYR; White, DW; e Chen, WF; 1994. Notional load plastic-hinge method for frame design. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (5), pp. 1434 a 1454.
- Lim, LC; e McNamara, RJ; 1972. *Stability of a novel building system. Structural design of tall buildings*. Vol. II Bethlehem, Pensilvânia, pp. 1448 a 1461.
- Lu, WL; 1965. Inelastic buckling of steel frames. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 91(6), pp. 185.
- Lui, EM; 1992. A novel approach for K factor determination. *AISC Engineering Journal*. Vol. 4/4, pp. 150 a 159.
- Lui, EM; 1988. A practical P-delta analysis method for type Fr and Pr frames. *AISC Engineering Journal*. Vol. 3/4 pp. 85 a 99.
- Lui, EM; e Chen, WF; 1983. Strength of H-columns with small end restraints. *The Structural Engineer*. Vol. 61 (3), 1983, pp. 17 a 26.

- Lui, EM; e Zhang, CY; 1990. Nonlinear frame analysis by the pseudo load method. *Computers & Structures*. Vol. 37 (5) 1990, pp. 707 a 716.
- Machado, FCS; 2005. *Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Machado, FCS; e Silveira, RAM; 2005. Formulação inelástica de segunda ordem para sistemas estruturados em aço. *Revista Escola de Minas (REM)*. Vol. 58 (3) pp. 267 a 277.
- Makode, PV; Corotis, RB; e Ramirez, MR; 1999. Geometric non-linear analysis of frame structures by pseudodistortions. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 46, pp. 1318 a 1327.
- McFalls, RK; e Tall, L. 1969. A study of welded columns manufactured from flame-cut plates. Welding research suplement. *AWS Welding Journal*. Vol. (4) 1969, pp. 141 a 154.
- McGuire, W; 1992. Computers and Steel Design. *AISC Engineering Journal*. Vol. 4/4, pp. 160 a 167.
- McGuire, W; 1991. Refining the plastic-hinge concept. Proceedings 1991 Annual Tech. Section SSRC, Chicago, Illinois.
- Meek, JL; e Loganathan S; 1990. Geometric and material nonlinear behaviour of beam-columns. *Computers & Structures*. Vol. 34 (1) 1990, pp. 87 a 100.
- Miller, AR; 1987. *Programs for scientists and engineers*. Sybex, Nova Iorque.
- Moore, DB; Nethercot, DA; e Kirby, PA; 1993 Testing steel frames at full scale. Appraisal of results and implications to design. *The Structural Engineer*. Vol. 71 (23 e 24) 1993, pp. 418 a 435.
- Moore II, WE; 1993. Discussion on simple equations or effective length factors. *AISC Engineering Journal*. Vol. 1/4, pp. 37.
- Moreira, DF; 1977. *Análise matricial das estruturas*. Ed. Univ. de São Paulo, Livros Técnicos e Científicos Ed., Rio de Janeiro, pp. 390.
- Morfidis, K; Avramidis, IE; 2002. Formulation of a generalized beam element on a two-parameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid off-sets. *Computers and Structures*. Vol. 80 (2002), pp. 1919 a 1934.
- Neal, BG; 1977. *The Plastic Methods of Structural Analysis*. 3^a Ed., Chapman and Hall,

Londres, RU.

- Nethercot, DA; 2000 Frame structures: global performance. Static and stability behaviour – General report. *JSC Research*. Vol. 55 (2000), pp. 109 a 124.
- Nethercot, DA; 2002. Design of non-sway composite frames. *The Structural Engineer*. Vol. 19 (3), 2002, pp. 18 a 26.
- Olsen, PC; 1999. Rigid plastic analysis of plane frame structures. *Computer Methods in applied Mechanics and Eng*. Vol. 179 (1999), pp. 19 a 30.
- Orbison, JB; McGuire, W; e Abel, JF; 1982. Yield surface applications in nonlinear steel frames analysis. *Comp. Methods in Appl. Mech. Eng*. Vol. 33 (1) pp. 557 a 573.
- Owen, DRJ; e Hinton, E; 1980. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Pineridge Press Ltd, Swansea, RU.
- Pi, YL; e Trahair, NS; 1994. Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns. I- Theory e II- Applications. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 120 (7) pp. 2041 a 2083.
- Pimenta, RJ; 1996. *Proposição de uma curva de flambagem para perfis I soldados formados por chapas cortadas a maçarico*. Dissertação de Mestrado, EEUFMG, Belo Horizonte/MG, Brasil.
- Pimenta, PM; 1986. Aspectos da análise não-linear de estruturas reticuladas. *Anais do 7º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*. São Carlos, São Paulo.
- Queiroz, G; 1993. *Elementos das estruturas de aço*. 4ª ed. Belo Horizonte.
- Ramm, E; 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Em *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*. Bathe, KJ; Wunderlich, W; e Stein, E. pp. 63 a 69. Springer, Berlim.
- Rocha, G; (2000). *Estratégias de incremento de carga e de iteração para a análise não-linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Saje, M; Planinc, I; Turk, G; e Vrtanar, P; 1996. A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames. *Comp. Meth. Appl. Mechanics and Eng*. Vol. 144, pp. 125 a151.
- Salmon, CG; Johnson, JE; 1990. *Steel structures – Design and behavior – Emphasizing load and resistance factor design*. Harper Collins Publishers, 3ª Ed, pp. 1096.

- Siat-Moy, FC; 1986. K-factor paradox. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 112 (8) 1986, pp. 1747 a 1760.
- Siat-Moy, FC; 1999. an improved K-factor formula. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 125 (2) 1999, pp. 169 a 174. Discussion Hellesland, J., 2000. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 126 (5) 2000, pp. 633 a 635.
- Silva, VP; Fakuri RH; (2001) Brazilian standards for steel structures fire design. *Fire Safety Journal.* Vol. 37, pp. 217 a 227, Inglaterra.
- Silveira, RAM; 1995. *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato.* Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC/RJ, Rio de Janeiro/MG, Brasil.
- Shanmugam, NE; e Chen, WF; 1995. An assessment of K factor formulas. *AISC Engineering Journal.* Vol. 1/4, pp. 3 a 11.
- Sohal, I; e Chen, WF; 1995. *Plastic design and second-order analysis of steel frames.* Springer-Verlag, Nova Iorque.
- Sonmez, M; 1996. *Second-order analysis of elastic plane frames using finite element methods.* MSc Tese, Univ. da Pensilvânia.
- Swanger, MH; e Emkin, LZ, 1979. A fibre element model for nonlinear frame analysis. *Proceedings. 7th Congress on Electronic Computation.* ASCE, Nova Iorque, pp. 510 a 536.
- Teh, LH; e Clarke, MJ; 1999. Plastic-zone analysis of 3D steel frames using beam elements. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 125 (11) 1999, pp. 1328 a 1337. Discussion : Xu, Y; Liang, S *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 128 (9) 2002, pp. 1236 a 1239.
- Timoshenko, SP; e Gere, JM; 1961. *Theory of elastic stability.* Mac Grow Hill, Nova Iorque, 2^a Ed.
- Tin-Loi, F; e Vimonsatit, V; 1993, – Shakedown of Frames with Semi-rigid Connections. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 119 (6) 1993, pp. 1694 a 1760.
- Torkamani, MAM; e Sonmez, M; 2001. Inelastic large deflections modeling of beam-columns. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 123 (9) 1997, pp. 1225 a 1235.
- Torkamani, MAM; Sonmez, M; e Cao, J; 1997. Second-order elastic plane-frame analysis using finite-element method. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 127 (8), pp. 876 a 887.

- Trahair, NS; e Bradford, MA; 1991. *The behaviour and design os steel structures*. 2^a Ed. Chapman & Hall, Londres.
- Vasconcelos Filho, A; 2002. *Análise Estrutural de Edifícios Altos*, Notas de aula, EEUFMG, BH, pp. 1 a 176.
- Vinnakota, S; 1974. Elasto-plastic stability of frames. *Int. Civil Engineer*. Vol. III pp. 37 a 48; Israel.
- Visser, M; 1995. Steel frame stability design. *AISC Engineer. Journal*. Vol. 1/4 pp. 12 a 20.
- Vlassov, BE; 1962. Em Mori, DD; 1988. *Flexo-torção: Teorias de 1^a e 2^a Ordem, Automatização do Cálculo*. Dissertação de Mestrado. EESC/USP São Carlos/SP, Brasil.
- Vogel, U; 1985. Calibrating Frames. *Stahlbau*. Vol. 10, pp. 295 a 301.
- Weaver Jr, W; e Jonhston, PR; 1984. *Finite elements for structural analysis*. Prentice-Hall, Nova Jersey, pp. 402.
- Weston, G; Nethercot, DA; e Crisfield, MA; 1991. Lateral buckling in continuous composite bridge girders. *The Structural Engineer*. Vol. 69 (5), pp. 79 a 87.
- White, DW; e Chen,WF; 1993. *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art*. SSRC, Bethlehem pp. 299.
- White, DW; e Hajjar, JF; 1991. Application of second-order elastic analysis in LRFD-Research to practice. *AISC Engineering Journal*. Vol. 4/4, pp. 133 a 148.
- White, DW; 1993. Plastic hinge methods for advanced analysis of steel frames. *JSC Research*. Vol. (9), pp. 121 a 152.
- White, DW; e Hajjar, JF; 1994. The accuracy of comum stability calculations in unbraced frames and the influence of columns with effective length factors less than one. *AISC Engineering Journal*. Vol. 3/4 pp. 81 a 90.
- White, DW; e Hajjar, JF; 2000. Stability of steel frames: then cases for simple elastic and rigorous inelastic analysis/design procedure. *Engineering Structures*. Vol. 22, pp. 155 a 167.
- Wong, MB; e Tin-Loi, F; 1990. Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. *Computers & Structures*. Vol. 34 (4), pp. 641 a 646.
- Yura, JA; 1971. The effective length of columns in unbraced frames. *AISC Engineering*

Journal pp. 37 a 42.

- Ziemian, RD; (1992). Em White, DW; e Chen,WF; 1993. *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art*. SSRC. Bethlehem, pp. 299.
- Ziemian, RD; McGuire, W; e Deierlein, GG; 1992. Inelastic limit states design, part I: Planar frames studies; part II: Three-dimensional frame study. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 118 (9) 1992, pp. 2352 a 2568.
- Ziemian, RD; e McGuire, W; 2001. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 128 (10), pp. 1301 a 1307.
- Zhou, ZH; e Chan, SL; 1996. Refined second-order analysis of frames with members under lateral and axial loads *ASCE J. Struct. Engineer*. Vol. 122 (5), pp. 548 a 554.
- Zhou, SP; Duan, L;Chen, WF; 1990. Comparison of Design Equations for Steel Beam-Columns. *Structural Engineering Review*. Vol. 2 (1) pp. 45 a 53.
- Zuraski, PD; 1992. The significance and application of C_b in beam design. *AISC Engineering Journal*. Vol. 1/4 pp. 30 a 25.

Apresentado: 16/dez/2005

Revisado: 31/jan/2006

Arthur Ribeiro de Alvarenga

CREA-MG 26.303/D.

F I M