

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA**

**ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS
FUNDAÇÃO-ESTRUTURA METÁLICA COM
AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL E
NÃO-LINEARIDADE FÍSICA**

**por
Andréa Gonçalves Rodrigues**

**orientada por
Antônio Maria Claret de Gouvêia, D.Sc.**

CONVÊNIO USIMINAS/UFOP/FUNDAÇÃO GORCEIX

RODRIGUES, Andréa Gonçalves

Análise Dinâmica de Sistemas Fundação-Estrutura
Metálica com Amortecimento Não-Proporcional e Não-
Linearidade Física [Ouro Preto] 1994.

VIII, 128 p. 29,7 cm (UFOP/EM/DECIV, M.Sc.,
Engenharia Civil, 1994)

Tese - Universidade Federal de Ouro Preto

1. Estrutura Metálica – Análise Dinâmica

I. UFOP/EM/DECIV II. Título (série)

**ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS FUNDAÇÃO-ESTRUTURA
METÁLICA COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL E
NÃO-LINEARIDADE FÍSICA**

Andréa Gonçalves Rodrigues

**TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO MESTRADO EM
CONSTRUÇÃO METÁLICA DO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA DE MINAS COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS DE ENGENHARIA CIVIL (M.Sc.)**

Aprovada por:

Dutervil Geraldo de Magalhães, Eng. de Minas, Metalurgia e Civil

Fernando Venâncio Filho, D.Sc.

Francisco Célio de Araújo, Dr.-Ing.

José Elias Laier, D.Sc.

Sebastião Arthur Lopes de Andrade, Ph.D.

**Antônio Maria Claret de Gouvêia, D.Sc.
Presidente**

**Ouro Preto - MG – Brasil
Dezembro 1994**

AGRADECIMENTOS

*Ao Prof. Antônio Maria Claret de Gouvêia,
pela orientação e apoio prestados em todas as etapas deste trabalho.*

*Ao Prof. Fernando Venâncio Filho,
pelo apoio científico.*

*A USIMINAS,
pelo apoio dado ao Mestrado em Construção Metálica.*

Aos amigos.

A minha família.

SUMÁRIO

Neste trabalho, descreve-se um método para solução de sistemas estruturais dinâmicos não-lineares nos quais o amortecimento não-proporcional é considerado. Implementa-se computacionalmente um algoritmo para integração das equações de equilíbrio dinâmico de um sistema de múltiplos graus de liberdade no domínio do tempo, considerando amortecimento do tipo não-proporcional e não-linearidade física do material.

O algoritmo referido (Venâncio-Filho e Claret, 1991) utiliza o método de superposição modal clássico combinado a um processo iterativo que trata as parcelas de forças de amortecimento não-proporcionais e de forças restitutivas não-lineares como pseudoforças aplicadas externamente. Os modos normais de vibração extraídos na configuração inicial do sistema são utilizados para definir a transformação de coordenadas físicas para coordenadas generalizadas.

O histórico de deslocamentos é obtido através do cálculo numérico da integral de Duhamel, sendo que as cargas externas e as pseudoforças introduzidas iterativamente são linearizadas em cada intervalo de tempo. O processo iterativo se dá a cada intervalo de tempo até se atingir a convergência, utilizando-se a matriz de rigidez tangente definida em função das condições no início do intervalo.

A eficiência do algoritmo proposto, denominado processo parcial, é examinada, comparando-se com o método de integração direta (Wilson- θ) e com método de superposição modal clássico.

Discute-se, em particular, conforme proposto por Venâncio-Filho e Claret (1991) o significado do índice de acoplamento e do índice de convergência na caracterização do grau de não-proporcionalidade do amortecimento.

Exemplos numéricos são fornecidos.

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento e a aplicação de uma técnica de solução de sistemas estruturais dinâmicos, denominada Processo Parcial, que combina o método de formulação de pseudoforças e a análise por superposição modal, nos quais tanto a linearidade como a não-linearidade são tratadas no domínio do tempo.

A efetividade do algoritmo é examinada, comparando-o ao método de integração direta. Em particular, discute-se o significado do grau de acoplamento e do índice de convergência, caracterizando o grau de não-proporcionalidade do amortecimento.

Exemplos numéricos são dados.

ÍNDICE

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
1.1 Introdução	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Descrição Sumária	3
1.4 Revisão Bibliográfica	3
2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO	7
3. ANÁLISE LINEAR	14
3.1 Formulação	14
3.2 Condição de Convergência	17
3.3 Processos Total e Parcial	21
3.4 Algoritmo para Solução de um Sistema Linear Usando o Método de Superposição Modal Clássico Combinado com Pseudoforças - Processo Parcial	22
4. EXEMPLOS NUMÉRICOS	27
4.1 Exemplo 1: Sistema Mecânico Flexível com Amortecedor Concentrado	27
4.2 Exemplo 2: Sistema Massa-Mola-Amortecedor com Dois Graus de Liberdade	29
4.3 Exemplo 3: Modelo de uma Usina Nuclear Simplificado em um Sistema de Oito Graus de Liberdade	36
5. ANÁLISE NÃO-LINEAR	77
5.1 Introdução	77

5.2 Equacionamento	77
5.3 Algoritmo para Solução de um Sistema Não-Linear Usando o Método de superposição Modal Clássico Combinado com Pseudoforças - Processo Parcial	82
6. EXEMPLOS NUMÉRICOS	86
6.1 Exemplo 1: Sistema de Dois Graus de Liberdade Representando Modelo Simplificado de Usina Nuclear	86
6.2 Exemplo 2: Sistema Massa-Mola-Amortecedor com Dois Graus de Liberdade	88
6.3 Exemplo 3: Sistema Solo-Estrutura do Tipo “Shear Building” de Sete Andares	88
6.4 Exemplo 4: Sistema Solo-Estrutura do Tipo “Shear Building” de Dez Andares	90
6.5 Exemplo 5: Sistema Solo-Estrutura do Tipo “Shear Building” de Vinte Andares	91
7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	119
7.1 Conclusões	119
7.2 Sugestões	120
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

1.1 Introdução

Após o aparecimento dos computadores digitais, tornou-se possível uma análise mais precisa de sistemas estruturais complexos por meio de processos discretos de análise, como, por exemplo, o método de elementos finitos. À medida que novos refinamentos das modelações das propriedades de massa e rigidez eram introduzidos, novas hipóteses sobre o comportamento dos materiais foram consideradas nos métodos analíticos. Nas últimas três décadas, particularmente a propriedade de rigidez foi intensamente estudada, com grande ênfase sobre os métodos de solução dos sistemas de equações lineares.

O amortecimento é, dentro dessa perspectiva, a última fronteira na modelação das propriedades estruturais. A natureza física e a generalidade dos mecanismos de dissipação de energia em um sistema vibratório não permitem que a modelação do amortecimento seja análoga às de massa e rigidez. Considerando, por exemplo, um sistema estrutural discretizado em elementos finitos, a definição de um coeficiente de amortecimento c_{ij} , simétrico, através de uma propriedade de amortecimento $c(x)$ distribuída no elemento, que seria feita através da expressão

$$c_{ij} = \int_0^L c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$

sendo $\psi_i(x)$ e $\psi_j(x)$ as funções de forma do elemento considerado, é impraticável, uma vez que nos problemas práticos $c(x)$ é de difícil determinação. Desse modo, nas aplicações correntes da engenharia estrutural, é comum a adoção do modelo de amortecimento viscoso proporcional. Esse modelo é quantificado por uma matriz de amortecimento que se obtém através de uma relação de proporcionalidade com as matrizes de massa e de rigidez.

O modelo de amortecimento viscoso proporcional é adequado para os sistemas estruturais em que as distribuições de forças dissipativas sejam semelhantes às

distribuições de forças elásticas e de inércia. As hipóteses de carregamento e os materiais empregados em grande parte das estruturas, freqüentemente, tornam o modelo de amortecimento viscoso proporcional aceitável.

Entretanto, nas situações de projeto em que a interação solo-estrutura deva ser considerada e naquelas em que é necessário adotar amortecedores concentrados para o controle de vibrações, o amortecimento pode ser fortemente não proporcional, invalidando os resultados obtidos com a hipótese de proporcionalidade.

Por outro lado, a introdução de materiais viscoelásticos na engenharia de estruturas combinada com severas condições de carregamento exigem a consideração simultânea das hipóteses de não-linearidade física e não-proporcionalidade do amortecimento.

Métodos computacionalmente eficientes para a integração das equações de equilíbrio dinâmico de sistemas estruturais de múltiplos graus de liberdade, considerando amortecimento não-proporcional e não-linearidade física, constituem um dos domínios que justificam intensas pesquisas na moderna engenharia estrutural.

1.2 Objetivos

Esse trabalho teve como objetivo implementar computacionalmente um algoritmo para integração das equações de equilíbrio dinâmico de um sistema de múltiplos graus de liberdade no domínio do tempo, considerando amortecimento do tipo não-proporcional e não-linearidade física do material.

O algoritmo referido (Venâncio-Filho e Claret, 1991) utiliza o método de superposição modal clássico combinado a um processo iterativo que trata as parcelas de forças de amortecimento não-proporcionais e de forças restitutivas não-lineares como pseudoforças aplicadas externamente. Os modos normais de vibração extraídos na configuração inicial do sistema são utilizados para definir a transformação de coordenadas físicas para coordenadas generalizadas.

O histórico de deslocamentos é obtido através do cálculo numérico da Integral de Duhamel, sendo que as cargas externas e as pseudoforças introduzidas iterativamente são linearizadas em cada intervalo de tempo. O processo iterativo se dá

a cada intervalo de tempo até se atingir a convergência, utilizando-se a matriz de rigidez tangente definida em função das condições no início do intervalo.

1.3 Descrição Sumária

No capítulo 2 formulam-se as equações de movimento de sistemas de múltiplos graus de liberdade para modelos de amortecimento viscoso, histerético e dependente de frequência. O amortecimento geométrico é considerado através do amortecimento viscoso equivalente.

No capítulo 3 apresenta-se o algoritmo proposto por Venâncio-Filho e Claret (1991), e faz-se distinção entre os processos parcial e total do cálculo da resposta. A prova de convergência e os conceitos de índice de acoplamento e de índice de convergência são reapresentados. Diversos exemplos de sistemas estruturais lineares dotados de amortecimento não-proporcional são analisados no capítulo 4.

No capítulo 5 apresenta-se a formulação do algoritmo proposto, utilizando o processo parcial, para a solução de sistemas fisicamente não-lineares dotados de amortecimento não-proporcional. Exemplos numéricos são fornecidos no capítulo 6. O capítulo 7 discute as conclusões da pesquisa e apresenta sugestões.

1.4 Revisão Bibliográfica

A abordagem do amortecimento está baseada no estabelecimento de modelos matemáticos que são tentativas de aproximação do comportamento físico dos sistemas amortecidos. Entre os modelos comumente utilizados na análise estrutural, destacam-se o amortecimento viscoso dependente da frequência, o histerético e o viscoelástico.

Muitos pesquisadores procuram tratar o amortecimento não-proporcional através de modelos que preservem a aplicação do método de superposição modal clássico. Entre esses trabalhos, cita-se o de Roesset (1973) que propõe a consideração do amortecimento não-proporcional através da introdução do conceito de coeficientes de amortecimento modais ponderados. Venâncio-Filho e Claret (1987) comparam as

respostas de sistemas com amortecimento não-proporcional obtidas pelo método do amortecimento ponderado e por integração direta das equações de movimento.

Algumas pesquisas se concentraram na avaliação dos erros introduzidos na resposta pela diagonalização da matriz de amortecimento generalizada através do simples abandono dos elementos de fora da diagonal. Entre eles, citam-se os trabalhos de Thomson, Calkins e Caravani (1974) e o de Warburton e Soni (1977).

Com o desenvolvimento dos computadores digitais, muitos pesquisadores procuraram analisar os sistemas dotados de amortecimento não-proporcional através do método de superposição de modos complexos a partir de uma idéia original de Hurty e Rubinstein (1964). Entre eles, citam-se Singh (1980), Veletsos e Ventura (1986), Singh e Ghafory-Asthiyany (1986), Borino e Muscolino (1986), Singh e Suarez (1987) e Chen e Taylor (1987). Entretanto, os métodos de cálculo da resposta baseados na superposição de modos complexos têm a desvantagem de exigir grande esforço computacional, além de dificultarem a interpretação física do comportamento do sistema.

Clough e Mojtahedi (1976) propõem o tratamento do amortecimento não-proporcional através da integração direta das equações de movimento em coordenadas modais, usando-se os modos normais não-amortecidos para a transformação de coordenadas. Esse processo tem a vantagem de preservar a utilização dos modos normais, além de permitir a economia de esforço computacional através do truncamento modal. Entretanto, ele mantém as desvantagens dos métodos de integração direta, entre as quais a exigência de pequenos intervalos de tempo para assegurar a estabilidade do sistema.

Itoh (1973) analisa a resposta de sistemas com amortecimento não-proporcional no domínio da frequência, utilizando a base modal complexa para desacoplar o sistema de equações de movimento. O algoritmo final opera apenas com álgebra real, mas o método proposto perde igualmente as vantagens do método de superposição modal clássico.

Chen e Taylor (1987) propõem desacoplar o sistema de equações de equilíbrio dinâmico, quando o amortecimento não-proporcional está presente, através de uma base de vetores de Ritz em lugar de base modal complexa.

Claret e Venâncio-Filho (1988) propõem o emprego do método de superposição modal clássico acoplado a um processo iterativo que trata as forças de amortecimento decorrentes dos termos de fora da diagonal da matriz de amortecimento generalizada como pseudoforças. Ibrahimbegovic e Wilson (1988) utilizam o mesmo processo para a análise da resposta de sistemas lineares a esforços sísmicos. Claret e Venâncio-Filho (1991) fazem um amplo estudo desse método, fornecendo inclusive a sua condição de convergência e introduzindo os conceitos de índice de acoplamento e de índice de convergência que caracterizam o grau de não-proporcionalidade do amortecimento de um sistema estrutural. Chen e Taylor (1990) utilizam processo semelhante, mas desacoplam o sistema de equações de movimento através de uma base de vetores de Ritz.

A análise da resposta de sistemas não-lineares através do método de superposição modal é proposta por Stricklin e Haisler (1975) e Morris (1977). Nessa proposta, a não-linearidade gera pseudoforças que são introduzidas no sistema iterativamente. Landau (1983) demonstra a viabilidade da aplicação do método de superposição modal clássico à análise não-linear geométrica e física. Kawamoto (1983) emprega um método híbrido domínio do tempo - domínio da frequência para tratamento de sistemas dinâmicos não-lineares com amortecimento viscoso e histerético. Wolf e Darbre (1987) demonstram a condição de convergência desse método híbrido.

Chang, Elghamdamsi e Mohraz (1989) utilizam o método de superposição modal para tratar sistemas fisicamente não-lineares com amortecimento não-proporcional e não-linearidade física em que pseudoforças são aproximadas por série de Taylor. Venâncio-Filho e Claret (1989) propõem um processo de linearização passo-a-passo para análise não-linear física no domínio da frequência. Nesse trabalho, os autores conceituam o método da Transformada de Fourier Implícita para viabilizar computacionalmente a aplicação da análise no domínio da frequência a sistemas não-lineares.

Claret (1991) utiliza o método de linearização passo-a-passo para a análise de sistemas fisicamente não-lineares dotados de amortecimento não-proporcional no domínio da frequência. Esse trabalho mostra a integração das equações de movimento no domínio da frequência, mas as pseudoforças são tratadas iterativamente no domínio

do tempo. O deslocamento do sistema de equações é feito utilizando a base modal não-amortecida.

Recentemente, Udwadia e Kumar (1994) utilizam um método semelhante ao proposto por Venâncio-Filho e Claret (1991) para tratar sistemas lineares com amortecimento não-proporcional. Esses autores utilizam uma técnica própria para a decomposição da matriz de amortecimento generalizada. Jangid e Data (1994) utilizam o mesmo processo de Venâncio-Filho e Claret (1991) para a análise espectral sob excitações randômicas.

No presente trabalho, o método proposto por Venâncio-Filho e Claret (1991) é aplicado à análise dinâmica de sistemas fisicamente não-lineares com amortecimento não-proporcional. Pseudoforças são introduzidas pela não-linearidade física e pelo amortecimento não-proporcional e são tratadas no mesmo processo iterativo.

2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

As propriedades físicas essenciais de qualquer sistema estrutural linearmente elástico, sujeito a cargas dinâmicas, são a massa, a rigidez e o amortecimento. O amortecimento representa o conjunto dos mecanismos de dissipação de energia existentes no sistema.

Dado um sistema linear idealizado de um grau de liberdade, como na Figura 2.1, onde a massa total é representada pelo bloco rígido m , a resistência elástica ao deslocamento pela mola de peso desprezível e de rigidez k , o mecanismo de perda de energia pelo amortecedor c e o carregamento externo, pela carga $p(t)$, variável com o tempo, e considerando que os vínculos permitem ao bloco somente translações horizontais $v(t)$, a equação de movimento deste sistema é a expressão do equilíbrio da força aplicada $p(t)$ e das forças resultantes do movimento: f_i (força de inércia), f_d (força de amortecimento) e f_s (força elástica da mola), como mostra a Figura 2.2. Portanto, tem-se

$$f_i - f_d + f_s + p(t) = 0. \quad (2.1)$$

Como a força elástica é

$$f_s = -kv \quad (2.2)$$

e, de acordo com o princípio d'Alembert, a força de inércia é o produto da massa e da aceleração, isto é,

$$f_i = -m\ddot{v}, \quad (2.3)$$

pode-se escrever a equação de movimento do sistema como

$$m\ddot{v} + f_d + kv = p(t), \quad (2.4)$$

onde as forças de amortecimento f_d dependem do modelo físico utilizado para descrever o amortecimento do sistema.

Para a maioria dos casos, a massa e a rigidez das estruturas podem ser calculadas de maneira relativamente fácil, tanto por considerações físicas ou por expressões generalizadas, decorrentes da aplicação do princípio de Hamilton ou do princípio dos trabalhos virtuais. Já os mecanismos básicos de perda de energia são pouco entendidos. Adotam-se, na análise de sistemas dinâmicos, modelos ideais de amortecimento definidos com o propósito de simular, com o máximo de fidelidade possível, os mecanismos reais de dissipação de energia.

O amortecimento viscoso é um modelo linear de dissipação de energia onde a força de amortecimento, f_v , é proporcional e oposta à velocidade relativa da massa v , isto é,

$$f_v = -c\dot{v}. \quad (2.5)$$

Assim, se o modelo de dissipação de energia no sistema é predominantemente viscoso, a equação de equilíbrio dinâmico é dada por

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t). \quad (2.6)$$

O modelo de amortecimento histerético é definido como aquele em que a força de amortecimento está em fase com a velocidade, mas é proporcional aos deslocamentos, isto é,

$$f_e = i(2D)kv, \quad (2.7)$$

sendo v o deslocamento da massa, D a constante de amortecimento histerético e i , a unidade imaginária. Nesse caso, a equação do equilíbrio dinâmico é

$$m\ddot{v} + k(1 + i2D)v = p(t), \quad (2.8)$$

equação que somente pode ser tratada rigorosamente no domínio da frequência .

Embora o amortecimento nas estruturas não seja viscoso e, sim, histerético, na prática, o mecanismo de amortecimento real é comumente aproximado pelo amortecimento viscoso, que leva a uma forma conveniente da equação de movimento da estrutura. Na maioria dos casos, o modelo de amortecimento viscoso equivalente adotado em estruturas resulta em uma aproximação razoável dos resultados experimentais.

Nos problemas dinâmicos que levam em consideração os efeitos da interação solo-estrutura, a dissipação de energia que está associada à propagação de ondas elásticas no solo, considerado um meio elástico, semi-infinito, homogêneo e isotrópico, resulta no amortecimento geométrico ou por radiação.

Para conceituar tal amortecimento, seja uma fundação em placa vibrando verticalmente sobre um semi-espaço elástico, Figura 2.3. Da placa, fonte de vibração, propagam-se, no semi-espaço elástico, ondas de corpo, com uma frente de onda hemisférica, e ondas de Rayleigh, com frentes de onda cilíndricas. Esses dois tipos de ondas, à medida que se afastam da fonte, propagam-se em um volume cada vez maior de material. Deste modo, a densidade de energia e, conseqüentemente, a amplitude de vibração decrescem em cada onda, constituindo-se no amortecimento geométrico ou por radiação.

Substituindo-se o semi-espaço por um sistema massa-mola-amortecedor e igualando-se as amplitudes observados no sistema massa-mola-amortecedor e no sistema fundação rígida-semi-espaço elástico, pode-se determinar o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente ao amortecimento geométrico. A Tabela 2.1 mostra as expressões do amortecimento viscoso equivalente fornecidas por Richart (1970) e Novak (1973).

A consideração do amortecimento histerético na análise dinâmica de sistemas solo-estrutura também pode ser feita a partir da condição de radiação, que conduz a coeficientes de rigidez dinâmicos, na forma unidimensional, escritos por

$$\bar{s} = k_1 + ia_0 c_1, \quad (2.9)$$

onde k_1 e c_1 são funções das propriedades físicas e geométricas dos sistema, a_0 é a frequência adimensional e $a_0 c_1$ é o amortecimento geométrico no sistema.

Utilizando o princípio da correspondência a partir da Eq. (2.9), pode-se substituir o módulo elástico real pelo equivalente complexo:

$$E^c = E(1 + i2D) \quad (2.10)$$

onde D é a constante de amortecimento histerético ou estrutural e i , a unidade imaginária.

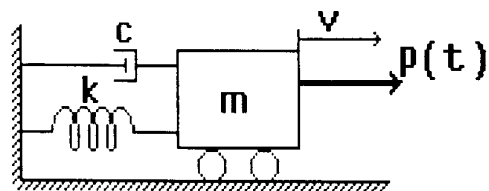


Figura 2.1 Componentes básicas de um sistema de um grau de liberdade.

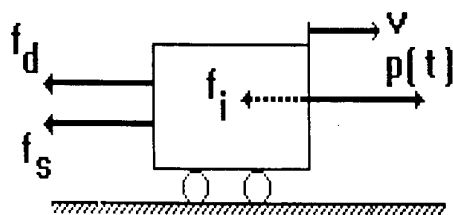


Figura 2.2 Forças em equilíbrio

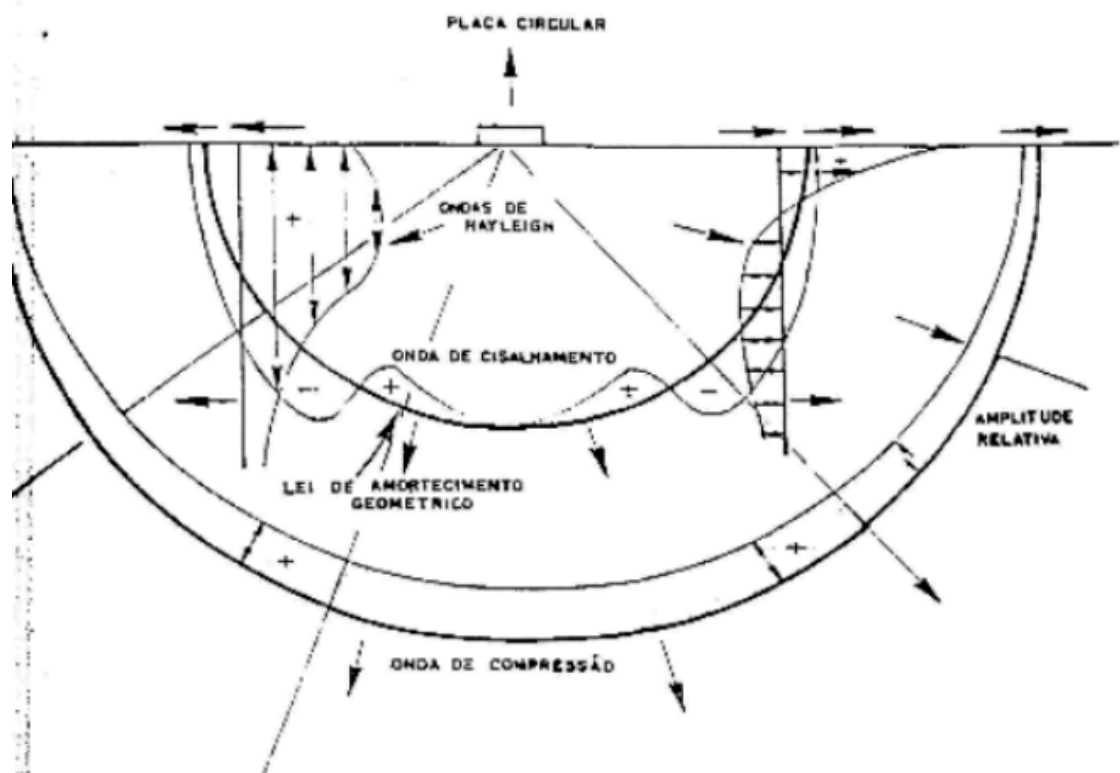


Figura 2.3 Conceito de amortecimento geométrico (Richart, 1970)

Tabela 2.1 Coeficientes de amortecimento viscoso equivalente para fundações rígidas circulares, segundo Richart (1970) e Novak (1973)

Modo de Vibração	Razão de Massa ou de Inércia	Coeficiente de Amortecimento
Vertical	$B_z = \frac{(1-\nu)}{4} \frac{m}{\rho r_o^3}$	$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$
Horizontal	$B_x = \frac{(7-8\nu)}{32(1-\nu)} \frac{m}{\rho r_o^3}$	$\xi_x = \frac{0.288}{\sqrt{B_x}}$
Rotacional	$B_\psi = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I_\psi}{\rho r_o^5}$	$\xi_\psi = \frac{0.15}{(1+B_\psi)\sqrt{B_\psi}}$
Torsional	$B_\theta = \frac{I_\theta}{\rho r_o^5}$	$\xi_\theta = \frac{0.50}{1+2B_\theta}$

3. MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL E PSEUDOFORÇAS

3.1 Formulação

Seja um sistema estrutural discretizado em elementos finitos, totalizando N graus de liberdade, dotado de amortecimento viscoso, expresso por uma matriz \mathbf{c} . Então, sua equação de movimento é

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{p}(\mathbf{t}). \quad (3.1)$$

A solução do problema de autovalor

$$\mathbf{k}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{m}\phi_i \quad (3.2)$$

conduz às frequências naturais de vibração ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$, e aos modos de vibração correspondentes ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Os modos de vibração são normalizados de acordo com

$$\phi_i^T \mathbf{m} \phi_j = \delta_{ij}, \quad (3.3)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. A matriz Φ cujas colunas são os modos normais de vibração ϕ_i é a matriz modal e tem as propriedades de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e de rigidez. Essas propriedades são expressas por

$$\Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.4)$$

e

$$\Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Lambda, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N , cujos elementos têm a dimensão de massa, e $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal formada pelas frequências naturais de vibração elevadas ao quadrado.

Através da matriz modal, as coordenadas físicas (deslocamentos) \mathbf{v} são transformadas em coordenadas generalizadas, isto é, fazendo na Eq. (3.1)

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Phi} \mathbf{Y}, \quad (3.6)$$

onde \mathbf{Y} é o vetor de coordenadas generalizadas, pré-multiplicando ambos os lados da Eq. (3.1) por $\mathbf{\Phi}^T$ e considerando as Eqs. (3.4) e (3.5), a seguinte equação em coordenadas modais é obtida

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{Y} = \mathbf{P}. \quad (3.7)$$

Nessa equação, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento generalizada dada por

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} \quad (3.8)$$

e \mathbf{P} é o vetor de forças generalizadas dado por

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{p}. \quad (3.9)$$

Quando o amortecimento do sistema é não-proporcional, \mathbf{C} não é diagonal. A grandeza relativa dos elementos de fora da diagonal de \mathbf{C} para os elementos da diagonal de \mathbf{C} é expressa por

$$\alpha_{ij} = \frac{C_{ij}^2}{C_{ii} C_{jj}} \quad (3.10)$$

O índice de acoplamento do amortecimento no sistema, α , é definido como o máximo valor de α_{ij} e é um dos indicadores do quanto ele é não-proporcional, conforme proposto por Venâncio-Filho e Claret (1991).

A matriz de amortecimento generalizada (não-diagonal) pode ser posta, como a soma de duas matrizes, da seguinte forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_f, \quad (3.11)$$

onde \mathbf{C}_d é a matriz diagonal, cujos elementos são os elementos da diagonal de \mathbf{C} , e \mathbf{C}_f tem elementos nulos na diagonal e os correspondentes elementos de fora da diagonal de \mathbf{C} . Substituindo \mathbf{C} da Eq. (3.11) na Eq. (3.7), obtém-se

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_d \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{P} - \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{Y}}. \quad (3.12)$$

Nessa equação em coordenadas modais, o acoplamento devido ao amortecimento não-proporcional é considerado como um vetor de pseudoforças $(-\mathbf{C}_f \dot{\mathbf{Y}})$ no segundo membro. Por outro lado, o primeiro membro é desacoplado como ocorre nos sistemas dotados de amortecimento proporcional.

A Eq. (3.12) é resolvida por um processo iterativo, cujo k-ésimo passo é dado por

$$\ddot{\mathbf{Y}}^{(k)} + \mathbf{C}_d \dot{\mathbf{Y}}^{(k)} + \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{P} - \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{Y}}^{(k-1)}. \quad (3.13)$$

A carga é aproximada por uma poligonal, como foi feito por Ibrahimbegovic e Wilson (1989). Em cada passo, o i-ésimo elemento de $\mathbf{Y}^{(k)}$, $Y_i^{(k)}$ é calculado pela integral:

$$Y_i^{(k)}(t) = \frac{1}{\omega_{d_i}} \int_0^t (P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \dot{Y}_j^{(k-1)}) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin \omega_{d_i}(t-\tau) d\tau, \quad (3.14)$$

com condições iniciais iguais às condições finais no passo anterior. Na Eq. (3.14), ω_{d_i} é a frequência amortecida no i-ésimo modo de vibração e $\dot{Y}_j^{(k-1)}$ é a velocidade da j-ésima coordenada generalizada.

Um critério de convergência do processo iterativo estabelecido na Eq. (3.13) para a i -ésima coordenada é

$$\left| \frac{Y_i^{(k)}(t_j) - Y_i^{(k-1)}(t_j)}{Y_i^{(k)}(t_j)} \right| < \bar{\varepsilon}, \quad (3.15)$$

onde $\bar{\varepsilon}$ é suficientemente pequeno e $t_j (j = 1, 2, \dots, J)$ é o tempo discreto no qual a integral é calculada.

Através de diversos exemplos numéricos, observa-se que apenas é necessário verificar a convergência dos valores máximos das coordenadas generalizadas. Assim, o critério de convergência da Eq. (3.15) pode ser expresso por

$$\left| \frac{Y_{i_{\max}}^{(k)} - Y_{i_{\max}}^{(k-1)}}{Y_{i_{\max}}^{(k)}} \right| < \bar{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Por outro lado, uma precisão adequada é obtida no cálculo da resposta, se o critério é satisfeito nos modos mais significativos. Esse fato vem reduzir o esforço computacional exigido pelo método. Exemplos numéricos serão apresentados no capítulo 4.

3.2 Condição de Convergência

Seja $Y_i^\theta(t)$ o valor exato da i -ésima coordenada generalizada no k -ésimo passo e seja $Y_i^{\alpha(k)}(t)$ o correspondente valor aproximado no k -ésimo passo. Os erros na coordenada generalizada aproximada e suas derivadas no k -ésimo passo do processo iterativo são definidos por

$$\Delta Y_i^{(k)}(t) = Y_i^{\alpha(t)}(t) - Y_i^{\theta}(t), \quad (3.17)$$

$$\Delta \dot{Y}_i^{(k)}(t) = \dot{Y}_i^{\alpha(t)}(t) - \dot{Y}_i^{\theta}(t), \quad (3.18)$$

$$\Delta \ddot{Y}_i^{(k)}(t) = \ddot{Y}_i^{\alpha(t)}(t) - \ddot{Y}_i^{\theta}(t), \quad (3.19)$$

O processo iterativo é convergente se, dado ε positivo e arbitrariamente pequeno, existe k , tal que

$$|\Delta Y_i^{(k)}(t)| < \varepsilon. \quad (3.20)$$

A condição de convergência do processo iterativo é obtida, em seguida, em função das frequências naturais de vibração e dos elementos das matrizes de massa e de amortecimento generalizadas. A premissa básica para a obtenção da condição de convergência consiste na definição de uma vizinhança de $Y_i^{\theta}(t)$ à qual pertença $Y_i^{\alpha(k)}(t)$. A seguinte definição é proposta

$$Y_i^{\alpha(k)}(t) = Y_i^{\theta}(t) \pm \zeta_i^{(k)} \text{sen}(\omega_i t + \theta_k), \quad (3.21)$$

onde $\zeta_i^{(k)} = |\Delta Y_{i,\max}^{(k)}|$ é o módulo do máximo erro na i -ésima coordenada generalizada no passo k e θ_k é tal que $(\omega_i t + \theta_k) = \pi/2$ radianos no instante em que $\zeta_i^{(k)}$ ocorre. Essa definição é ilustrada na Figura 3.1 onde é admitido o sinal positivo.

Considere na Eq. (3.13) a expressão da i -ésima coordenada generalizada, ou seja,

$$\ddot{Y}_i^{\alpha(k)}(t) + C_{ii} \dot{Y}_i^{\alpha(k)}(t) + \omega_i^2 Y_i^{\alpha(k)}(t) = P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \dot{Y}_i^{\alpha(k-1)}(t), \quad (3.22)$$

onde P_i é a força generalizada no i -ésimo modo. A introdução da Eq. (3.21) para o $(k-1)$ -ésimo passo na Eq. (3.22) conduz a:

$$\ddot{Y}_i^{\alpha(k)}(t) + C_{ii} \dot{Y}_i^{\alpha(k)}(t) + \omega_i^2 Y_i^{\alpha(k)}(t) = P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \dot{Y}_j^{\theta}(t) \mp \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \omega_j \zeta_j^{(k-1)} \cos(\omega_j t + \theta_k). \quad (3.23)$$

Por outro lado, $Y_i^{\theta}(t)$ pode ser obtido da Eq. (3.12) como

$$\ddot{Y}_i^{\theta}(t) + C_{ii} \dot{Y}_i^{\theta}(t) + \omega_i^2 Y_i^{\theta}(t) = P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \dot{Y}_j^{\theta}(t). \quad (3.24)$$

Subtraindo a Eq. (3.24) da Eq. (3.23) e considerando as Eqs. (3.17), (3.18) e (3.19), obtém-se:

$$\Delta \ddot{Y}_i^{(k)}(t) + C_{ii} \dot{\Delta Y}_i^{(k)}(t) + \omega_i^2 \Delta Y_i^{(k)}(t) = \mp \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} \omega_j \zeta_j^{(k-1)} \cos(\omega_j t + \theta_{k-1}). \quad (3.25)$$

A Eq. (3.25) define o histórico de resposta do erro $\Delta Y_i^{(k)}(t)$. A resposta permanente da oscilação representada nessa equação é

$$\Delta Y_i^{(k)}(t) = \mp \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_i^2} C_{ij} \omega_j \zeta_j^{(k-1)} \cos(\omega_j t + \theta_{k-1} + \lambda_k) \quad (3.26)$$

onde λ_k é o ângulo de fase e D_{ji} é o fator de amplificação dinâmica expresso por

$$D_{ji} = \left[(1 - \beta_{ji}^2)^2 + (2\xi_i \beta_{ji})^2 \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

onde $\beta_{ji} = \omega_j/\omega_i$ e $\xi_i = C_{ii}/(2\omega_i)$. A resposta transiente dessa oscilação decresce rapidamente em face do amortecimento e tem pouco significado na resposta total (Clough e Penzien, 1975). Como o termo em co-seno na eq. (3.26) será sempre menor que um ou igual à unidade, a seguinte condição é deduzida

$$|\Delta Y_{i_{\max}}^{(k)}| \leq \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_i^2} C_{ij} \omega_j \zeta_j^{(k-1)} \right|. \quad (3.28)$$

Se $\zeta^{(k-1)}$ é o maior de todos os erros $\zeta_j^{(k-1)}$, a Eq. (3.28) pode ser transformada em

$$|\Delta Y_{i_{\max}}^{(k)}| = \zeta_j^{(k)} \leq \zeta^{(k-1)} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_i^2} C_{ij} \omega_j \right|. \quad (3.29)$$

Consequentemente, o maior erro na resposta aproximada no k-ésimo passo é menor que o correspondente no (k-1)-ésimo passo, desde que

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_1^2} C_{ij} \omega_j \right| \leq 1. \quad (3.30)$$

A Eq. (3.30) é a condição de convergência do processo iterativo. A grandeza

$$IC_i = \left[\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_1^2} C_{ij} \omega_j \right| \right]^{-1} \quad (3.31)$$

é definida como o índice de convergência (IC) do modo normal i . Quanto maior for (IC), maior será a precisão obtida para a i -ésima coordenada para um dado número de iterações.

3.3 Processos Total e Parcial

A integração das equações generalizadas de movimento pode ser feita de duas formas distintas. A primeira, denominada de *processo total* (*total step method*), consiste em se calcular, a partir do instante t , a resposta generalizada em todos os demais instantes; a segunda, denominada de *processo parcial* (*single step method*), consiste em se calcular a resposta no instante $t + \Delta t$ a partir do instante t e, assim, sucessivamente.

No processo parcial, novas condições iniciais de movimento são utilizadas a cada intervalo de tempo e , dentro do mesmo intervalo de tempo, a cada nova iteração.

No processo total, as condições iniciais permanecem inalteradas. Nesse trabalho, descrevem-se a implementação e os resultados obtidos com o processo parcial.

Venâncio-Filho e Claret (1991) implementaram o processo total do método proposto para a solução de sistemas estruturais lineares com amortecimento não-proporcional. Ibrahimbegovic e Wilson (1989) implementaram o processo parcial do mesmo método. Udwadia e Kumar (1994) empregam o processo parcial em esquemas iterativos para análise de sistemas dinâmicos lineares com amortecimento não-proporcional, onde utilizam técnicas diferentes para a decomposição da matriz de amortecimento generalizada.

3.4 Algoritmo para Solução de um Sistema Linear Usando o Método de Superposição Modal Clássico com Pseudoforças – Processo Parcial

I. INÍCIO

1) Montagem das matrizes **m**, **c** e **k**, onde **c** é do tipo proporcional, ortogonal ou clássica.

2) Cálculo das formas modais Φ_i e da matriz diagonal **Λ**, conforme a Eq. (3.2), tendo sido utilizado aqui o método de Jacobi

$$\mathbf{k}\Phi_i = \omega_i^2 \mathbf{m}\Phi_i, i = 1, \dots, n.$$

3) Cálculo da matriz de amortecimento generalizada, conforme a Eq. (3.8)

$$\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi.$$

4) Cálculo do máximo índice de acoplamento, **α**, e das direções onde ocorre, conforme a Eq. (3.10)

$$\alpha_{ij} = \frac{C_{ij}^2}{C_{ii}C_{jj}}.$$

5) Seleção do intervalo de tempo Δt e do tempo total de análise.

6) Leitura e interpretação dos dados de carga $\mathbf{p}(\mathbf{t}_j)$.

II. INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

1) Seleção do número de iterações e do valor de tolerância, $\bar{\epsilon}$, para atender ao critério de convergência.

2) Leitura das condições iniciais $\dot{\mathbf{y}}_0$ e \mathbf{y}_0 .

3) Transformação da carga e das condições iniciais em coordenadas modais

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}_j) = \mathbf{P}_j = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{p}(\mathbf{t}_j),$$

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y}_0,$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{\Phi}^T \dot{\mathbf{y}}_0.$$

4) Decomposição da matriz generalizada de amortecimento, conforme a Eq. (3.11)

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_f.$$

5) Cálculo dos coeficientes de amortecimento modais, segundo Clough e Penzien (1975)

$$\xi_i = \frac{C_{d_i}}{2\omega_i}.$$

6) Cálculo da resposta por superposição modal clássica sem correção, utilizando a integral de Duhamel associada a procedimento numérico de integração. Essa expressão é conseguida linearizando a carga assimilada a uma poligonal, conforme sugerido por Venâncio-Filho e Claret (1991) e Ibrahimbegovic e Wilson (1989) para a coordenada generalizada y_i

$$y(t_i) = \frac{e^{-\xi\omega_D t_i}}{m\omega_D} \{A_D(t_i)\sin\omega_D t_i - B_D(t_i)\cos\omega_D t_i\}$$

III. CÁLCULO DA RESPOSTA NO MÉTODO PARCIAL

Processo iterativo:

1) Na iteração k:

1.1) Correção da carga:

$$P_{ij}^{(k)} = P_{ij}^{(k-1)} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^N C_{is} \dot{Y}_{sj}^{(k-1)},$$

1.2) Cálculo da resposta por superposição modal clássica:

$$Y_i^{(k)}(t_j) \text{ e } \dot{Y}_i^{(k)}(t_j).$$

2) Cálculo da norma euclidiana para verificação da convergência, que, no processo parcial, é expressa por

$$\left| \frac{Y_{ij}^{(k)} - Y_{ij}^{(k-1)}}{Y_{ij}^{(k)}} \right| < \bar{\epsilon}.$$

3) Caso a convergência seja atendida, cálculo do deslocamento em coordenadas físicas e impressão de resultados:

$$y_i(t_j) = \Phi_i Y_i(t_j).$$

4) Caso a convergência não seja atendida, retorna-se ao subitem III.1 até que haja convergência.

5) Cálculo do índice de convergência, conforme a Eq. (3.31)

$$IC_i = \left[\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{D_{ji}}{\omega_1^2} C_{ij} \omega_j \right| \right]^{-1}$$

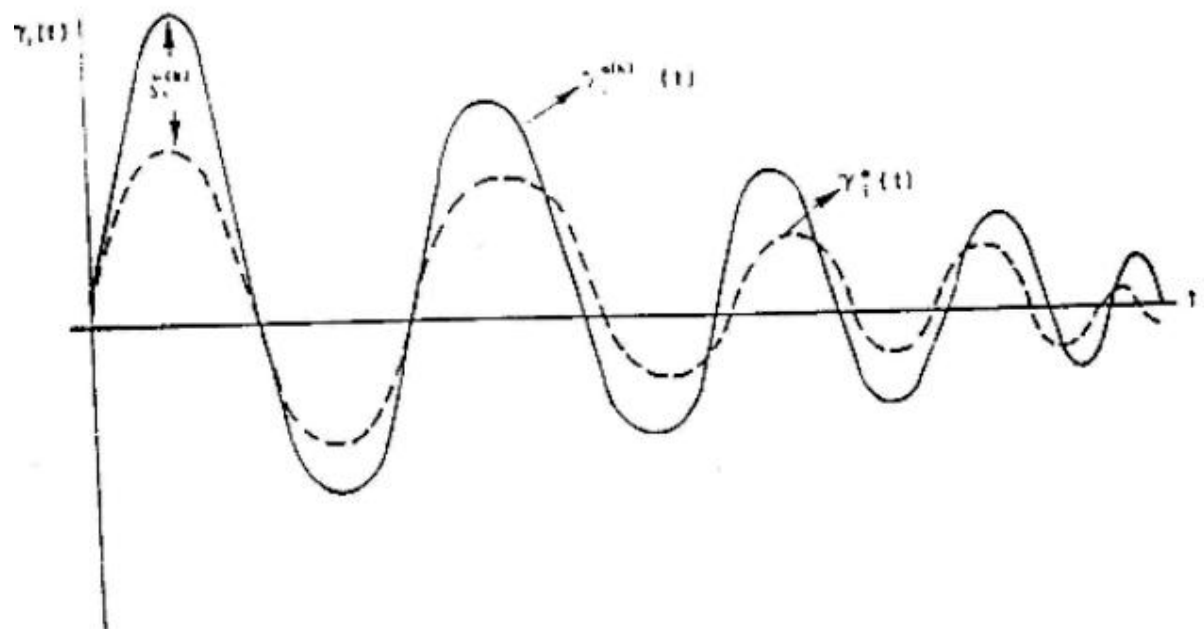


Figura 3.1 Respostas exata e aproximada no processo iterativo.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Exemplo 1: Sistema mecânico flexível com amortecedor concentrado

O exemplo estudado é o mesmo que foi analisado por Wilson et al. (1988), Chen e Taylor (1990) e Claret (1991). Trata-se de uma viga de balanço com amortecedor discreto associado a sua extremidade (Figura 4.1.1.). A estrutura é modelada com elementos de viga de comprimento igual a 1 m e um total de 10 graus de liberdade. O módulo de Young do material da viga é 500 N/m^2 e a massa específica, a área e a inércia têm valor unitário. O amortecedor concentrado tem coeficiente de amortecimento de 1.0 Ns/m . A carga, aplicada ao nó 5, é mostrada na Figura 4.1.2.

As matrizes de massa, rigidez e amortecimento são, respectivamente:

<p>.7428e+00</p> <p>0190e-00</p> <p>Simétrica</p>	.0000e+00	.1286e+00	-.0310e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
	.0190e-00	-.0310e+00	-.0071e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
		.7428e+00	.0000e+00	.1286e+00	-.0310e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
			.0190e-00	.0310e+00	-.0071e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
				.7428e+00	.0000e+00	.1286e+00	-.0310e+00	.0000e+00	.0000e+00
					.0190e-00	.0310e+00	-.0071e+00	.0000e+00	.0000e+00
						.7428e+00	.0000e+00	.1286e+00	-.0310e+00
							.0190e-00	.0310e+00	-.0071e+00
								.3714e+00	-.0524e+00
									.0095e+00
<p>1200e+00</p> <p>5</p> <p>Simétrica</p>	.0000e+00	-.6000e+04	3000e+04	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
	.4000e+04	-.3000e+04	1000e+04	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
		1200e+05	.0000e+04	-.6000e+00	.3000e+04	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
			.4000e+04	-.3000e+04	.1000e+04	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
				1200e+05	.0000e+00	-.6000e+04	.3000e+04	.0000e+00	.0000e+00
					.4000e+04	-.3000e+04	.1000e+04	.0000e+00	.0000e+00
						1200e+05	.0000e+00	-.6000e+04	.3000e+04
							.4000e+04	-.3000e+04	.1000e+04
								.6000e+04	-.3000e+04
									.2000e+04
<p>0000e+00</p> <p>Simétrica</p>	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
		.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
			.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
				.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
					.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
						.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
							.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
								.0000e+00	.0000e+00
									.0000e+00

A matriz de amortecimento generalizada é:

.8026e+00	.8109e+00	-.7980e+00	-.8200e+00	.8202e+00	.7877e+00	.7507e+00	.1056e+01	.1068e+01	.2124e+01
.8193e+00	-.8062e+00	-.8284e+00	.8287e+00	.7959e+00	.7585e+00	.1087e+01	.1079e+01	.2145e+01	
	.7934e+00	.8152e+00	-.8155e+00	.7832e+00	-.7464e+00	-.1050e+01	-.1062e+01	-.2112e+01	
		.8377e+00	-.8380e+00	-.8048e+00	-.7670e+00	-.1079e+01	-.1091e+01	-.2170e+01	
			.8383e+00	.8050e+00	.7672e+00	.1079e+01	.1091e+01	.2170e+01	
				.7731e+00	.7365e+00	.1037e+01	.1048e+01	.2084e+01	
					.7022e+00	.9880e+00	.9989e+00	.1987e+01	
						.1390e+01	.1405e+01	.1079e+01	
							.1421e+01	.2825e+01	
								.5620e+01	
	Simétrica								

Na Tabela 4.1.1, têm-se as frequências naturais de vibração desse sistema, os coeficientes de amortecimento modais e os índices de convergência.

Tabela 4.1.1 Frequências naturais de vibração, coeficientes de amortecimento modais e índices de convergência

Modo	Frequência Natural (rad/s)	ξ	IC
1	3.1	.1274	13.10
2	20.0	.0204	22.67
3	56.3	.0070	32.85
4	109.1	.0038	43.05
5	187.0	.0022	58.58
6	315.9	.0012	72.13
7	403.6	.0008	86.61
8	601.1	.0011	108.00
9	993.2	.0007	139.60
10	1353.0	.0021	173.20

O índice de acoplamento é $\alpha = 1.0$ e ocorre nas direções 1 x 10, indicando que o sistema tem amortecimento fortemente não-proporcional. Os dados de integração consideram que haja 350 pontos na resposta, 10 iterações e um intervalo de tempo de 0.005 s. Os modos de vibração são mostrados na Figura 4.1.3.

A Tabela 4.1.2 mostra os resultados obtidos para os deslocamentos máximos nas direções 1 a 10, considerando um tempo total de análise igual a 4 segundos, empregando-se o método proposto (processo parcial), e o método de superposição modal clássico (MSMC), o erro indicado é o de MSMC em relação ao método proposto.

Tabela 4.1.2 Precisão dos Resultados

Ponto	Processo Parcial	MSMC	Erro (%)
1	6.42E-03	2.13E-02	-69.859
2	1.17E-02	3.43E-02	-65.889
3	2.22E-02	4.62E-02	-51.948
4	2.03E-02	3.78E-02	-46.296
5	4.46E-02	6.17E-02	-27.715
6	2.50E-02	5.11E-02	-51.076
7	7.03E-02	7.68E-02	-8.464
8	2.64E-02	6.11E-02	-56.792
9	9.71E-02	9.97E-02	-2.608
10	2.75E-02	8.72E-02	-68.463

Na Figura 4.1.4, que analisa a resposta de deslocamento para a direção 7, observa-se que os resultados obtidos, para os diferentes valores do intervalo de integração, mostram que o processo parcial independe do intervalo de tempo selecionado e há plena concordância de resultados com o método de integração direta (Wilson- θ), conforme mostram as Figuras 4.1.5-a e 4.1.5-j. Nestas figuras, observa-se a precariedade dos resultados do método de superposição modal clássico com o abandono dos elementos de fora da diagonal na matriz de amortecimento generalizada em relação aos outros dois métodos, evidenciando que o método de superposição modal clássico realmente não é adequado para o tratamento do amortecimento fortemente não-proporcional.

4.2 Exemplo 2: Sistema Massa-Mola-Amortecedor com 2 Graus de Liberdade

Trata-se de um sistema de 2 graus de liberdade, como mostra a Figura 4.2.1, que foi proposto por Warburton e Soni (1977) e também analisado por Claret (1991). Nesse sistema, as molas têm rigidez $k_1 = k_2 = 10\text{MN/m}$ e as massas são $m_1 = m_2 = 10.000\text{ kg}$. As frequências naturais de vibração são $\omega_1 = 19.54\text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 51.17\text{ rad/s}$. O coeficiente de amortecimento c_1 é variável, sendo $c_1 = \delta c_2$, para os diversos casos estudados como indica a Tabela 4.2.1. A carga ressonante $p(t) = 1\text{ kN}$ sem 19.54 t é aplicada à massa 2, como mostra a Figura 4.2.2.

Para todos os casos estudados, as matrizes de massa e rigidez são dadas por:

$$m = \begin{bmatrix} .1000e+05 & .0000e+00 \\ \text{sim.} & .1000e+05 \end{bmatrix}$$

e

$$k = \begin{bmatrix} .2000e+08 & -.1000e+08 \\ \text{sim.} & .1000e+08 \end{bmatrix}.$$

Tabela 4.2.1 Coeficientes de amortecimento

Caso	C_2	δ	C_1
I	10^2	10	10^3
II	10^2	10^2	10^4
II	10^2	10^3	10^5
IV	10^3	10	10^4
V	10^3	10^2	10^5
VI	10^3	10^3	10^6
VII	10^4	10^2	10^6

As frequências naturais de vibração são dadas na Tabela 4.2.2.

Tabela 4.2.2 Frequências naturais de vibração

Modo	Frequência Natural (rad/s)
1	19.54
2	51.17

Os modos de vibração são dados na Figura 4.2.3.

4.2.1 Caso I

A matriz de amortecimento é

$$c = \begin{bmatrix} .1100e+04 & -.1000e+03 \\ \text{sim.} & .1000e+03 \end{bmatrix}$$

e a matriz de amortecimento generalizada é

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} .2870e-01 & .4025e-01 \\ \text{sim.} & .9130e-01 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de amortecimento modais e os índices de convergência são mostrados na Tabela 4.2.1.1.

Tabela 4.2.1.1. Coeficientes de amortecimento modais e índices de convergência

Modo	ξ	IC
1	.0007	1086.
2	.0008	2843.

O acoplamento máximo é .6183 e ocorre nas direções 2 x 1.

4.2.2 Caso II

A matriz de amortecimento é

$$c = \begin{bmatrix} .1010e+05 & -.1000e+03 \\ \text{sim.} & .1000e+03 \end{bmatrix}$$

e a matriz de amortecimento generalizada é

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} .2774e+00 & .4427e+00 \\ \text{sim.} & .7426e+00 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de amortecimento modais e os índices de convergência são mostrados na Tabela 4.2.2.1.

Tabela 4.2.2.1 Coeficientes de amortecimento modais e índices de convergência

Modo	ξ	IC
1	.007098	98.71
2	.007256	258.40

O acoplamento máximo é .9515 e ocorre nas direções 2 x 1.

4.2.3 Caso III

A matriz de amortecimento é

$$c = \begin{bmatrix} .1010e+06 & -.1000e+06 \\ \text{sim.} & .1000e+06 \end{bmatrix}$$

e a matriz de amortecimento generalizada é

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} .1056e+01 & .4472e+01 \\ \text{sim.} & .1894e+02 \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes de amortecimento modais e os índices de convergência são mostrados na Tabela 4.2.3.1.

Tabela 4.2.3.1 Coeficientes de amortecimento modais e índices de convergência

Modo	ξ	IC
1	.0270	0.240
2	.1851	4.245

O acoplamento máximo é 1.0 e ocorre nas direções 2 x 1.

4.2.4 Caso IV

A matriz de amortecimento é

$$c = \begin{bmatrix} .1100e+05 & -.1000e+04 \\ \text{sim.} & .1000e+04 \end{bmatrix}$$

e a matriz de amortecimento generalizada é

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} .2870e+00 & .4025e+00 \\ \text{sim.} & .9130e+00 \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes de amortecimento modais e os índices de convergência são mostrados na Tabela 4.2.4.1.

Tabela 4.2.4.1 Coeficientes de amortecimento modais e índices de convergência

Modo	ξ	IC
1	.007341	108.6
2	.008922	284.3

O acoplamento máximo é .6183 e ocorre nas direções 2 x 1.

4.2.4 Caso V

A matriz de amortecimento é

$$c = \begin{bmatrix} .1010e+06 & -.1000e+04 \\ \text{sim.} & .1000e+04 \end{bmatrix}$$

e a matriz de amortecimento generalizada é

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} .2774e+00 & .4427e+00 \\ \text{sim.} & .7426e+00 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de amortecimento modais e os índices de convergência são mostrados na Tabela 4.2.5.1.

Tabela 4.2.5.1 Coeficientes de amortecimento modais e índices de convergência

Modo	ξ	IC
1	.07098	9.89
2	.07256	25.90

O acoplamento máximo é .9515 e ocorre nas direções 2 x 1.

4.2.4 Caso VI

A matriz de amortecimento é

$$c = \begin{bmatrix} .1001e+07 & -.1000e+04 \\ \text{sim.} & .1000e+04 \end{bmatrix}$$

e a matriz de amortecimento generalizada é

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} .2765e+02 & .4468e+02 \\ \text{sim.} & .7255e+02 \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes de amortecimento modais e os índices de convergência são mostrados na Tabela 4.2.6.1.

Tabela 4.2.6.1 Coeficientes de amortecimento modais e índices de convergência

Modo	ξ	IC
1	.7074	1.15
2	.7090	3.03

O acoplamento máximo é .9950 e ocorre nas direções 2 x 1.

4.2.4 Caso VII

A matriz de amortecimento é

$$c = \begin{bmatrix} .1010e+07 & -.1000e+05 \\ \text{sim.} & .1000e+05 \end{bmatrix}$$

e a matriz de amortecimento generalizada é

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} .2774e+02 & .4427e+02 \\ \text{sim.} & .7426e+02 \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes de amortecimento modais e os índices de convergência são mostrados na Tabela 4.2.7.1.

Tabela 4.2.7.1 Coeficientes de amortecimento modais e índices de convergência

Modo	ξ	IC
1	.7098	1.16
2	.7256	3.08

O acoplamento máximo é .9515 e ocorre nas direções 2 x 1.

Para todos os casos analisados, o número de pontos adotado na resposta é 100, são feitas 10 iterações e o intervalo de tempo é 0.01 s.

A Tabela 4.2.3 mostra os resultados de deslocamentos máximos obtidos nas direções 1 e 2 para os métodos empregados: método proposto, que utiliza o processo parcial, método de superposição modal clássico e método de integração direta (Wilson- θ), além de mostrar a precisão dos resultados do método proposto em relação ao método de integração direta (Wilson- θ).

Tabela 4.2.3 Precisão dos resultados do método proposto em relação ao método de integração direta (Wilson- θ)

Caso	Ponto	Deslocamentos (x10e-03 m)		Int. Dir.	Erro (%)
		Sup. Modal	Mét. Proposto		
I	1	0.4754	0.3660	0.3657	0.082
	2	0.7060	0.5914	0.5915	-0.017
II	1	0.4505	0.3586	0.3579	0.196
	2	0.6716	0.5739	0.5727	0.210
III	1	0.2864	0.2892	0.2929	-1.263
	2	0.5214	0.4835	0.4801	0.708
IV	1	0.4928	0.3581	0.3574	0.196
	2	0.6687	0.5734	0.5723	0.192
V	1	0.2841	0.2888	0.2926	-1.299
	2	0.5200	0.4829	0.4797	0.667
VI	1	1.1483	0.4262	0.0871	389.323
	2	0.7012	1.5632	0.2271	179.245
VII	1	0.0744	0.0846	0.0829	10.300
	2	0.1435	0.2067	0.2047	29.900

As Figuras de 4.2.4-a a 4.2.4-o mostram os deslocamentos das massas 1 e 2 obtidos pelo método proposto, pelo método de integração direta (Wilson- θ) e pelo método de superposição modal clássico com abandono dos elementos de fora da matriz de

amortecimento generalizada. Observa-se que se α é baixo e IC é alto, a resposta obtida pelo método proposto é praticamente idêntica à obtida pelo método de integração direta; quando α e IC são altos, os erros do método proposto para o método de integração direta são pequenos; nos casos em que α é alto e IC é baixo, os erros do método proposto em relação ao método de integração direta são significativos.

4.3 Exemplo 3: Modelo de Usina Nuclear Simplificado em um Sistema de Oito Graus de Liberdade

Esse exemplo, analisado por Itoh (1973), Mau (1988) e Claret (1991), é composto de quatro diferentes tipos de estruturas rígidas interconectadas elasticamente: núcleo, vaso de pressão de concreto, base e edificação, cada uma delas tendo 2 graus de liberdade distintos.

As matrizes de massa, rigidez e amortecimento são, respectivamente:

<div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>	.8400e+01	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
	1.689e+07	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
		.5220e+02	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
			.8710e+08	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
				.5780e+02	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
					.2350e+08	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
						.1600e+03	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
							.2140e+08	.0000e+00	.0000e+00
								.0000e+00	.0000e+00
									.0000e+00
<div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>	.1180e+05	-.8700e+07	-.1180e+05	.1137e+08	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
		.1522e+11	.8700e+07	-.1723e+11	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
			.5298e+08	-.9334e+09	-.5180e+06	-.5180e+06	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
				.9461e+13	.9220e+09	-.6878e+13	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
					.6862e+06	.3622e+09	-.6170e+04	.1172e+08	.0000e+00
						.9953e+13	-.6170e+07	-.2853e+12	.0000e+00
							.6170e+04	-.1172e+08	.0000e+00
								.2853e+12	.0000e+00
									.0000e+00
									.0000e+00
<div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>	.9990e+01	-.7492e+04	-.9990e+01	.9790e+04	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
		.1045e+08	.7492e+04	-.1221e+08	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
			.5480e+03	-.9674e+06	-.5380e+03	-.5380e+06	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
				.4329e+10	.9576e+06	.1652e+10	.0000e+00	.0000e+00	.0000e+00
					.6178e+04	-.5042e+07	-.3000e+02	.5700e+05	.0000e+00
						.4343e+11	-.3000e+05	-.1820e+09	.0000e+00
							.3000e+02	.5700e+05	.0000e+00
								-.1820e+09	.0000e+00
								.3473e+08	.0000e+00
									.0000e+00

A matriz de amortecimento generalizada é

$$C = \begin{bmatrix} .8890e+01 & -7492e+04 & -5990e+01 & .9790e+04 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 \\ & 1045e+08 & 7492e+04 & -1221e+08 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 \\ & & 5480e+03 & -9574e+06 & -5380e+03 & -5380e+06 & .0000e+00 & .0000e+00 \\ & & & .4329e+10 & .9576e+06 & -1652e+10 & .0000e+00 & .0000e+00 \\ & & & & 8178e+04 & -5042e+07 & -3000e+02 & 5700e+05 \\ & & & & & .4343e+11 & -3000e+05 & -1820e+09 \\ & & & & & & .3000e+02 & -5700e+05 \\ & & & & & & & .3473e+09 \end{bmatrix}$$

Simetrica

As cargas são acelerações de base do terremoto El-Centro (Estados Unidos, 18/05/1940), Figura 4.3.1, é usado nessa análise como dados de carga. Os modos de vibração do sistema são mostrados na Figura 4.3.2. Na Tabela 4.3.1, têm-se as frequências naturais de vibração do sistema e os coeficientes de amortecimento modais.

Tabela 4.3.1 Frequências naturais de vibração do sistema e coeficientes de amortecimento modais

Modo	Frequencia (rad/s)	ξ
1	18.42	.0563
2	30.70	.2747
3	37.83	.5787
4	79.42	.5738
5	100.70	.0406
6	118.30	.1078
7	169.90	.2833
8	368.90	.1277

O índice de acoplamento máximo, que ocorre nas direções entre 2 x 3, é .9378, indicando que o amortecimento é fortemente não-proporcional. A Tabela 4.3.2 mostra os índices de convergência.

Tabela 4.3.2 Índices de convergência

Modo	IC
1	2.540
2	0.515
3	0.624
4	0.868
5	4.098
6	2.254
7	4.070
8	9.855

O número de pontos adotado na resposta é de 350, são feitas 20 iterações e o intervalo de tempo é de 0.002 s.

A Tabela 4.3.3 mostra os deslocamentos máximos obtidos pelo método proposto, integração direta (Wilson- θ) e superposição modal clássico e o erro do método proposto em relação a método de integração direta (Wilson- θ).

Tabela 4.3.3 Precisão dos resultados do método parcial em relação ao de integração direta (Wilson- θ).

Ponto	SMClássico	Int. Direta	Parcial	Erro (%)
1	0.12	0.757	0.146	418.93
2	1.31E-04	5.37E-05	2.77 E-05	93.86
3	4.40E-02	2.02E-02	1.53 E-02	32.03
4	1.42E-05	8.78E-05	9.98 E-05	12.02
5	5.59E-02	2.54E-02	2.38 E-02	6.72
6	1.59E-06	9.67E-05	9.82 E-05	-1.52
7	0.1	0.41	0.38	7.89
8	2.56E-05	1.90E-05	1.83 E-05	3.82

A Figura 4.3.3 representa as respostas obtidas na direção 3 para diferentes valores do intervalo de tempo de integração, demonstrando a estabilidade do método proposto. As

Figuras de 4.3.4-a a 4.3.4-e mostram a boa aproximação das respostas obtidas pelo método proposto e pelo método de integração direta (Wilson- θ) nas direções 4.5,6,7 e 8 do sistema analisado. Essas figuras ilustram também a inadequação do método de superposição modal clássico para o tratamento do amortecimento não-proporcional.

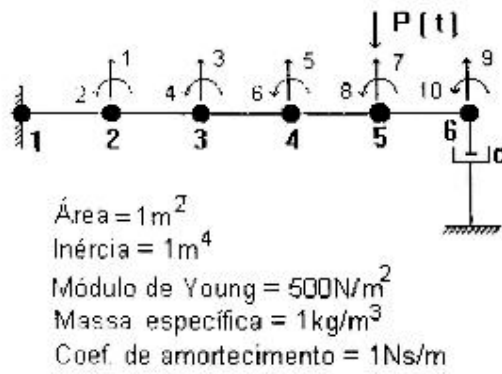


Figura 4.1.1 Sistema dinâmico amortecido (Exemplo 1).

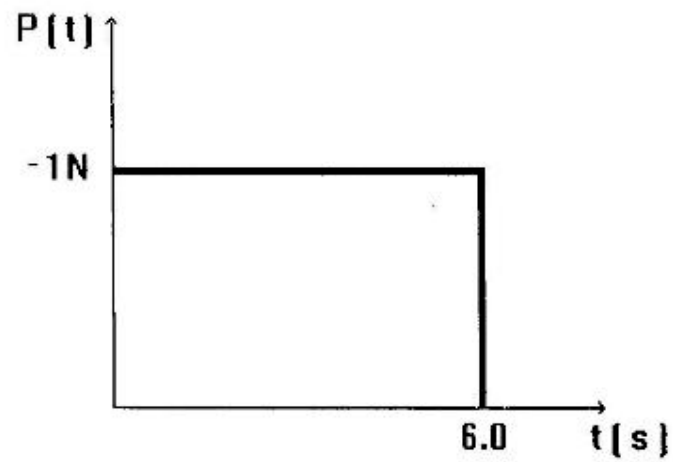


Figura 4.1.2 Carga aplicada ao nó 5 (Exemplo 1).

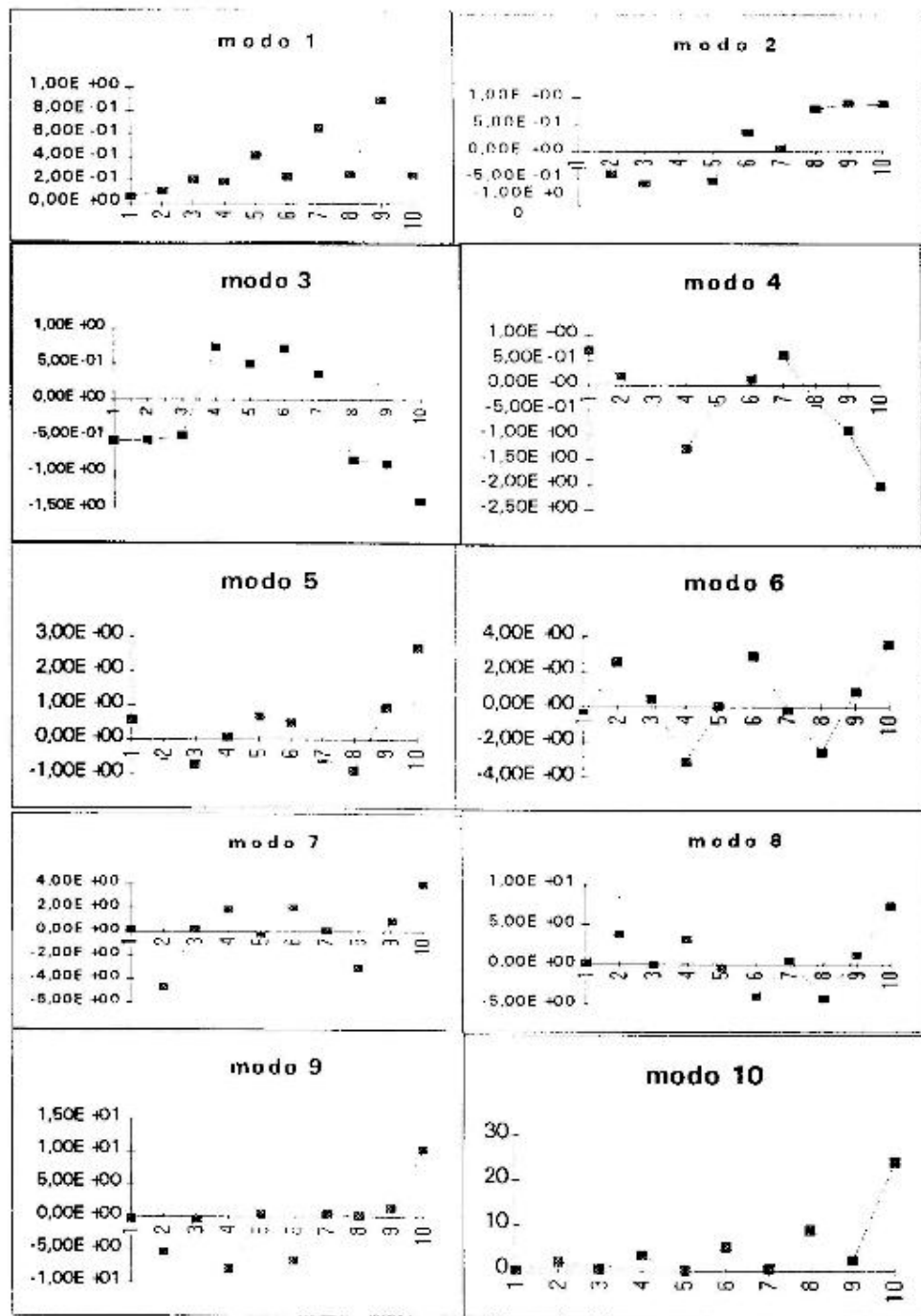


Figura 4.1.3 Modos de vibração (Exemplo 1).

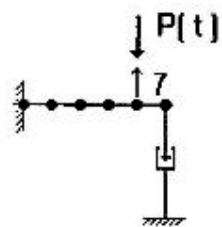
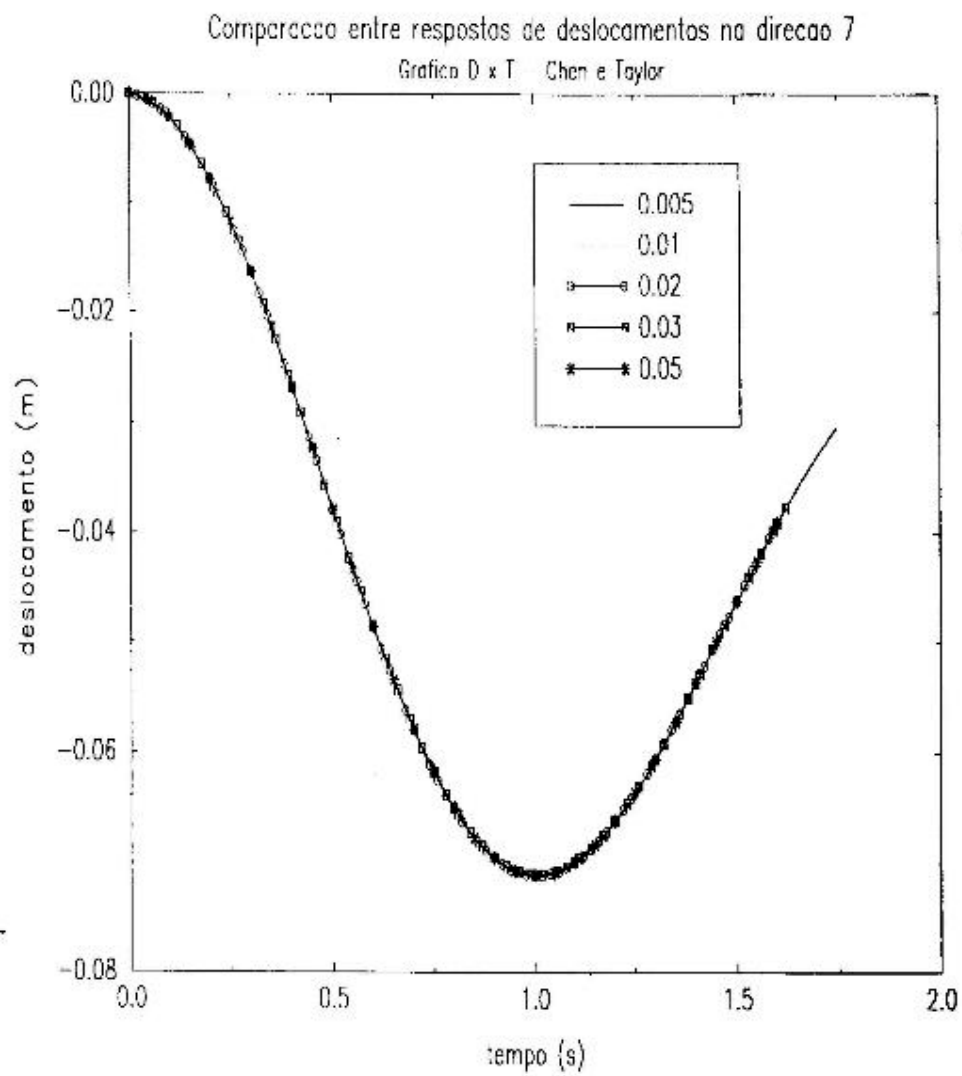


Figura 4.1.4 Deslocamento na direção 7 (m) x tempo (s).

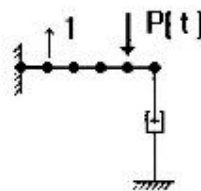
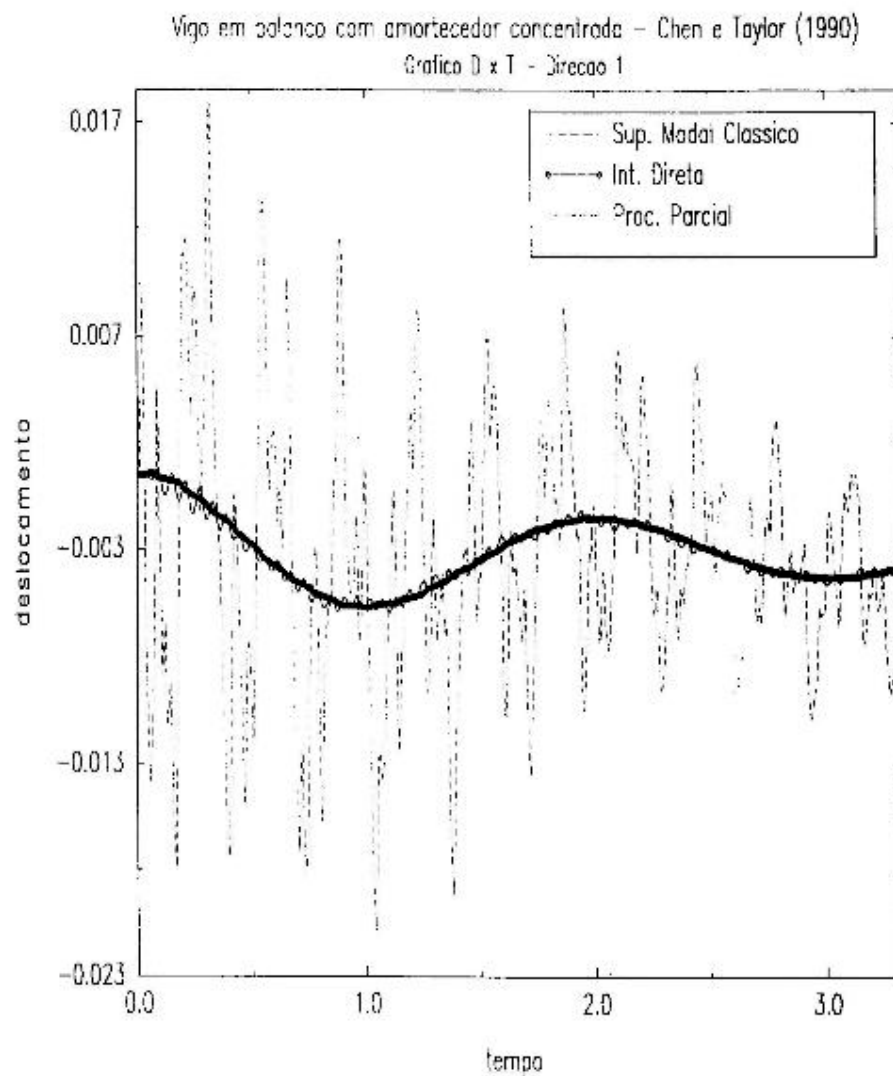


Figura 4.1.5-a Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

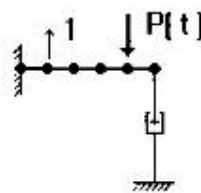
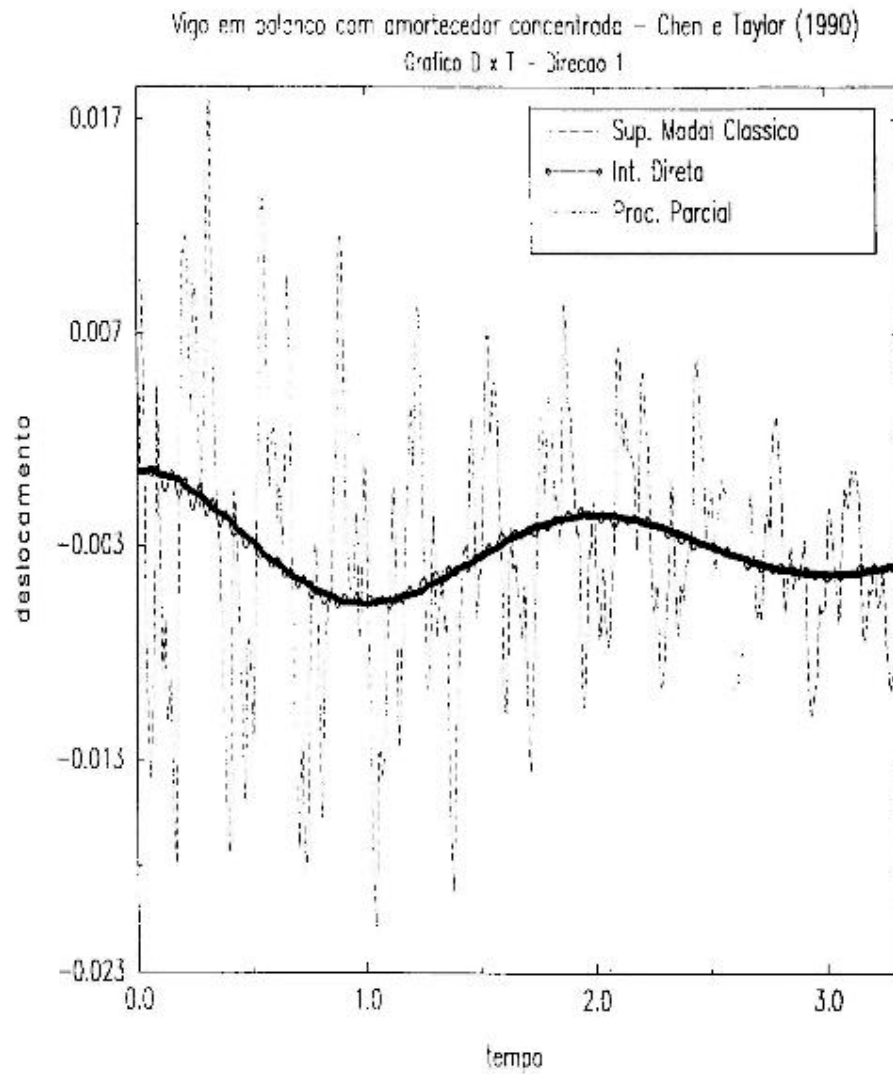


Figura 4.1.5-b Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

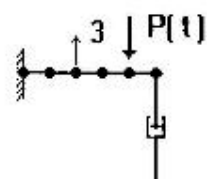
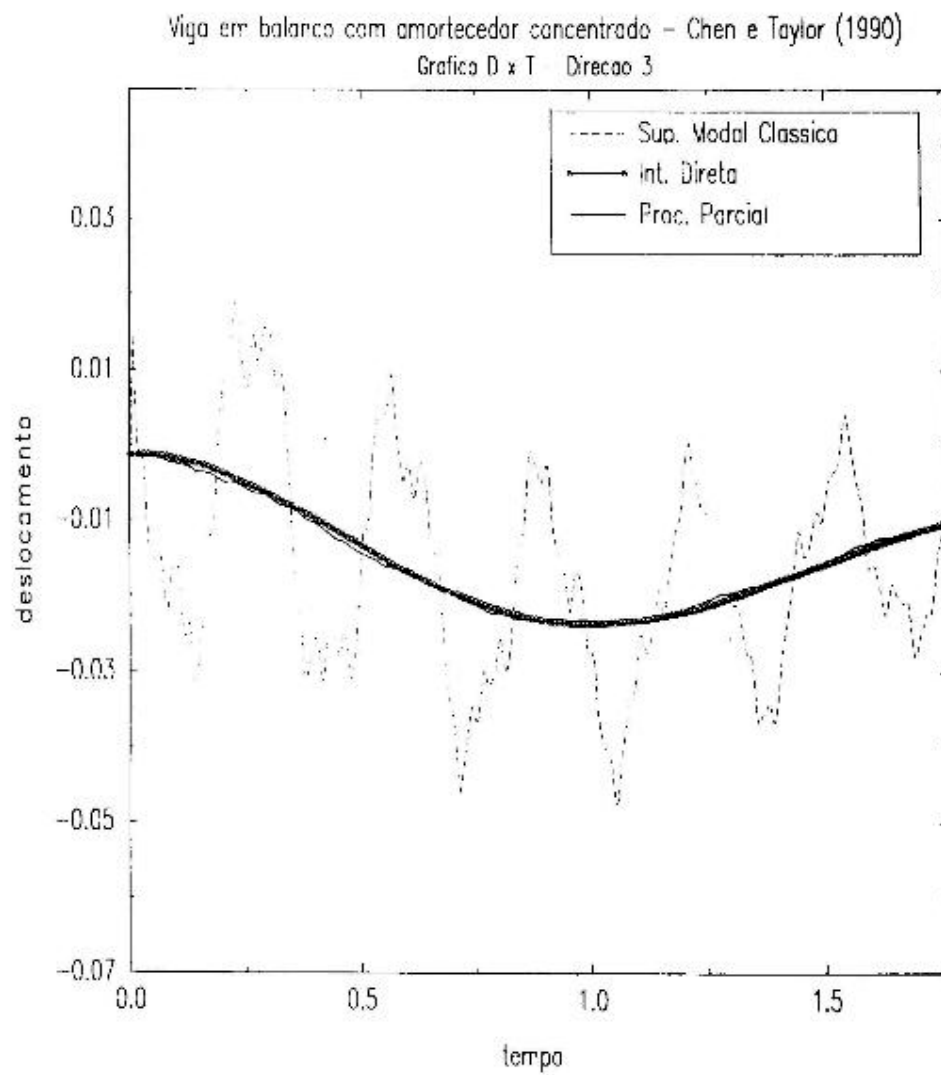


Figura 4.1.5-c Deslocamento na direção 3 (m) x tempo (s).

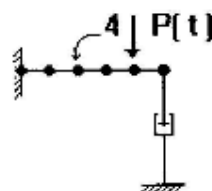
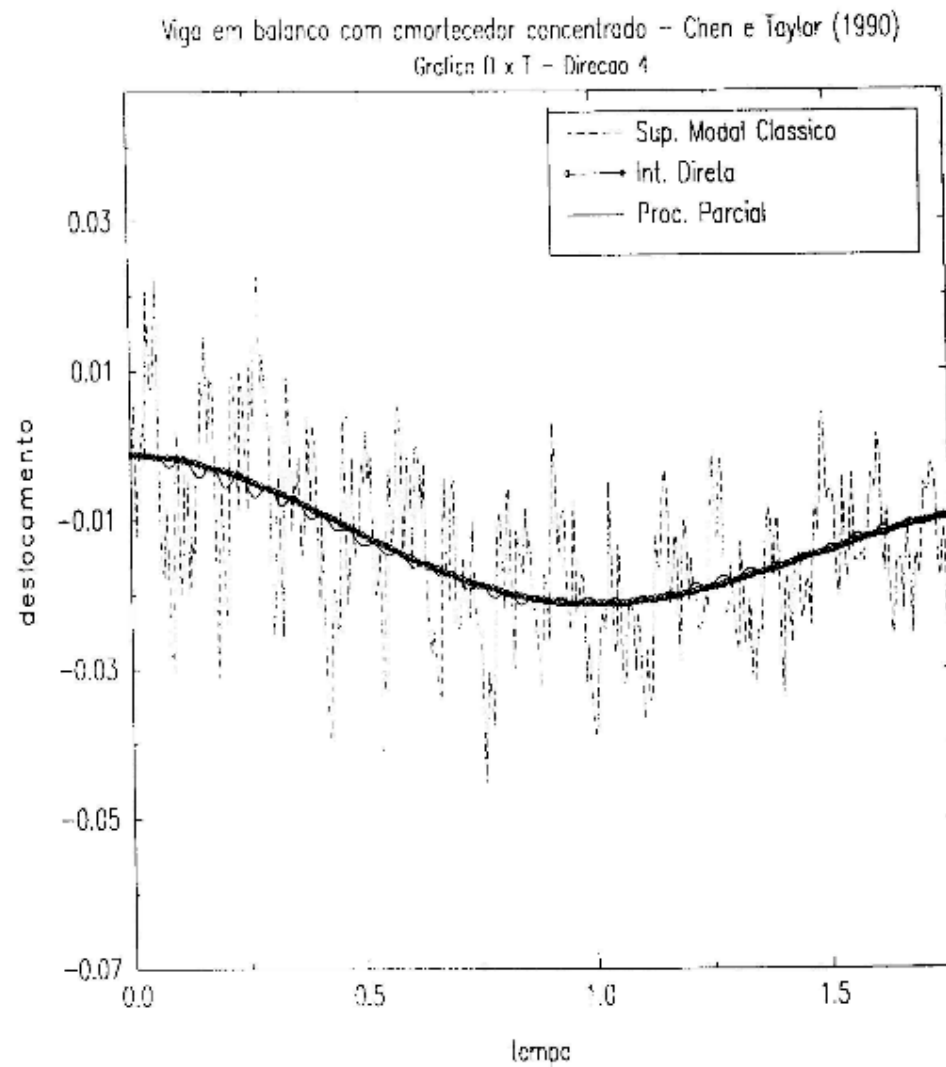


Figura 4.1.5-d Deslocamento na direção 4 (m) x tempo (s).

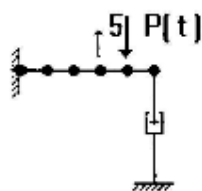
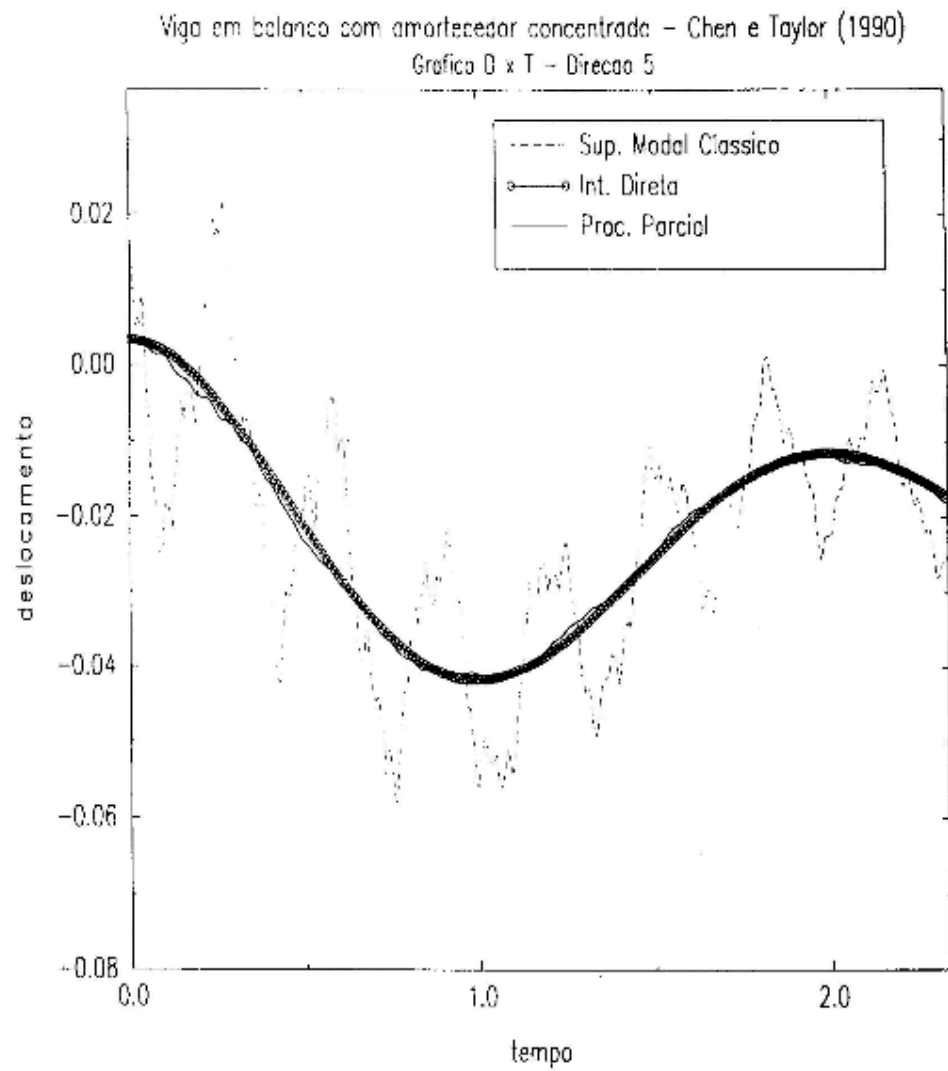


Figura 4.1.5-e Deslocamento na direção 5 (m) x tempo (s).

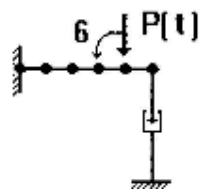
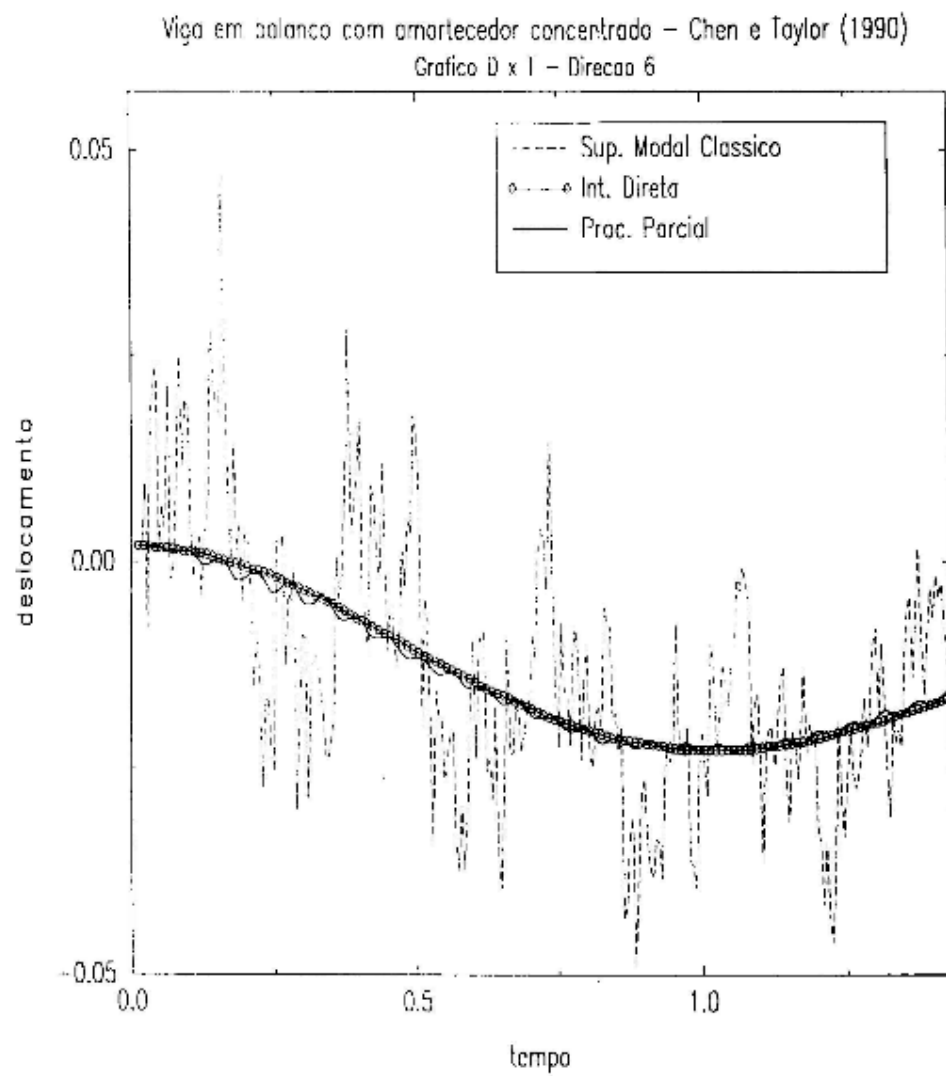


Figura 4.1.5-f Deslocamento na direção 6 (m) x tempo (s).

Viga em balanço com amortecedor concentrado – Chen e Taylor (1990)

Gráfico D x T – Direção 7

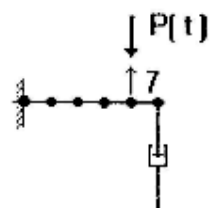
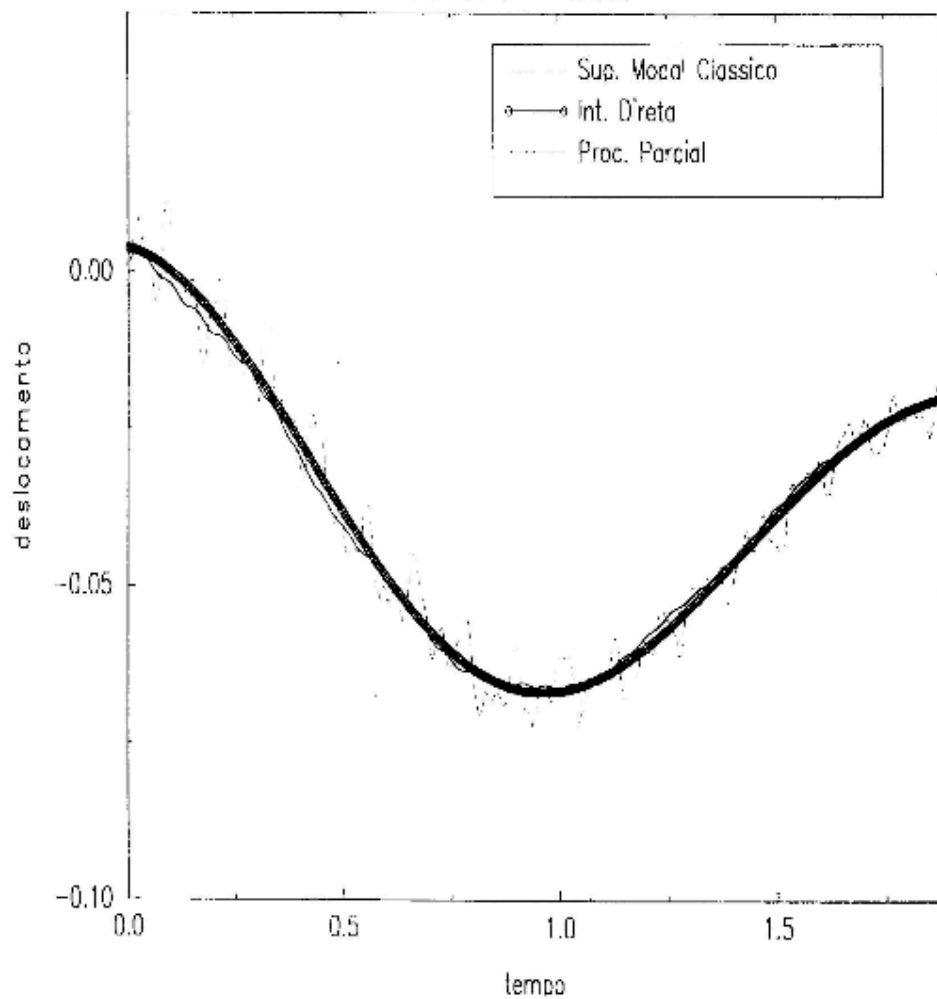


Figura 4.1.5-g Deslocamento na direção 7 (m) x tempo (s).

Viga em balanço com amortecedor concentrado - Chen e Taylor (1990)

Gráfico $\theta \times t$ - Direção 8

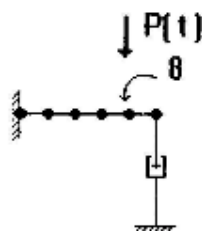
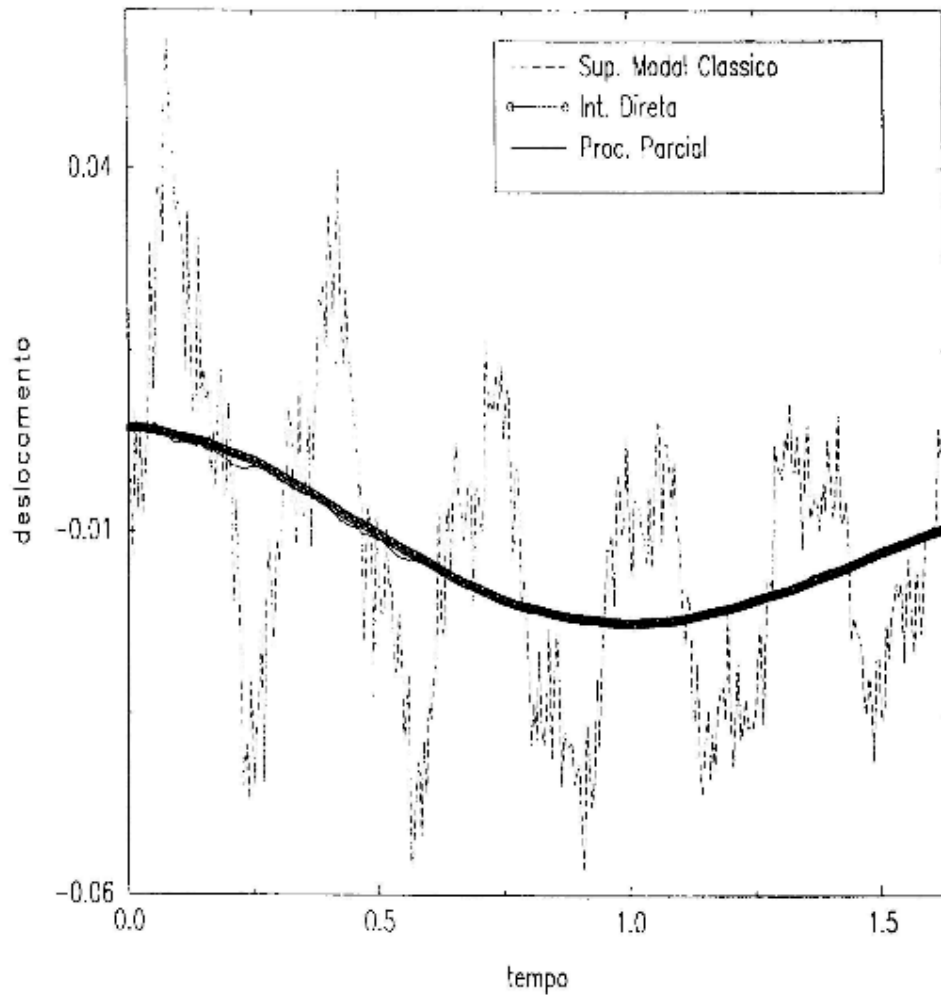


Figura 4.1.5-h Deslocamento na direção 8 (m) x tempo (s).

Viga em balanço com amortecedor concentrado – Chen e Taylor (1990)

Gráfico $D \times T$ – Direção 9

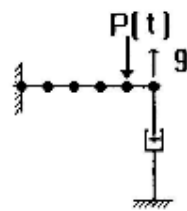
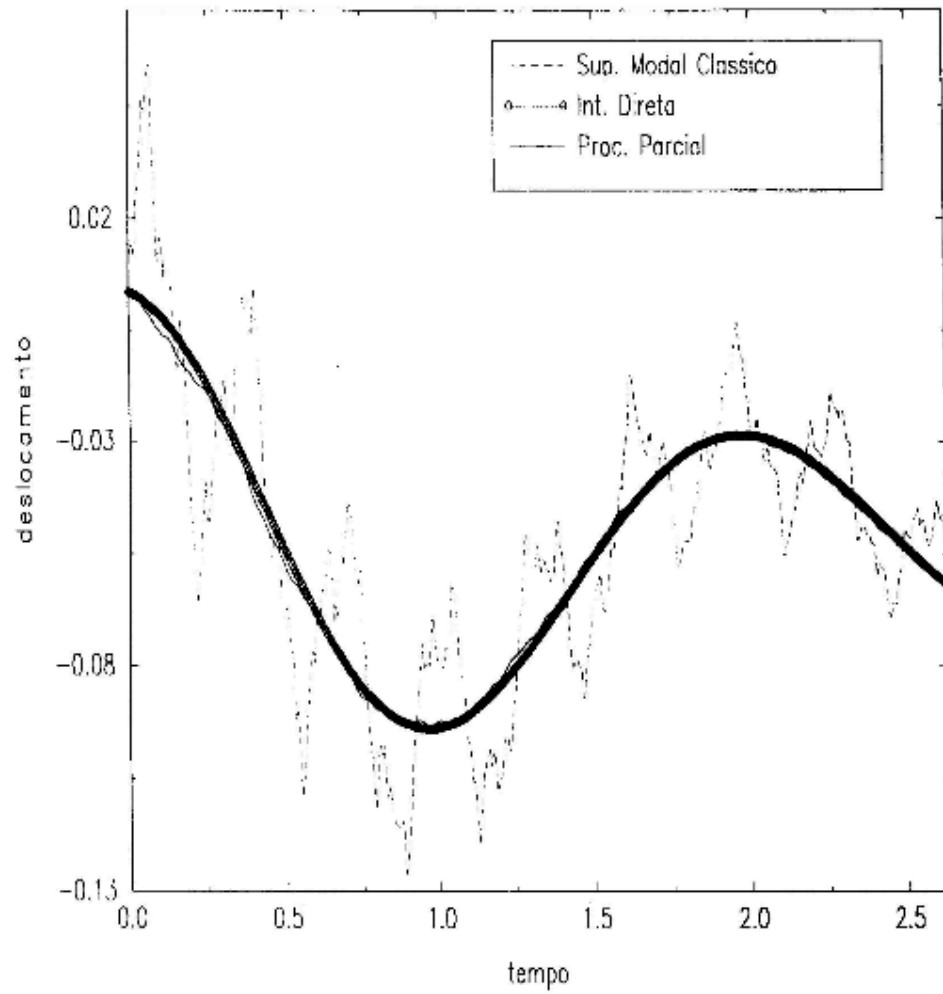


Figura 4.1.5-i Deslocamento na direção 9 (m) x tempo (s).

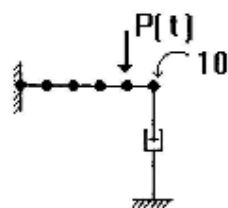
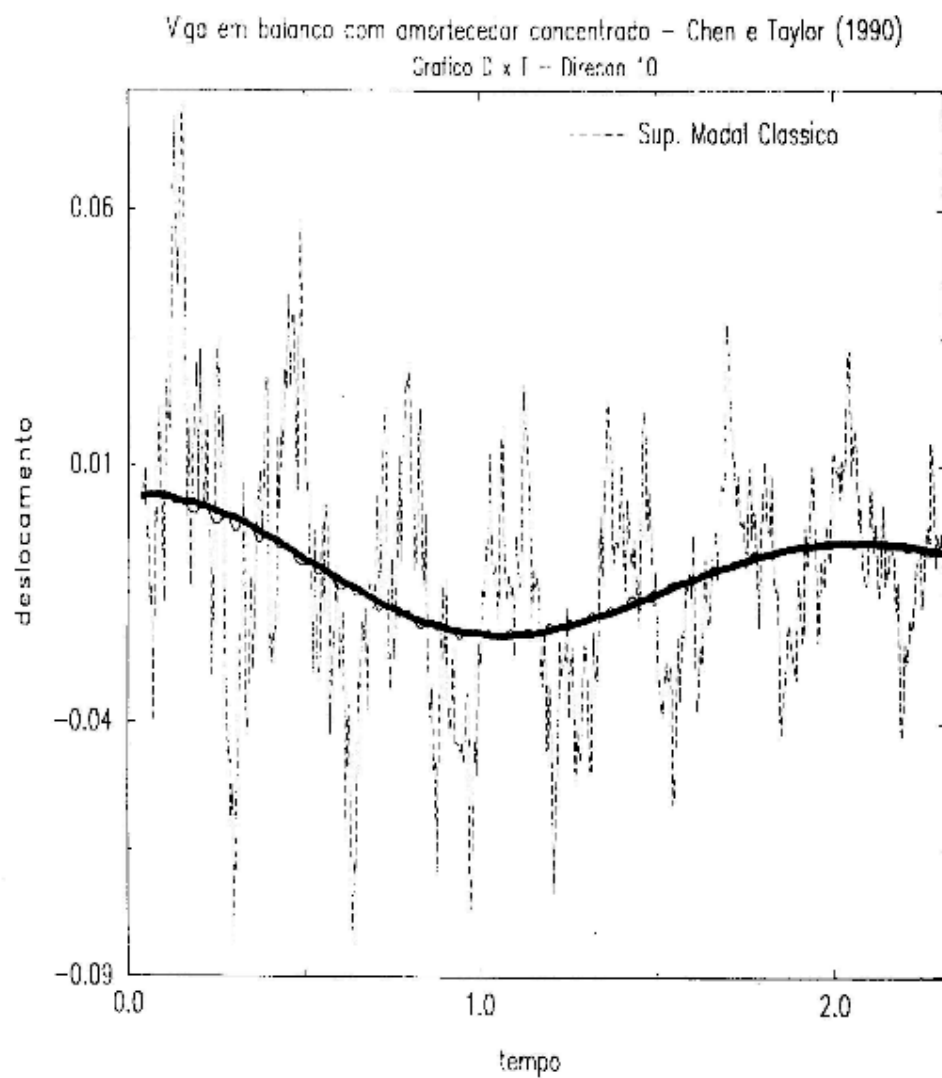


Figura 4.1.5-j Deslocamento na direção 10 (m) x tempo (s).

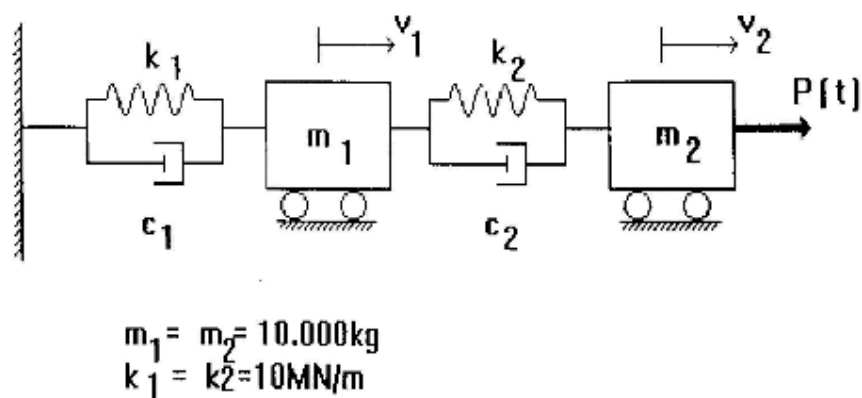


Figura 4.2.1 Sistema massa-mola-amortecedor (Exemplo 2).

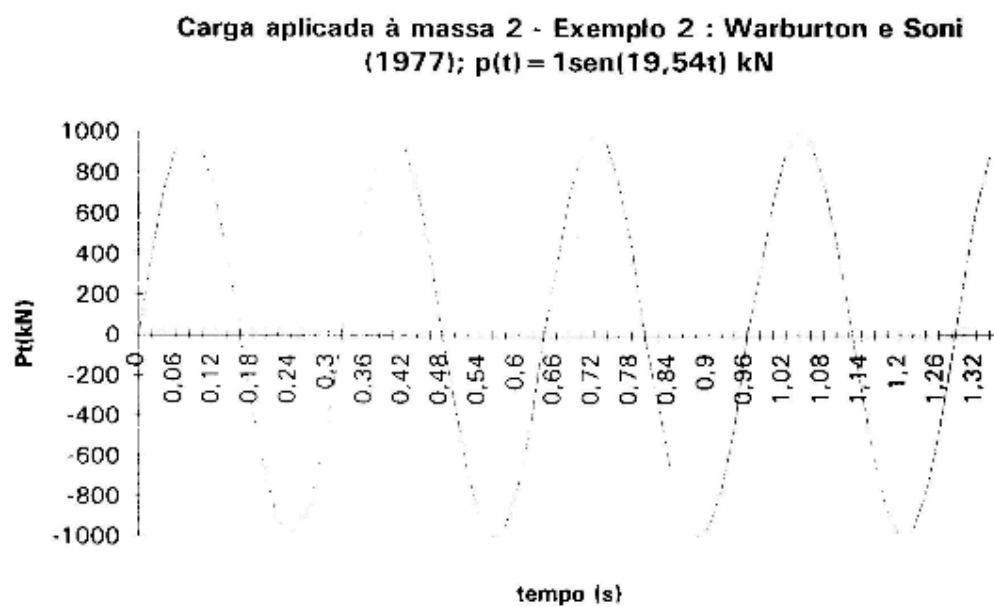


Figura 4.2.2 Carga aplicada à massa 2 (Exemplo 2).

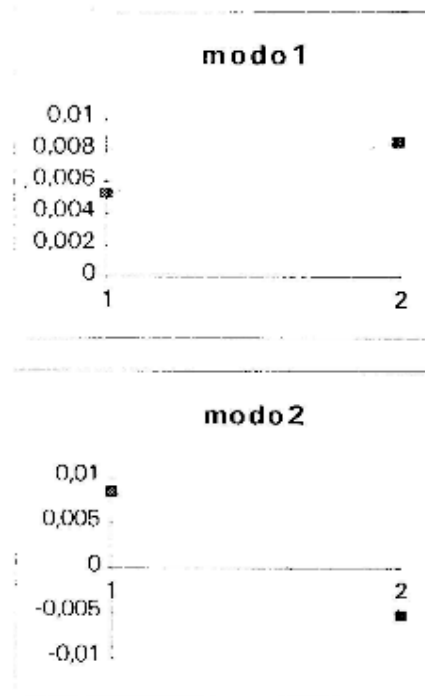


Figura 4.2.3 Modos de vibração (Exemplo 2).

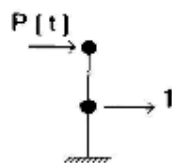
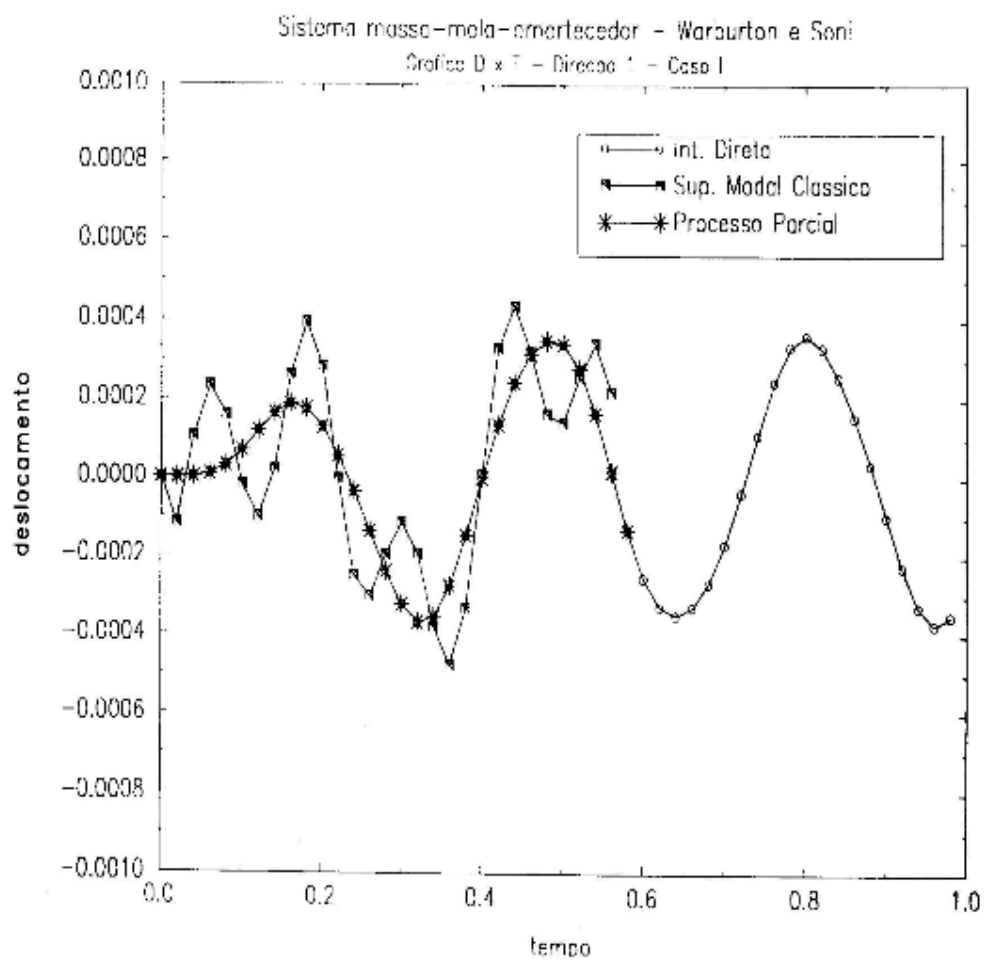


Figura 4.2.4-a Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

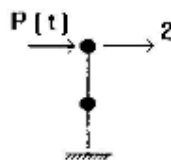
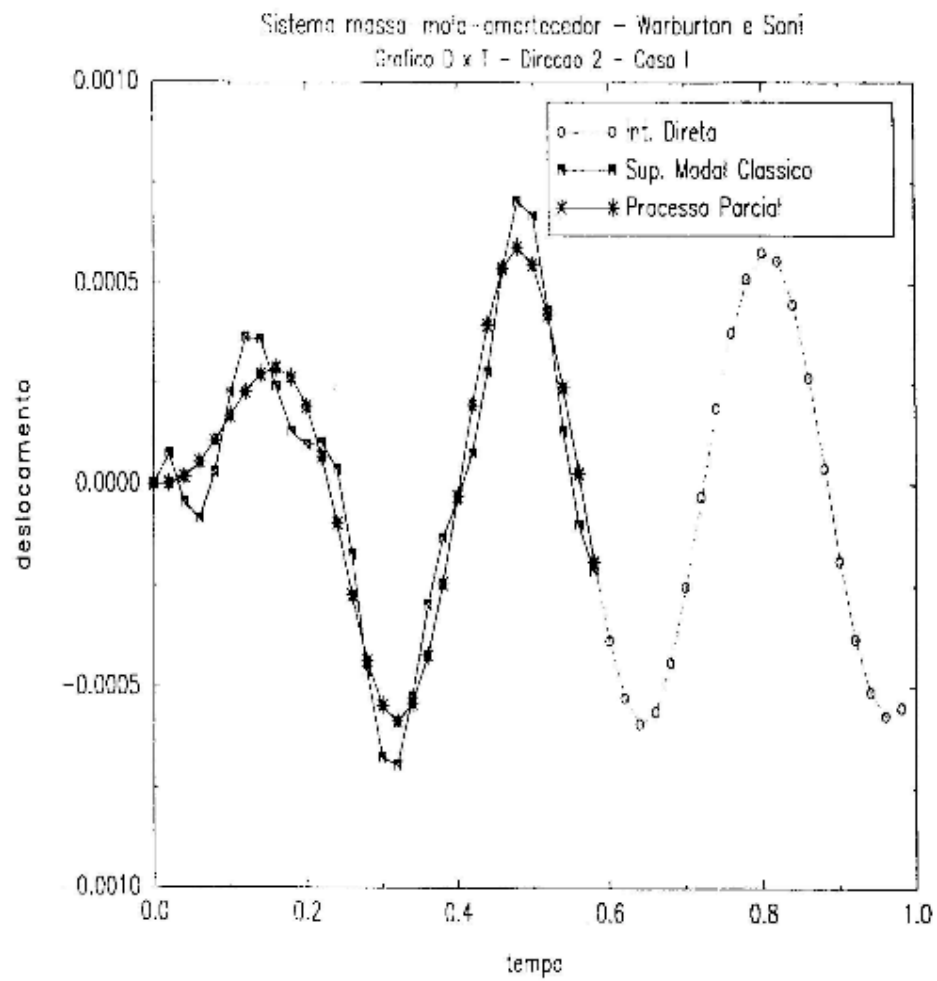


Figura 4.2.4-b Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

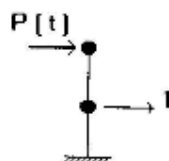
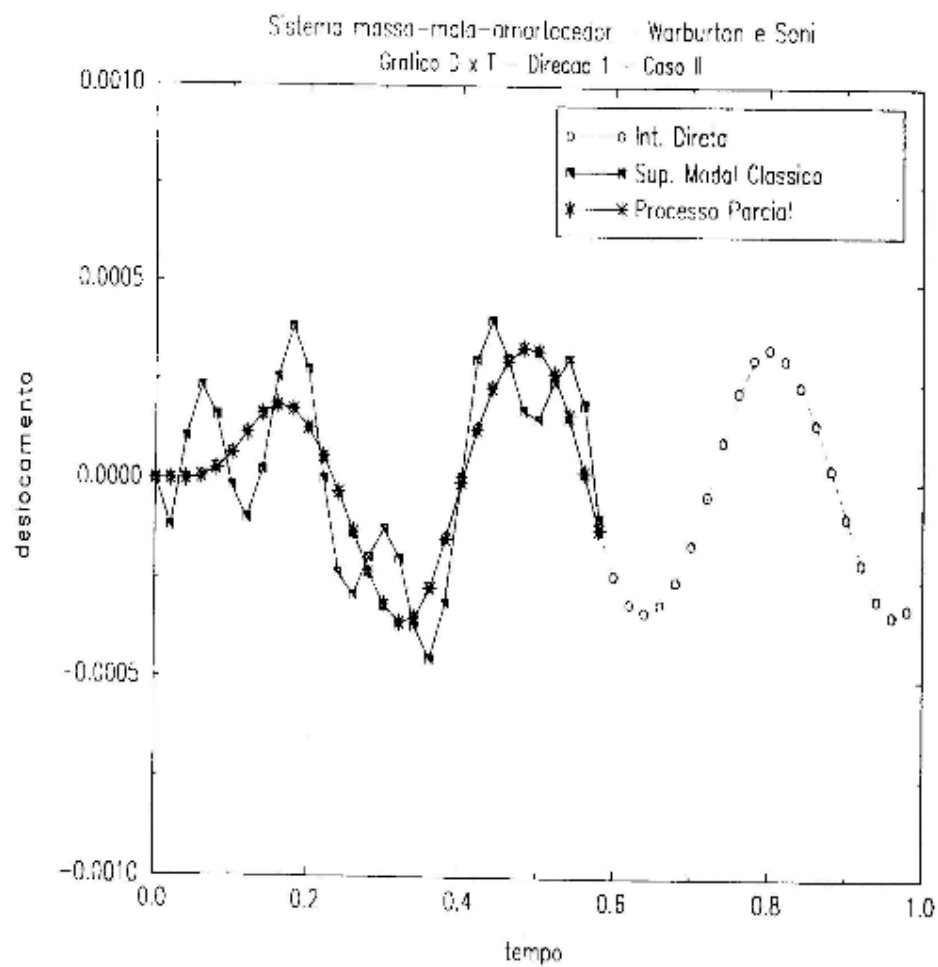


Figura 4.2.4-c Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

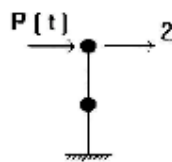
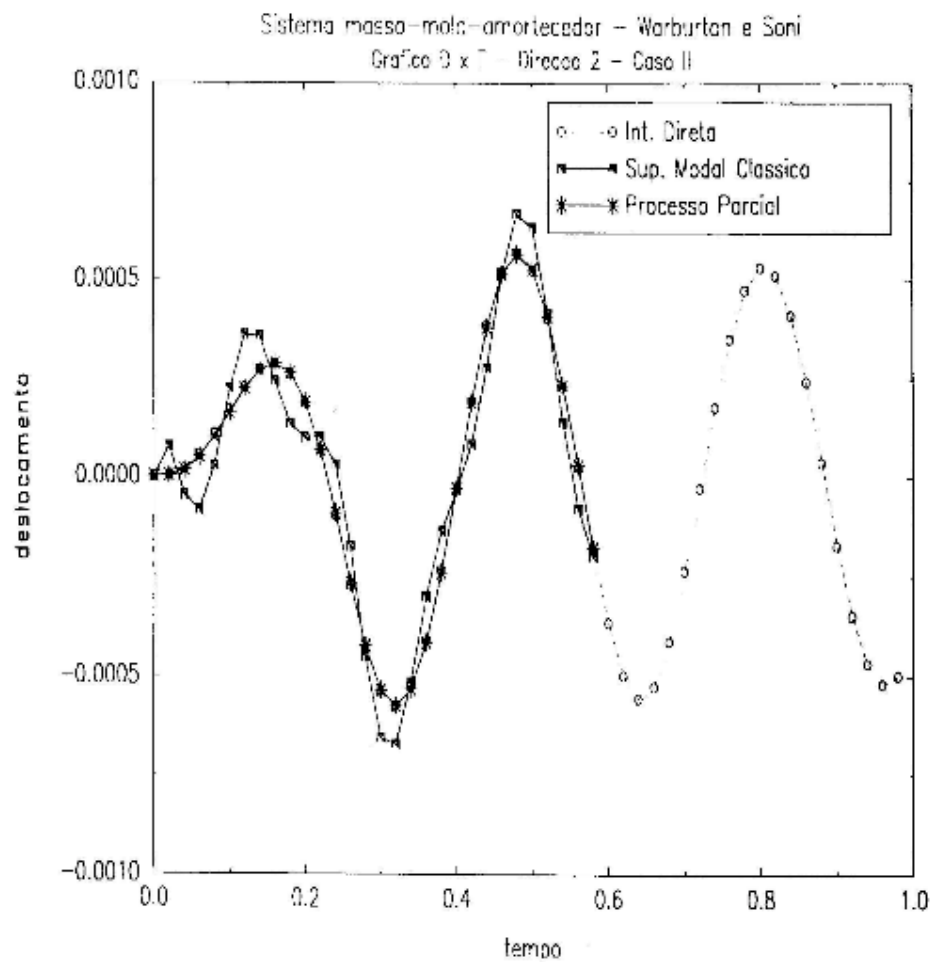


Figura 4.2.4-d Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

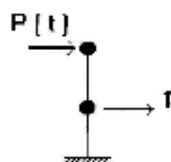
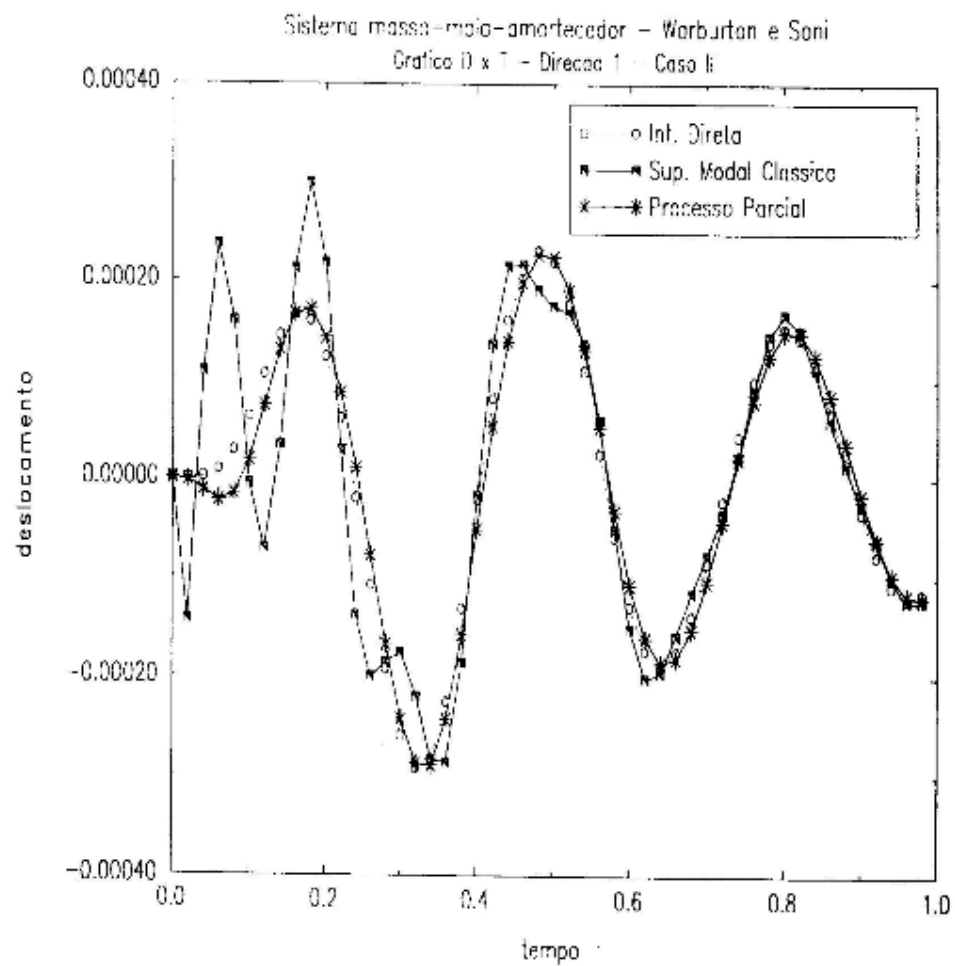


Figura 4.2.4-e Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

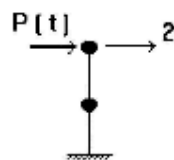
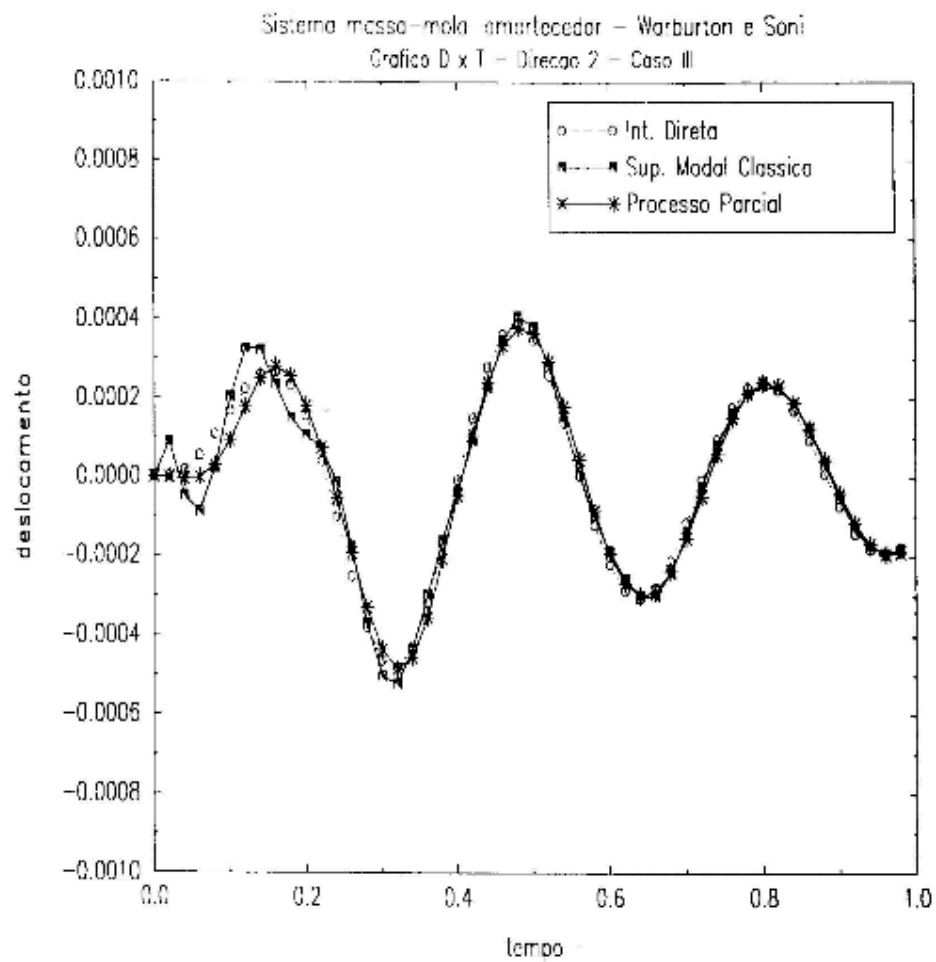


Figura 4.2.4-f Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

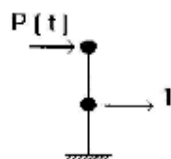
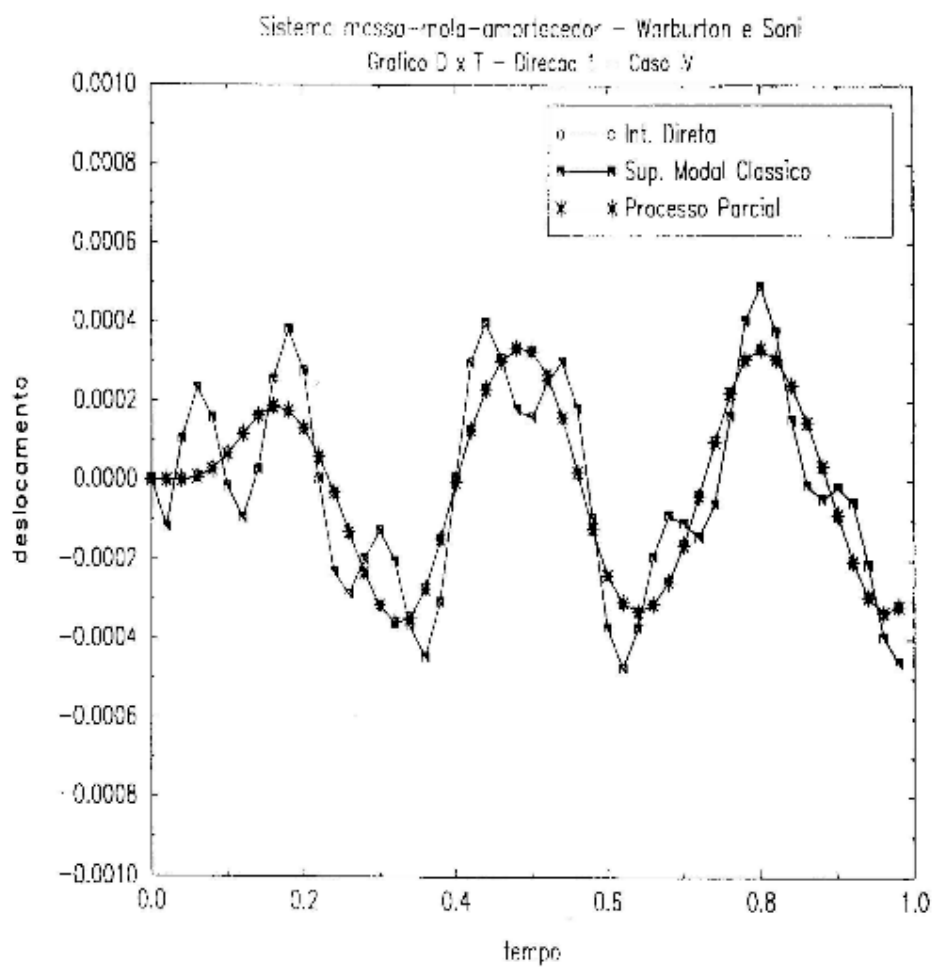


Figura 4.2.4-g Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

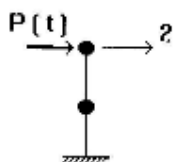
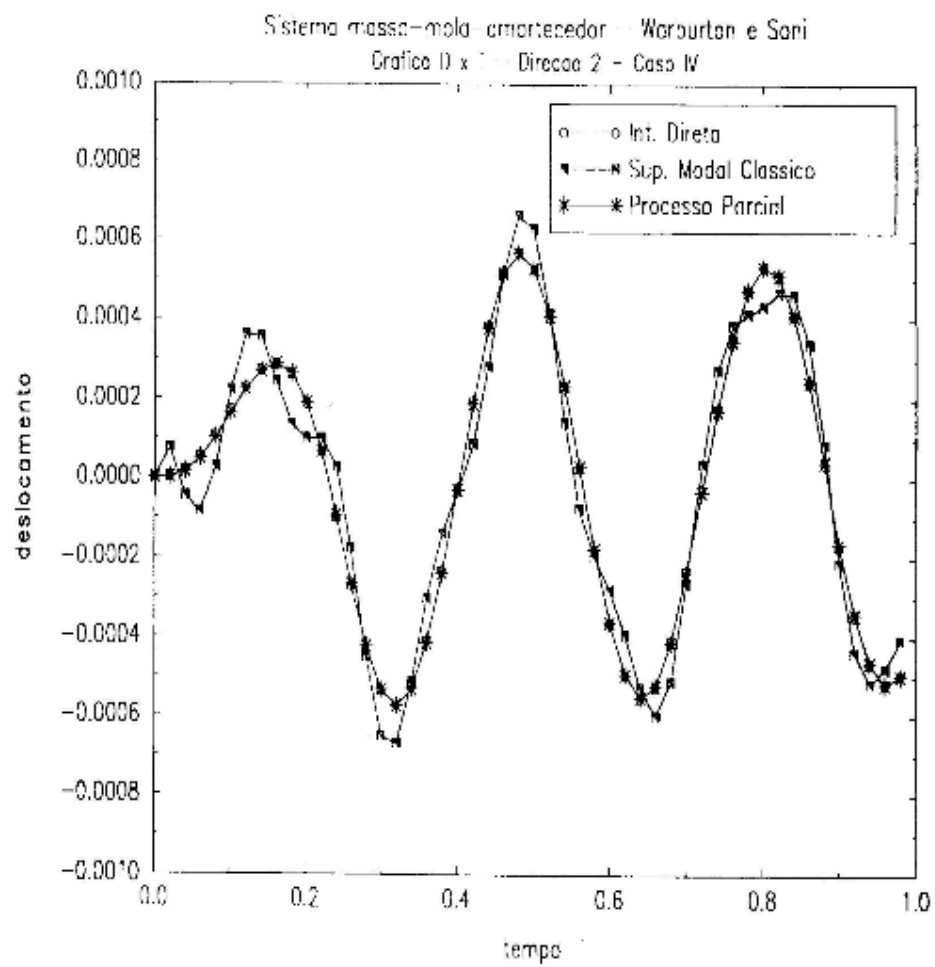


Figura 4.2.4-h Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

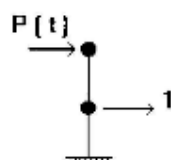
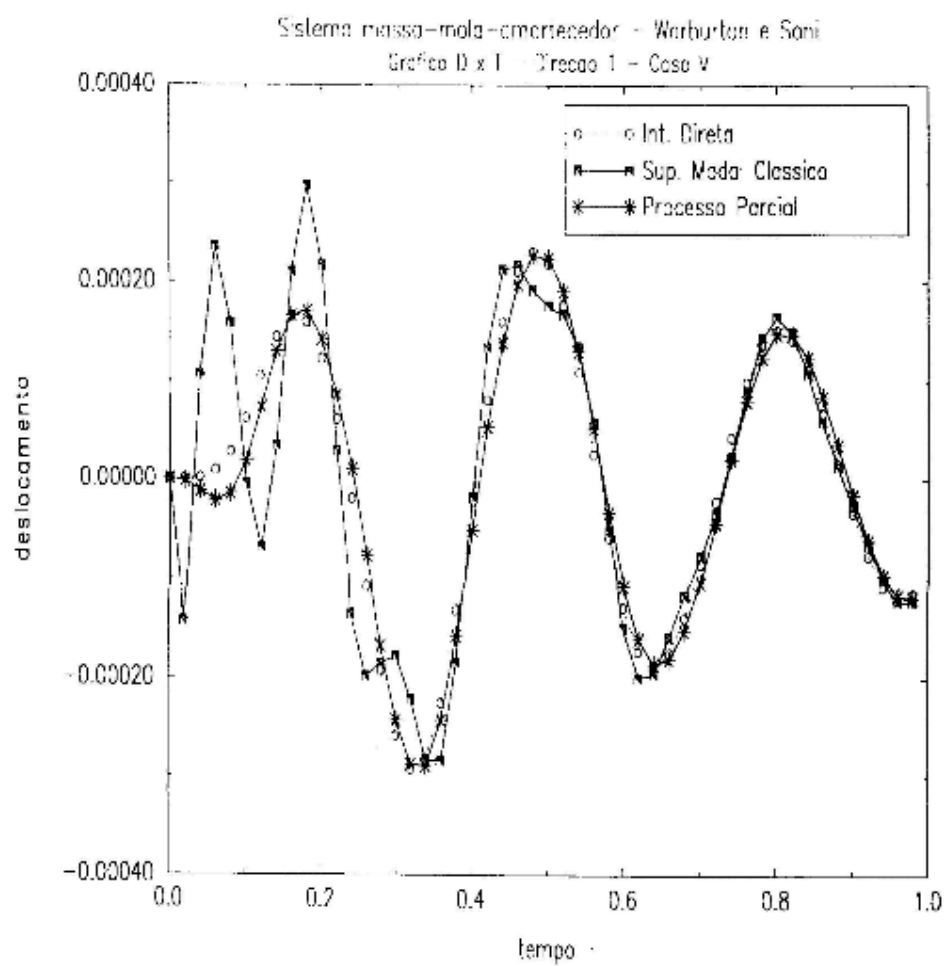


Figura 4.2.4-i Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

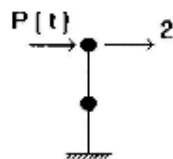
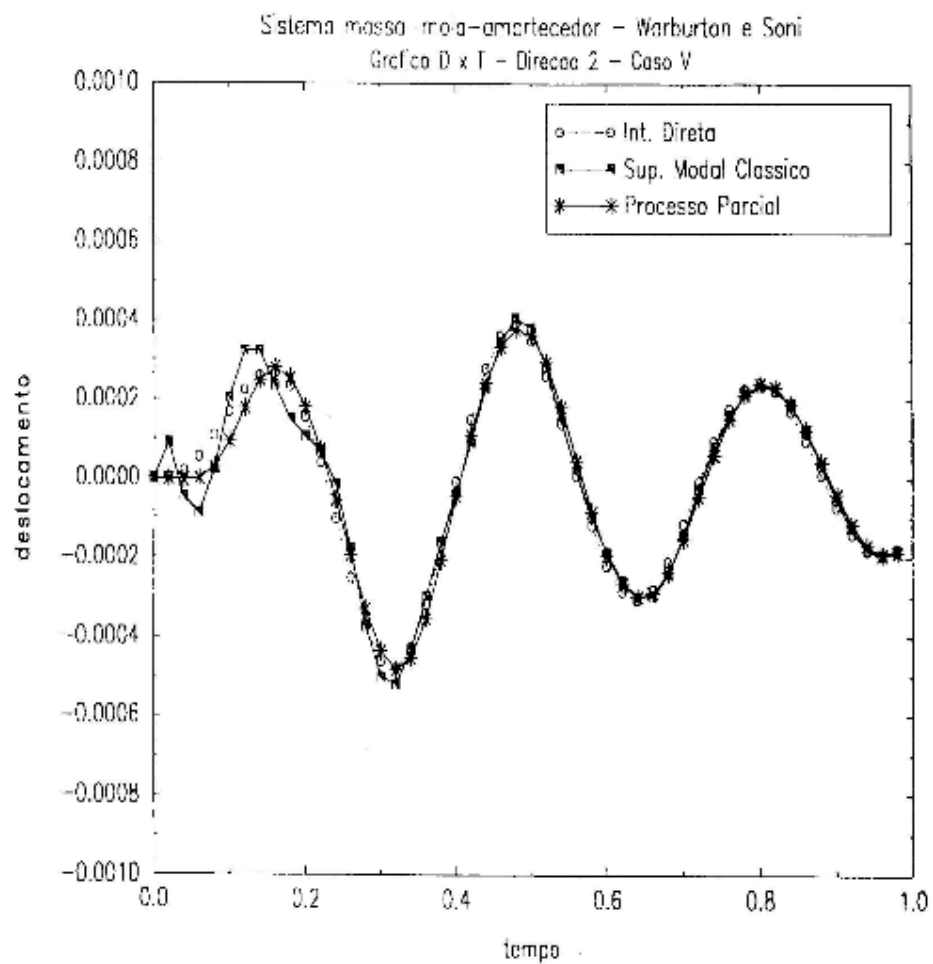


Figura 4.2.4-j Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

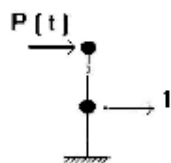
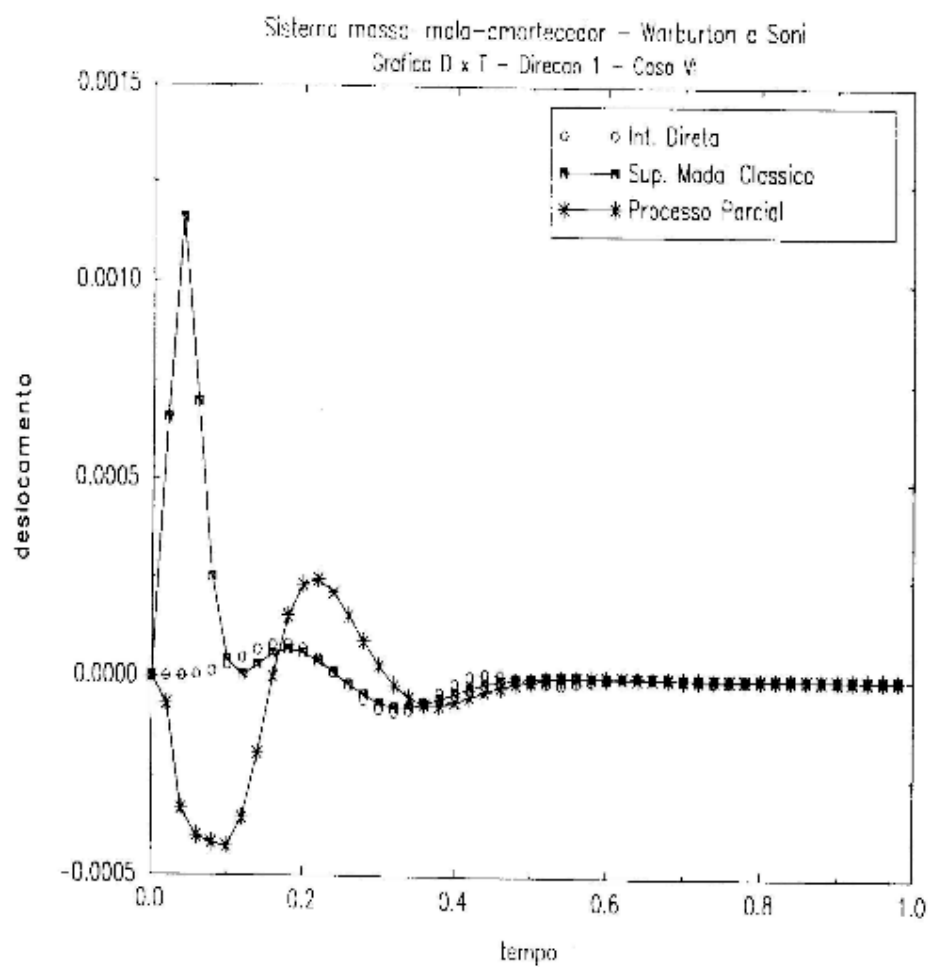


Figura 4.2.4-1 Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

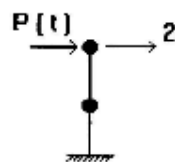
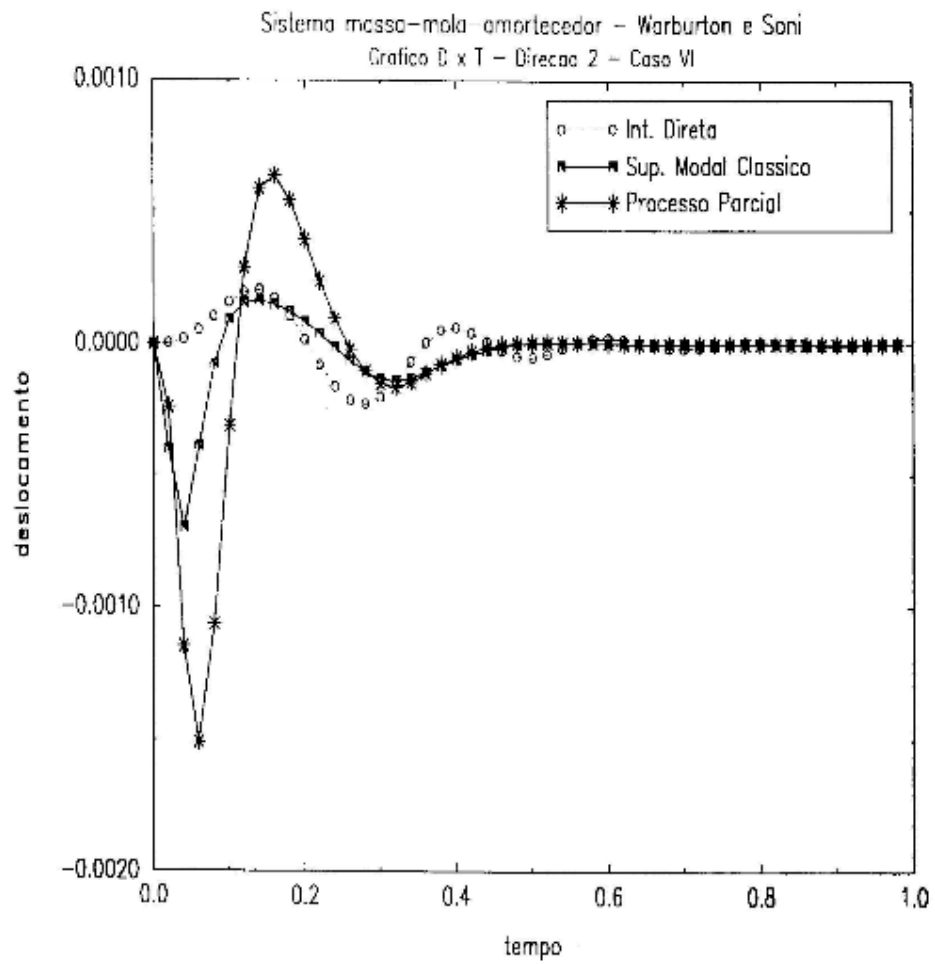


Figura 4.2.4-m Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

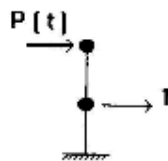
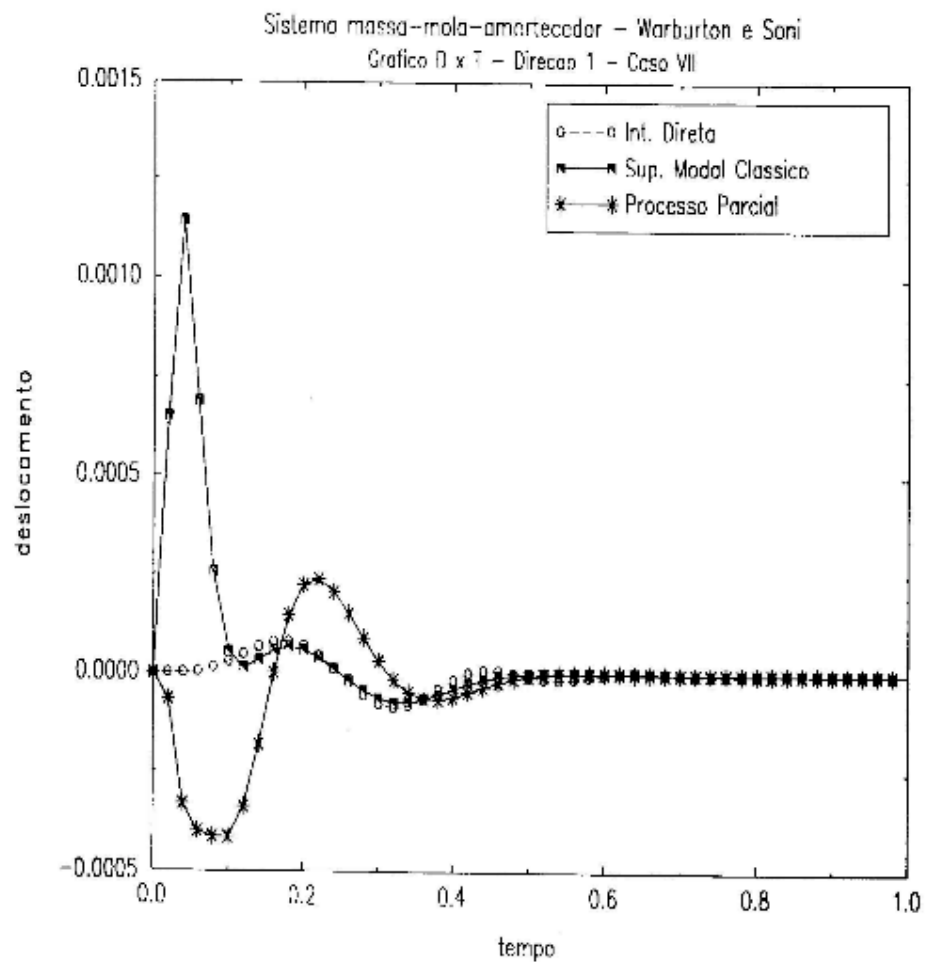


Figura 4.2.4-n Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

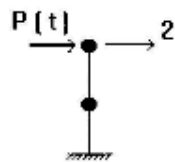
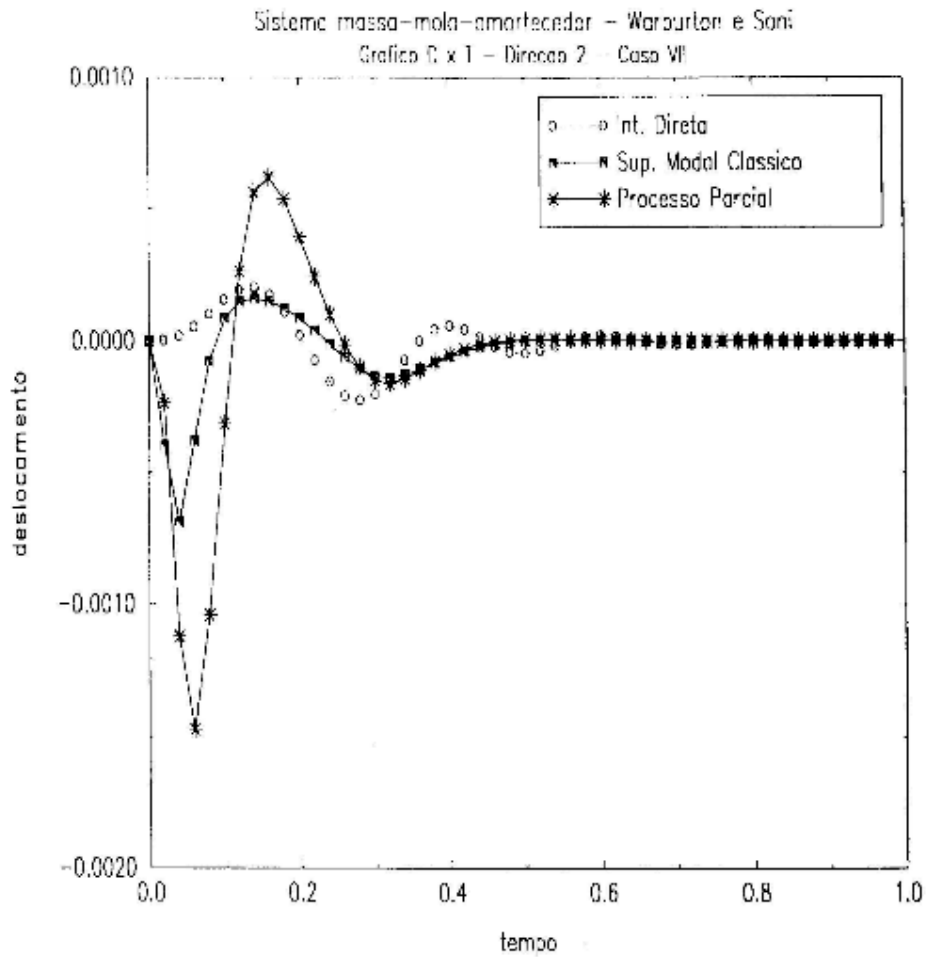


Figura 4.2.4-o Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

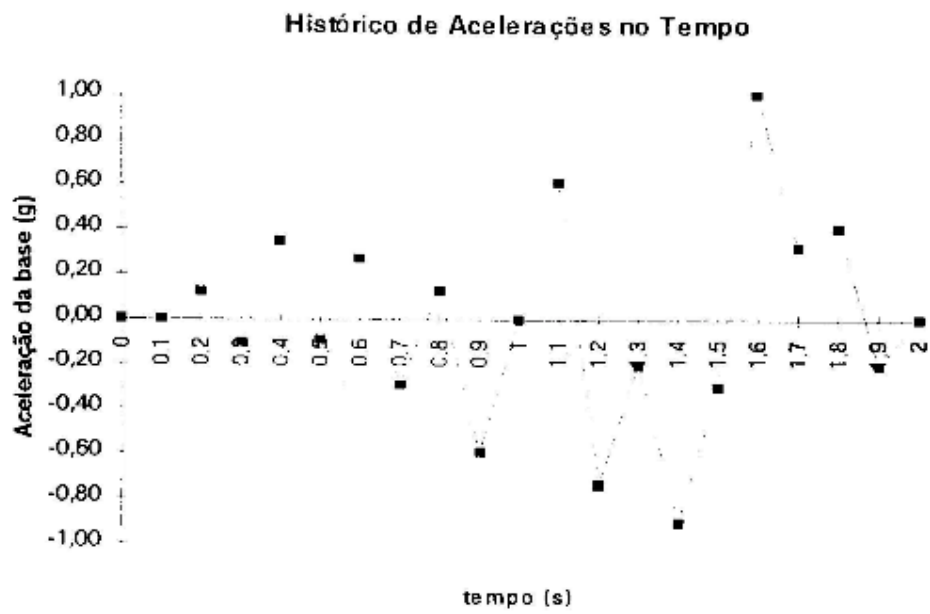


Figura 4.3.1 Terremoto El-Centro (Exemplo 3).

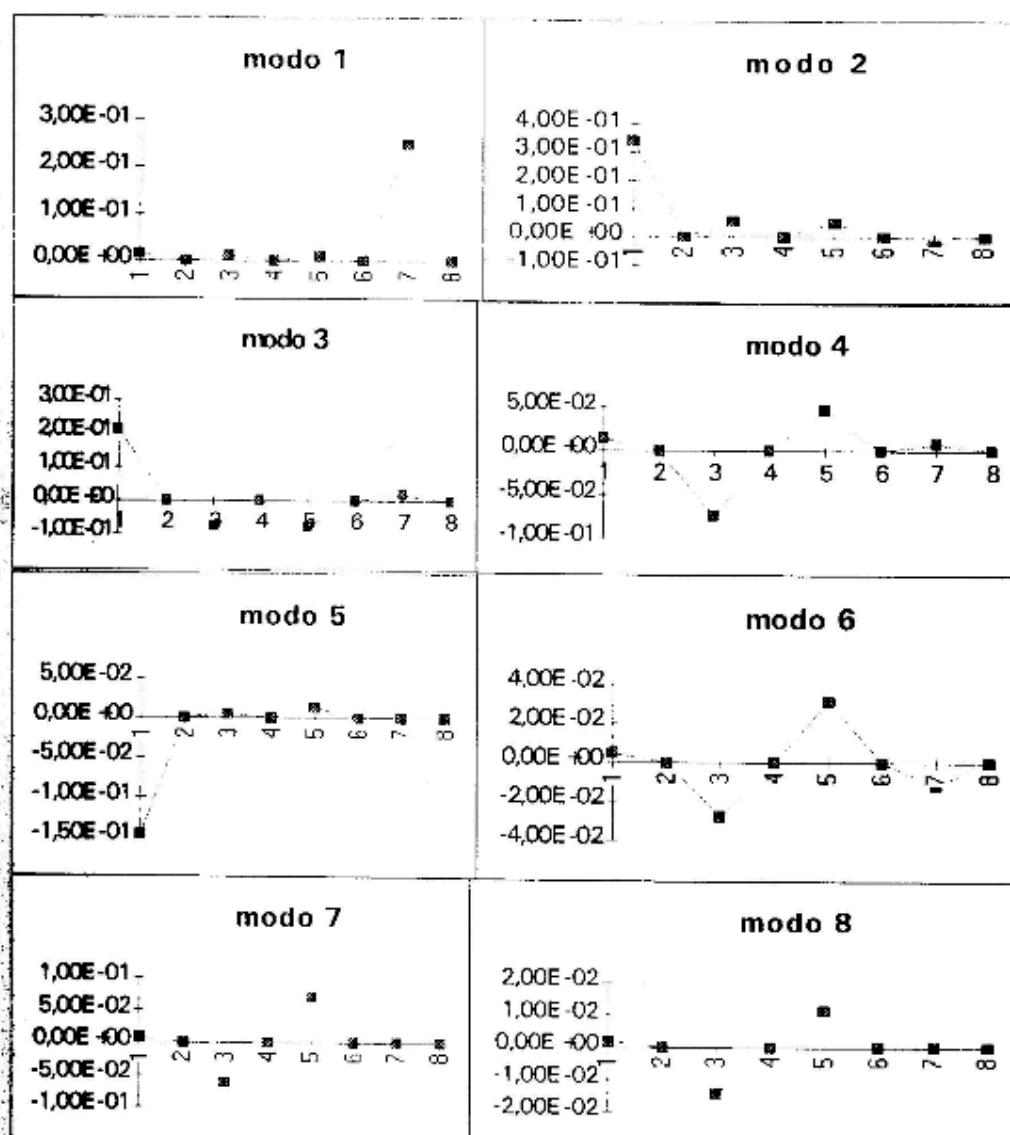


Figura 4.3.2 Modos de vibração (Exemplo 3).

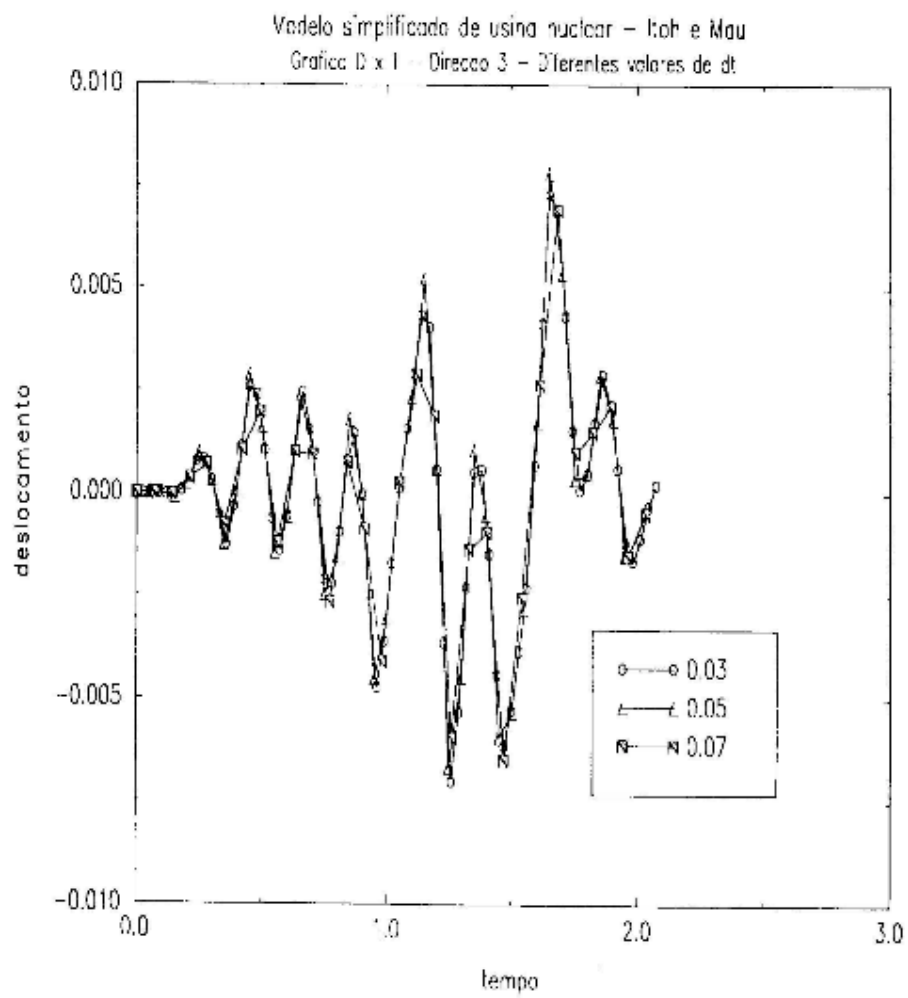


Figura 4.3.3 Comparação entre métodos.

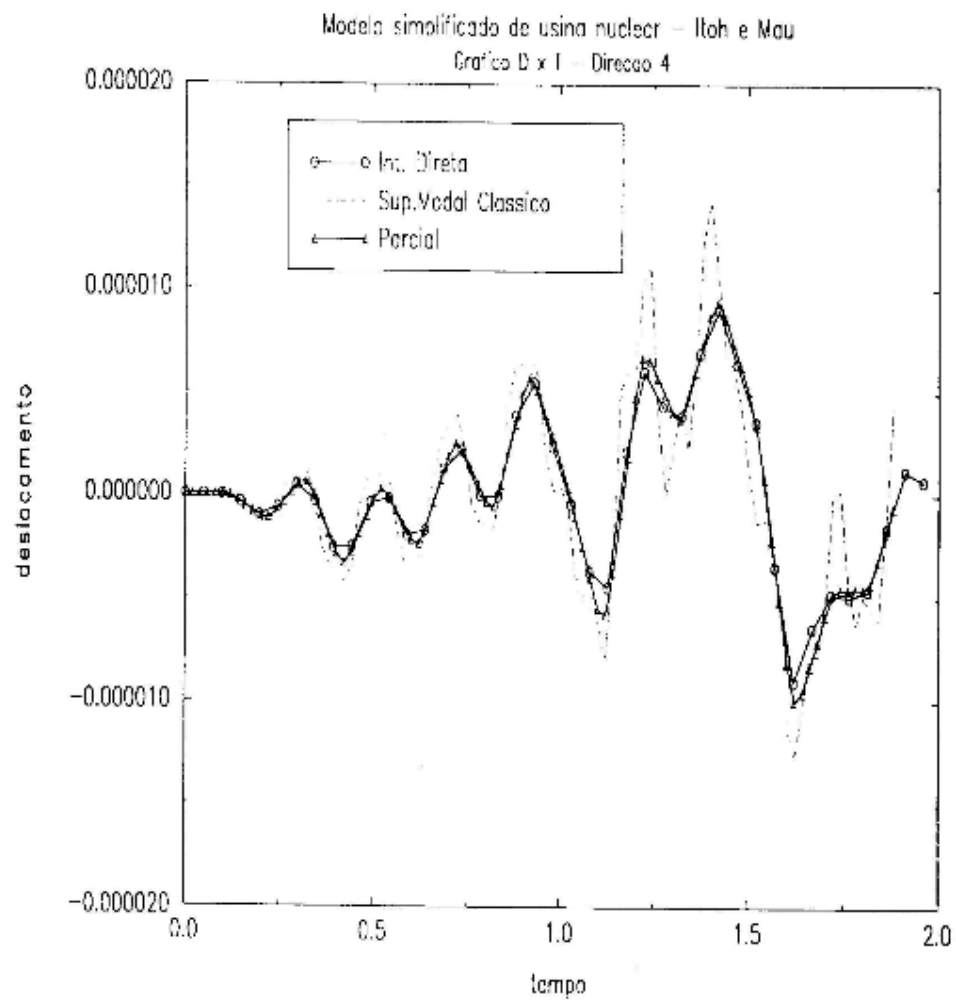


Figura 4.3.4-a Deslocamento na direção 4 (m) x tempo (s).

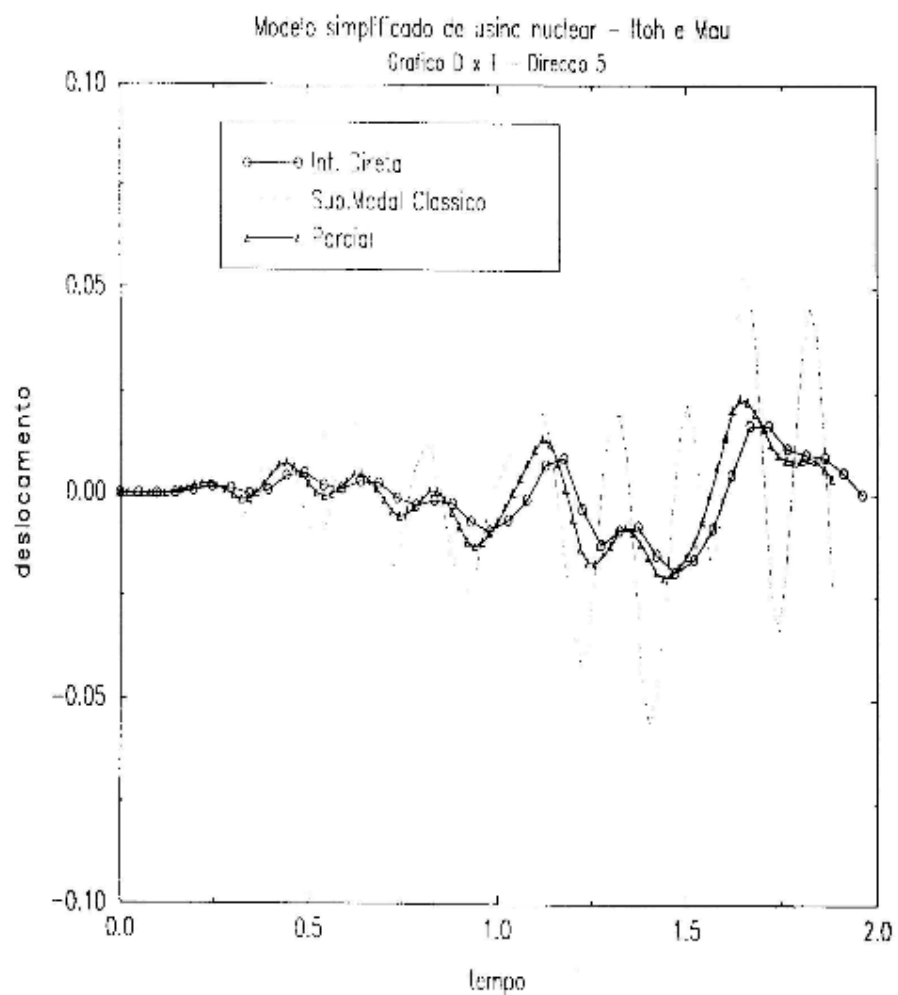


Figura 4.3.4-b Deslocamento na direção 5 (m) x tempo (s).

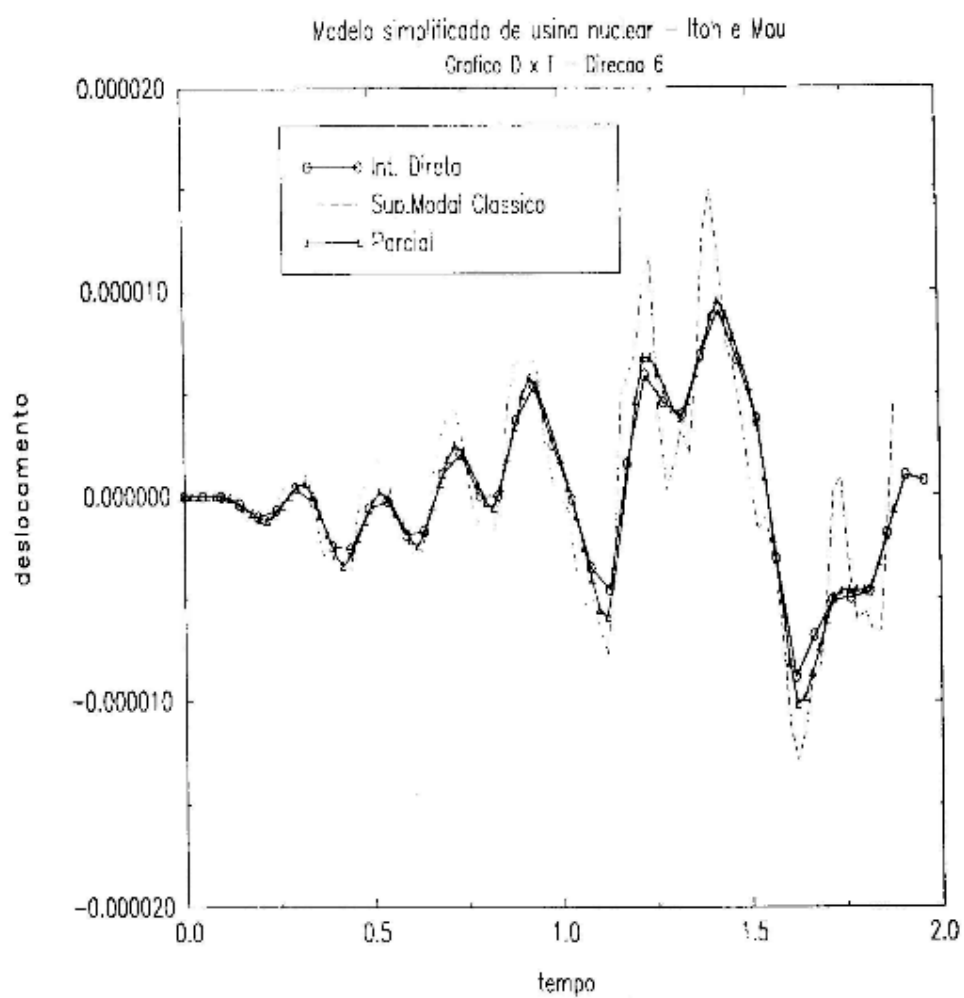


Figura 4.3.4-c Deslocamento na direção 6 (m) x tempo (s).

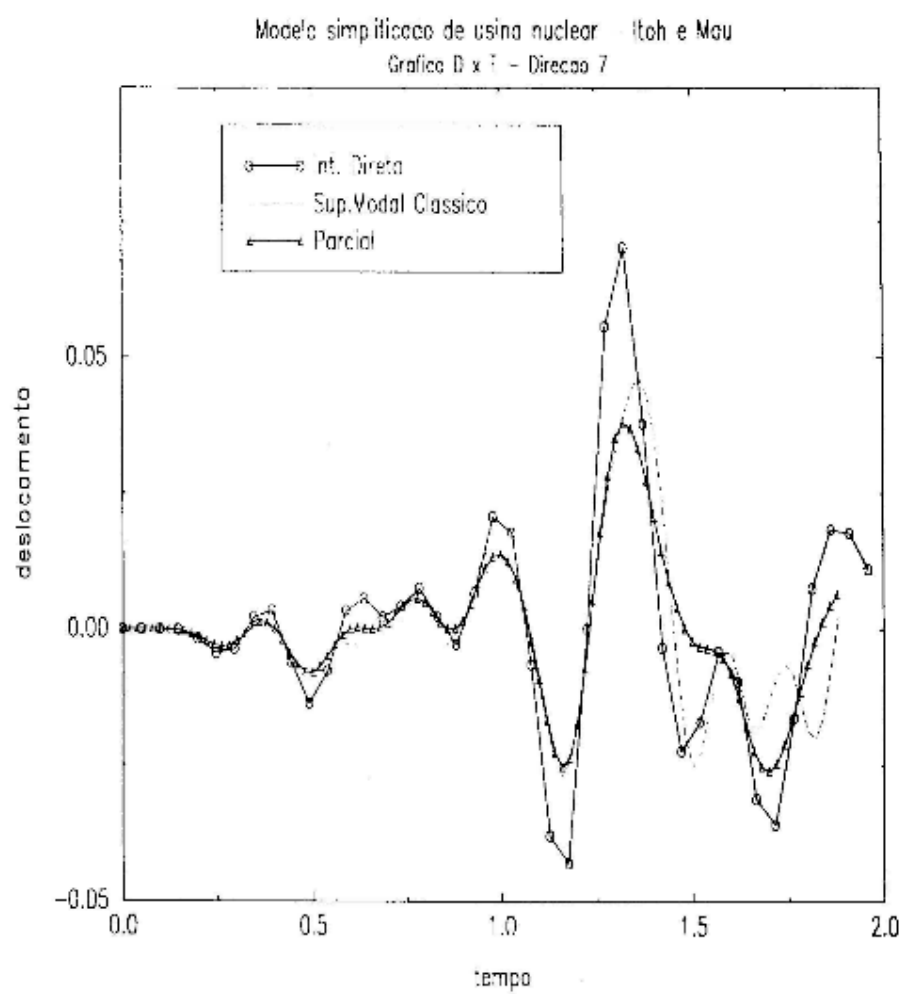


Figura 4.3.4-d Deslocamento na direção 7 (m) x tempo (s).

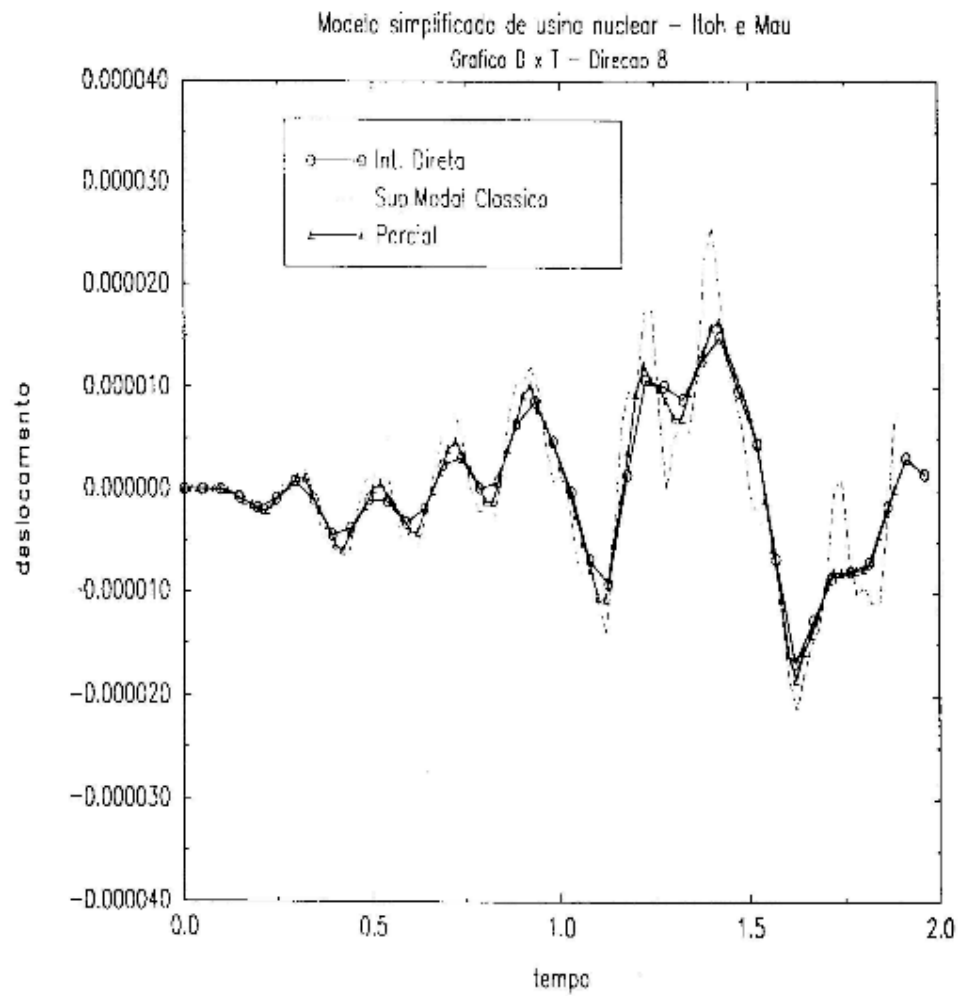


Figura 4.3.4-e Deslocamento na direção 8 (m) x tempo (s).

5. ANÁLISE NÃO-LINEAR

5.1 Introdução

Há situações na engenharia estrutural em que o modelo linear não representa adequadamente as características dinâmicas da estrutura. Consequentemente, o problema torna-se não-linear. Entre alguns exemplos desse tipo de estruturas, citam-se o comportamento pós-crítico de vigas, placas e cascas e a análise de estruturas submetidas a grandes deslocamentos.

A não-linearidade pode ser física ou geométrica. Quando é física, está associada às mudanças nas propriedades do material; quando é geométrica, está associada às mudanças na configuração dos corpos em movimento.

O projeto de estruturas para condições severas de carregamento, como aquelas expostas a grandes temperaturas e esforços sísmicos, é mais econômico se se admitem tensões nos materiais acima dos limites elásticos lineares. Além disso, materiais como plásticos, compostos e elastômeros, utilizados em estruturas especiais, principalmente de aeronaves, têm comportamento não-linear para tensões bem inferiores às tensões de trabalho.

A análise dinâmica não-linear é, em geral, processada através de métodos de integração direta. Recentemente, Landau (1983) demonstrou a aplicabilidade do método de superposição modal à análise dinâmica não-linear física e geométrica. Em seguida, o método proposto é formulado para aplicação a sistemas dinâmicos fisicamente bilineares dotados de amortecimento não-proporcional.

5.2 Equacionamento

Seja um sistema estrutural discretizado em elementos finitos, totalizando N graus de liberdade, dotado de amortecimento viscoso expresso por uma matriz c . As equações não-lineares de equilíbrio dinâmico são

$$\mathbf{m}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{v}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - \mathbf{r}({}^{t+\Delta t} \mathbf{v}), \quad (5.1)$$

onde \mathbf{m} é a matriz $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de massa; ${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}$ é o vetor de ações modais equivalentes ao carregamento dinâmico externo; ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}$, ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{v}}$ e ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{v}}$ são, nessa ordem, os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais no instante $t + \Delta t$; $\mathbf{r}({}^{t+\Delta t} \mathbf{v})$ é o vetor de ações nodais restitutivas equivalentes ao estado atual de tensão.

Admitindo que $\mathbf{r}(\mathbf{v})$ seja diferenciável em torno de \mathbf{v} ao longo do tempo, pode-se escrever para o instante $t + \Delta t$

$$\mathbf{r}({}^{t+\Delta t} \mathbf{v}) = \mathbf{r}({}^t \mathbf{v}) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}={}^t \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{O}^S, \quad (5.2)$$

Onde \mathbf{O}^S indica termos de ordens de derivação superior e

$$\Delta \mathbf{v} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{v} - {}^t \mathbf{v} \quad (5.3)$$

é o vetor incremental de deslocamentos entre os instantes t e $t + \Delta t$. Definindo-se a matriz de rigidez tangente $\mathbf{k}({}^t \mathbf{v})$ através da expressão

$$\mathbf{k}({}^t \mathbf{v}) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}={}^t \mathbf{v}}, \quad (5.4)$$

e desprezando-se os termos de derivadas de ordem superior, pode-se escrever o vetor $\mathbf{r}(\mathbf{v})$ como

$$\mathbf{r}({}^{t+\Delta t} \mathbf{v}) = \mathbf{r}({}^t \mathbf{v}) + \mathbf{k}({}^t \mathbf{v}) \cdot \Delta \mathbf{v} \quad (5.5)$$

e, consequentemente, a Eq. (5.1) assume a forma incremental aplicável a sistemas fisicamente e geometricamente não-lineares

$$\mathbf{m}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}(\mathbf{v}^t) \Delta \mathbf{v} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - \mathbf{r}(\mathbf{v}^t). \quad (5.6)$$

Observa-se que a condição de equilíbrio não é satisfeita ao final do intervalo $(t, t+\Delta t)$, porquanto a matriz de rigidez é avaliada em função dos deslocamentos no final do intervalo anterior. Desse modo, os processos de integração da Eq. (5.6) devem corrigir os erros nos deslocamentos introduzidos ao longo do tempo de resposta.

Um processo de solução das equações incrementais de movimento, inicialmente proposto por Stricklin et al. (1974) para o caso de pequenas deformações, consiste em considerar o vetor de forças restitutivas no instante $t+\Delta t$ como constituído da superposição de duas parcelas, isto é,

$$\mathbf{r}(\mathbf{v}^{t+\Delta t}) = (\mathbf{k}_L + \mathbf{k}_{NL}(\mathbf{v}^{t+\Delta t})) \mathbf{v}^{t+\Delta t}, \quad (5.7)$$

onde \mathbf{k}_L é uma matriz de rigidez linear e \mathbf{k}_{NL} é a matriz que contém a parcela não linear. Assim, na Eq. (5.1) tomando-se os termos não-lineares como pseudoforças, tem-se

$$\mathbf{m}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}_L \mathbf{v}^{t+\Delta t} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{h} \quad (5.8)$$

onde

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{h} = -\mathbf{k}_{NL}(\mathbf{v}^{t+\Delta t}) \mathbf{v}^{t+\Delta t}. \quad (5.9)$$

Sejam ${}^0 \mathbf{v}$ e ${}^0 \dot{\mathbf{v}}$ as condições iniciais de movimento do sistema. Definindo-se $\mathbf{k}_L = \mathbf{k}_L(\mathbf{v}^0) = {}^0 \mathbf{k}$ como a matriz de rigidez na configuração inicial do sistema, a solução do problema de autovalor

$$\mathbf{k}_L \boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_i \quad (5.10)$$

onde $i = 1, N$, conduz às frequências naturais de vibração, ω_i , e aos modos normais de vibração, ϕ_i , ambos referentes à configuração inicial do sistema estrutural. Sejam os modos de vibração normalizados em relação à matriz de massa de acordo com

$$\phi_i^T \mathbf{m} \phi_i = \delta_{ij}, \quad (5.11)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. A matriz Φ cujas colunas são os modos normais de vibração ϕ_i é a matriz modal referente à configuração inicial do sistema e tem as propriedades de ortogonalidade em relação a \mathbf{m} e a ${}^0\mathbf{k}$, isto é,

$$\Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I}, \quad (5.12)$$

$$\Phi^T {}^0\mathbf{k} \Phi = \Lambda, \quad (5.13)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N , cujos elementos têm a dimensão de massa e Λ é a matriz diagonal pelos quadrados das frequências naturais de vibração do sistema em sua configuração inicial.

Definindo-se a transformação de coordenadas físicas em coordenadas generalizadas através da matriz modal referida à configuração inicial do sistema, isto é, tomando-se, para qualquer instante t , a relação

$$\mathbf{v} = \Phi \mathbf{Y}, \quad (5.14)$$

é pré-multiplicando-se a Eq. (5.8) por Φ^T , obtém-se

$$\mathbf{I}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{Y}} + \Lambda^{t+\Delta t} \mathbf{Y} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{H}, \quad (5.15)$$

onde

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{P} = \Phi^{Tt+\Delta t} \mathbf{p}, \quad (5.16)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{H} = \Phi^{Tt+\Delta t} \mathbf{h} = -\Phi^T \mathbf{k}_{NL}({}^{t+\Delta t}\mathbf{v}) \Phi^{t+\Delta t} \mathbf{Y}. \quad (5.17)$$

Na Eq. (5.15), \mathbf{C} é uma matriz não-diagonal quando o amortecimento do sistema estrutural é do tipo não-proporcional. Por outro lado, o vetor de pseudoforças ${}^{t+\Delta t}\mathbf{H}$ deve ser calculado em função do estado atual de deformação do sistema estrutural. Definindo-se a matriz \mathbf{C}_d como a matriz diagonal formada com os elementos da diagonal da matriz \mathbf{C} e \mathbf{C}_f a matriz formada com os demais elementos de \mathbf{C} , tendo elementos nulos na diagonal, propõe-se, então, o processo iterativo para integração das equações de movimento

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{Y}}^{(k)} + \mathbf{C}_d^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{Y}}^{(k)} + \mathbf{A}^{t+\Delta t} \mathbf{Y}^{(k)} = \\ = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde $k = 1, J$ e o vetor ${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(k-1)}$ é o vetor de pseudoforças correspondente à parcela não-proporcional do amortecimento estrutural assim definido

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(k-1)} = \mathbf{C}_f^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{Y}}^{(k-1)}. \quad (5.19)$$

Dentro de cada intervalo de tempo, as condições iniciais para as pseudoforças decorrentes do amortecimento não-proporcional são

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{Y}}^{(l)} = {}^t\dot{\mathbf{Y}}^{(J)}, \quad (5.20)$$

onde J corresponde à ordem da iteração de convergência no intervalo anterior. Para o vetor de pseudoforças decorrentes da não-linearidade física do material, as condições iniciais podem ser calculadas expandindo-se o vetor \mathbf{H} nas vizinhança de t , isto é,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{(l)} = {}^t\mathbf{H}^{(J)} + \frac{\partial {}^t\mathbf{H}^{(J)}}{\partial t} \Delta t. \quad (5.21)$$

Com o emprego de uma diferença de primeira ordem para aproximar a derivada indicada na equação anterior, obtém-se

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{(l)} = 2 {}^t\mathbf{H}^{(j)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{H}^{(j)}, \quad (5.22)$$

o que corresponde a uma extrapolação linear das pseudoforças entre dois intervalos de tempo.

5.3 Algoritmo para Solução de um Sistema Não-Linear Usando o Método de Superposição Modal Clássico Combinado com Pseudoforças – Processo Parcial

As equações de movimento em coordenadas generalizadas são integradas com o emprego da Integral de Duhamel, isto é,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Y}_i^{(k)} = \int_0^{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k)} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_{d_i}(t - \tau) d\tau + \mathbf{Z}_i^{(k)}, \quad (5.23)$$

onde $\mathbf{Z}_i^{(k)}$ é a parcela da resposta na coordenada generalizada i que decorre das condições iniciais e ω_{d_i} é a i -ésima frequência de vibração amortecida; nessa equação, o termo de carga é

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_i + {}^{t+\Delta t}\mathbf{H}_i^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_i^{(k-1)}. \quad (5.24)$$

As velocidades generalizadas se calculam analogamente. Admitindo-se que o termo de carga seja linearizado no intervalo de tempo (t, t+Δt), pode-se escrever

$$F_i^{(k)}(\tau) = a^{(k)} + b^{(k)}\tau \quad (5.25)$$

onde

$$a^{(k)} = F_i^{(k)}(t) , \quad (5.26)$$

$$b^{(k)} = \frac{F_i^{(k)}(t + \Delta t) - F_i^{(k)}(t)}{\Delta t} . \quad (5.27)$$

Nesse caso, a Eq. (5.23) é substituída equivalentemente por

$${}^{t+\Delta t}Y_i^{(k)} = I_0^{(k)} + I_1^{(k)}\Delta t + I_2^{(k)}J_{i1} + I_3^{(k)}J_{i2} \quad (5.28)$$

e as velocidades generalizadas são calculadas pela expressão

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\dot{Y}_i^{(k)} = & I_1^{(k)} + (\omega_{d_i} I_3^{(k)} - \xi_i \omega_i I_2^{(k)})J_{i1} - \\ & (\omega_{d_i} I_2^{(k)} - \xi_i \omega_i I_3^{(k)})J_{i2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

sendo

$$I_0^{(k)} = \frac{a^{(k)}}{\omega_1^2} - \frac{2\xi_i b^{(k)}}{\omega_1^3} , \quad (5.30)$$

$$I_1^{(k)} = \frac{b^{(k)}}{\omega_1^2} , \quad (5.31)$$

$$\mathbf{I}_2^{(k)} = \mathbf{Y}_i^{(j)}(\mathbf{t}) - \mathbf{I}_0^{(k)}, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{I}_3^{(k)} = \frac{1}{\omega_{d_i}} \left[\dot{\mathbf{Y}}_i^{(j)}(\mathbf{t}) + \xi_i \omega_i \mathbf{I}_2^{(k)} - \mathbf{I}_1^{(k)} \right], \quad (5.33)$$

$$\mathbf{J}_{i1} = \exp(-\xi_i \omega_i \Delta t) \cos(\omega_{d_i} \Delta t), \quad (5.34)$$

$$\mathbf{J}_{i2} = \exp(-\xi_i \omega_i \Delta t) \sin(\omega_{d_i} \Delta t). \quad (5.35)$$

O algoritmo de integração das equações de movimento em coordenadas generalizadas está formulado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Algoritmo do método proposto

i)-Adotando um intervalo de tempo constante, calculam-se J_{i1} e J_{i2} .
ii)-Para cada intervalo de tempo:
1)-atualizam-se as condições iniciais, fazendo
${}^{t+\Delta t}Y_i^{(0)} = {}^tY_i^{(j)}$ ${}^{t+\Delta t}\dot{Y}_i^{(0)} = {}^t\dot{Y}_i^{(j)}$
2)-calculam-se as constantes que linearizam a carga no intervalo
$a_i = P_i(t)$ $b_i = \frac{P_i(t + \Delta t) - P_i(t)}{\Delta t}$
3)-atualiza-se a matriz de rigidez, $k^l(v)$, e calcula-se $k_{NL} = k_0 - k^l(v)$.
4)-para cada iteração k:
4.1)-calcula-se a pseudoforça devida ao efeito da não-linearidade pela Eq.(5.17) ou Eq.(5.22), conforme o caso;
4.2)-calcula-se a pseudoforça devida à não-proporcionalidade do amortecimento pela Eq.(5.19);
4.3)-atualiza-se a carga para incorporar as pseudoforças através da Eq.(5.24); extrapola-se linearmente o termo de carga através da Eq.(5.25);
4.4)-calculam-se deslocamentos e velocidades através das Eqs.(5.28) e (5.29), respectivamente.
4.5)-verifica-se a convergência.

6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 Exemplo 1: Sistema de Dois Graus de Liberdade Representando Modelo Simplificado de Usina Nuclear

Trata-se do mesmo exemplo analisado por Claret (1991) representando o modelo simplificado de dois graus de liberdade de uma usina nuclear, conforme mostram as Figuras 6.1.1 e 6.1.2, sendo a massa da fundação $m_f = 1.0e+08$ kg e a massa da edificação $m_s = 3.0e+07$ kg. A constante de amortecimento viscoso do solo é calculada pela Tabela dada por Richart (1970) e Novak (1973) em função das propriedades do solo. Assim sendo, $c_f = 3.79e+09$ Ns/m. A carga de impacto atua na direção 2 e corresponde ao choque da estrutura com uma aeronave segundo Wolf (1987), Figura 6.1.3.

As matrizes de massa, rigidez e amortecimento são, respectivamente:

$$m = \begin{bmatrix} 1.0e+08 & 0 \\ 0 & 3.0e+07 \end{bmatrix},$$

$$k = \begin{bmatrix} 2.15e+11 & -0.6e+11 \\ & 0.6e+11 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} .3790e+10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de amortecimento generalizada é, portanto:

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} .1766e+02 & .1891e+02 \\ & .2024e+02 \end{bmatrix}.$$

O sistema tem índice de acoplamento 1.0, que ocorre nas direções 1 x 2. As frequências naturais de vibração são dadas na Tabela 6.1.1.

Tabela 6.1.1 Frequência naturais de vibração

Modo	Frequência (rad/s)
1	31.26
2	56.33

Os modos de vibração nas direções 1 e 2 são mostrados na Figura 6.1.4.
Os índices de convergência e os valores de ξ são mostrados na Tabela 6.1.2.

Tabela 6.1.2 - Índices de convergência e os valores de ξ

Modo	ξ	IC
1	0.2824	2.3
2	0.1797	3.9

O número de pontos utilizados na resposta é 100, o número de iterações é 10 e o intervalo de tempo, 0.02s.

Caso 1 - Fundação e estruturas lineares

A estrutura tem rigidez $k_s = 0.6e+11$ N/m, conforme mostra a Figura 6.1.1.1 e o solo tem rigidez $k_f = 1.55e+11$ N/m, como mostra a Figura 6.1.1.2.

Os deslocamentos máximos obtidos pelo método da integração direta, algoritmo de Wilson- θ (resultados referidos como Direct) e pelo método proposto (resultados referidos como Parcial) estão na Tabela 6.1.1.1.

Tabela 6.1.1.1 Deslocamentos máximos

Direção	Direct	Parcial
1	.2214e-2	.2362e-2
2	.8210e-2	.8373e-2

Os deslocamentos nas direções 1 e 2 são mostrados nas Figuras 6.1.1.3, sendo que os resultados obtidos pelo método parcial para a análise não-linear são comparados com os dados do método de integração direta. Nesse caso, há uma plena concordância de resultados.

Caso 2 - Fundação Linear e Estrutura com Material Elastoplástico Perfeito

A estrutura tem rigidez $k_s = 0.6e+11$ N/m, conforme mostra a Figura 6.1.2.1 e o solo tem rigidez $k_f = 1.55e+11$ N/m, como mostra a Figura 6.1.2.2.

Os deslocamentos nas direções 1 e 2, obtidos pelo método proposto, são mostrados nas Figuras 6.1.2.3, sendo que os deslocamentos máximos constam da Tabela 6.1.2.1.

Tabela 6.1.2.1 Deslocamentos máximos

Direção	Parcial
1	.2903e-2
2	.7074e-2

6.2 Exemplo 2: Sistema Massa-Mola-Amortecedor com Dois Graus de Liberdade

Trata-se do mesmo exemplo analisado no subitem 4.2, considerando a mola 2 bilinear com as rigidezes de acordo com a Figura 6.2.1. A carga da Figura 6.2.2 é aplicada à massa 2 do sistema.

Nesse caso, foram feitas análises pelo método proposto considerando o amortecimento aproximadamente proporcional (resposta APD), através do simples abandono dos elementos de fora da diagonal na matriz de amortecimento generalizada, e pelo método proposto considerando o amortecimento não-proporcional (resposta NPD). As Figuras 6.2.1.1.a e 6.2.1.1.b mostram os históricos de resposta obtidos. Observa-se uma amplificação de cerca de 40% da resposta APD em relação à resposta NPD.

6.3 Exemplo 3: Sistema Solo-Estrutura do Tipo “Shear Building” de Sete Andares

Analisa-se o comportamento dinâmico de um sistema solo-estrutura, mostrado nas Figuras 6.3.1-a e 6.3.1-b, conforme proposto por Claret (1991). Trata-se de uma

estrutura idealizada em um “shear building” de 7 andares, estando m_1 e m_2 totalmente enterrados, formando a fundação. A altura de cada andar é $h=3$ m; a massa de cada amortecimento é $m=360$ kg e a massa da fundação é $m=2000$ kg. Considera-se o amortecimento de Rayleigh com $\xi_1=\xi_7=5\%$, sendo que amortecedores de constante $c_0 = 8.0e+05$ Ns/m são concentrados nas direções 1 e 2.

A carga aplicada na massa 7 é $p(t)=8.0 \times 10^5 \sin 60t$.

A matriz de rigidez, tangente na origem, é:

$$k = \begin{bmatrix} .1154e+09 & -.8540e+08 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 \\ -.8540e+08 & .2008e+09 & -.8540e+08 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 \\ .0000e+00 & -.8540e+08 & .1708e+09 & -.8541e+08 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 \\ .0000e+00 & .0000e+00 & -.8541e+08 & .1708e+09 & -.8541e+08 & .0000e+00 & .0000e+00 \\ .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & -.8541e+08 & .1708e+09 & -.08541e+08 & .0000e+00 \\ .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & -.8541e+08 & .1708e+09 & -.8541e+08 \\ .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & .0000e+00 & -.8541e+08 & .8540e+08 \end{bmatrix}$$

A matriz de amortecimento generalizada é:

$$C = \begin{bmatrix} .1706e+03 & -.1831e+03 & .1087e+02 & .5897e+02 & .3198e+02 & -.1770e+02 & -.8066e+01 \\ -.1831e+03 & .2364e+03 & .6181e+02 & -.3414e+02 & -.2969e+02 & .1426e+02 & .6586e+01 \\ .1087e+02 & .6181e+02 & .3305e+03 & .1415e+03 & .5077e+02 & -.2559e+02 & -.1129e+02 \\ .5897e+02 & -.3414e+02 & .1415e+03 & .1086e+03 & .3311e+02 & -.1722e+02 & -.7686e+01 \\ .3198e+02 & -.2469e+02 & .5077e+02 & .3311e+02 & .6295e+02 & -.7308e+01 & -.3273e+01 \\ -.1770e+02 & .1426e+02 & -.2559e+02 & -.1722e+02 & -.7308e+01 & .7810e+02 & .1725e+01 \\ -.8066e+01 & .6586e+01 & -.1129e+02 & -.7686e+01 & -.3273e+01 & .1725e+01 & .9432e+02 \end{bmatrix}$$

A Tabela 6.3.1 mostra as frequências naturais de vibração, os índices de convergência e os coeficientes de amortecimentos.

Tabela 6.3.1 Freqüências naturais de vibração, índices de convergência e coeficientes de amortecimento modais

Modo	Freqüência natural (rad/s)	ξ	IC
1	90.94	.9382	.9030
2	173.3	.6818	1.139
3	313.3	.5269	1.597
4	431.4	.1259	1.501
5	646.7	.0486	6.315
6	822.8	.0474	16.46
7	935.4	.0504	43.82

Nesse sistema, a não-linearidade é causada pelo solo que é admitido com comportamento elastoplástico perfeito segundo a Figura 6.3.2. Como no exemplo anterior, as respostas NPD, lineares e não-linear, e a resposta APD não linear são calculadas e comparadas nas Figuras 6.3.3.a e 6.3.3.b.

Observa-se que a resposta não-linear com amortecimento aproximadamente proporcional (resposta APD) é mais amortecida que a resposta não-linear com amortecimento não-proporcional rigorosamente considerado (resposta NPD). Nesse caso, a consideração dos termos de fora da diagonal na matriz de amortecimento generalizada introduz um efeito de amplificação de resposta.

6.4 Exemplo 4: Sistema Solo-Estrutura do Tipo “Shear Building” de Dez Andares

Trata-se de um sistema analisado por Kawamoto (1983). Um “shear building” de 10 andares, de massas $m=1 \text{ kips.s}^2/\text{in}$, é submetido a uma excitação sísmica de base dada por

$$\ddot{v}_g = 10 \sin \pi t$$

Todos os andares são de material elastoplástico perfeito em que a tensão de escoamento é 100 ksi, com exceção do quarto andar em que ela é 1 ksi. Isto introduz comportamento não-linear localizado e a participação dos modos mais altos na resposta. O amortecimento de Rayleigh é adotado na análise com $\xi=5\%$ no primeiro e no quarto modos. A Figura 6.4.1.a mostra a resposta estática na direção 1. As Figuras 6.4.1.b e 6.4.1.c mostram os deslocamentos calculados pelo método proposto nas direções 1 e 10, respectivamente, idênticos aos obtidos por Kawamoto (1983) através da análise híbrida domínio do tempo-domínio da frequência.

6.5 Exemplo 5: Sistema Solo-Estrutura do Tipo “Shear Building” de Vinte Andares

Analisa-se a resposta dinâmica de um edifício de 20 andares descrito por Chang et al. (1989), Figura 6.5.1. A base do edifício é móvel horizontalmente e o amortecimento decorrente do solo é de 95 k-sec/in na direção 1. As colunas têm comportamento elastoplástico de acordo com a Figura 6.5.2. A Tabela 6.5.1 mostra as propriedades de massa, rigidez e limites de deformação elástica dos andares. A carga utilizada nesse exemplo é ilustrada na Figura 6.5.3 e aplicada ao topo do edifício.

O amortecimento da estrutura é considerado proporcional com coeficientes de amortecimento viscoso igual a 5% nos modos 5 e 15. As frequências naturais de vibração, considerando a base móvel, coincidem com os valores fornecidos por Chang et al. (1989). O índice de acoplamento, conforme definido em Venâncio-Filho e Claret (1991), da matriz de amortecimento resultante é de 19.96% e ocorre nas direções 8 e 9. A convergência é atingida com um número máximo de 4 iterações.

A Tabela 6.5.2 mostra as frequências naturais de vibração do edifício, enquanto que a Tabela 6.5.3 mostra os índices de convergência.

As Figuras 6.5.3, 6.5.4, 6.5.5, 6.5.6 e 6.5.7 mostram os deslocamentos obtidos nas direções 1, 5, 10, 15 e 20, respectivamente.

Tabela 6.5.1 – Propriedades do edifício de 20 andares

Andar	Massa (k-sec ² /in)	Rigidez (k/in)	Deform. (in)
20 – Topo	1.6	120	0.65
19	1.7	140	0.64
18	1.8	160	0.63
17	1.9	180	0.62
16	2.0	200	0.61
15	2.1	220	0.60
14	2.2	240	0.59
13	2.3	260	0.58
12	2.4	280	0.57
11	2.5	300	0.56
10	2.6	320	0.55
9	2.7	340	0.54
8	2.8	360	0.53
7	2.9	380	0.52
6	3.0	400	0.51
5	3.1	420	0.50
4	3.2	440	0.49
3	3.3	460	0.48
2	3.4	480	0.47
Base -1	35.0	5000	Elástica

Tabela 6.5.2 Frequências naturais de vibração do edifício de 20 andares

Andar	Frequências (rad/s)
Base - 1	1.04
2	2.59
3	4.21
4	5.82
5	7.38
6	8.90
7	10.32
8	11.56
9	12.40
10	13.35
11	14.49
12	15.59
13	16.60
14	17.52
15	18.39
16	19.24
17	20.07
18	20.89
19	21.74
20 - Topo	22.65

Tabela 6.5.3 Índices de convergência do edifício de 20 andares

Andar	IC
Base - 1	189.9
2	68.06
3	36.01
4	20.76
5	11.83
6	6.22
7	2.82
8	1.28
9	1.16
10	1.68
11	3.58
12	6.54
13	10.41
14	15.13
15	20.72
16	27.49
17	36.04
18	47.32
19	63.09
20 - Topo	87.73

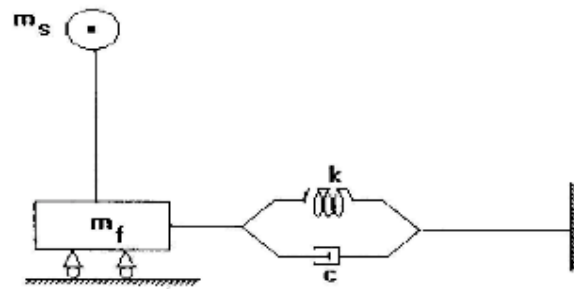


Figura 6.1.1 Sistema de 2 graus de liberdade (Exemplo 1).

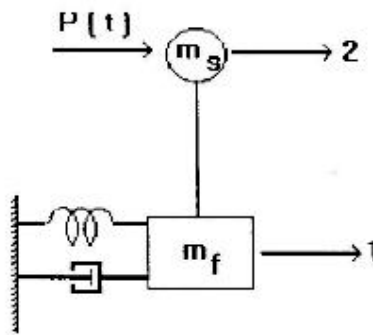


Figura 6.1.2 Modelo simplificado da estrutura (Exemplo 1).

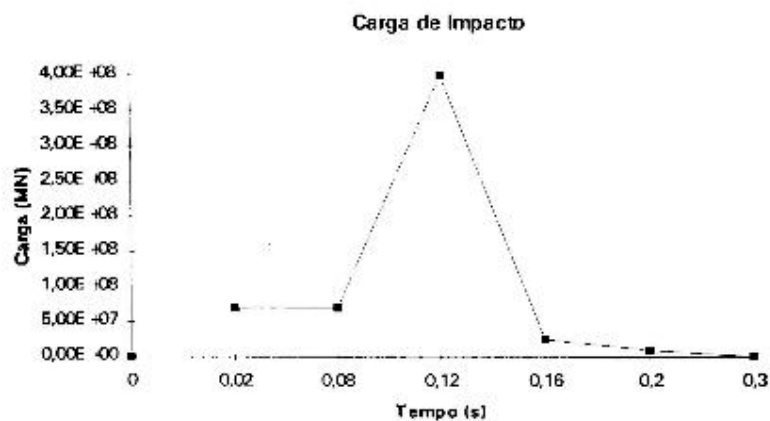


Figura 6.1.3 Carga de impacto atuando na estrutura segundo Wolf (1987)

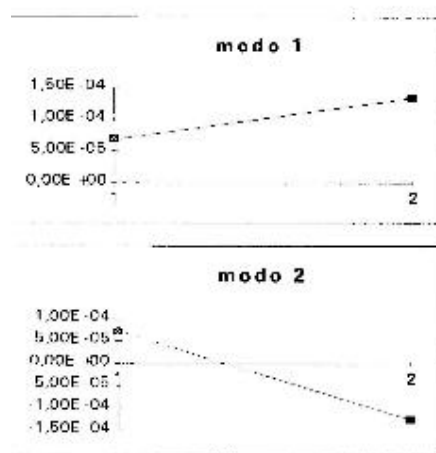


Figura 6.1.4 Modos de vibração (Exemplo 1).

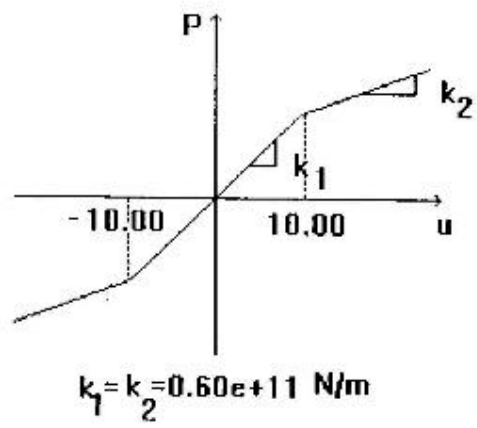


Figura 6.1.1.1 Rigidez na estrutura.

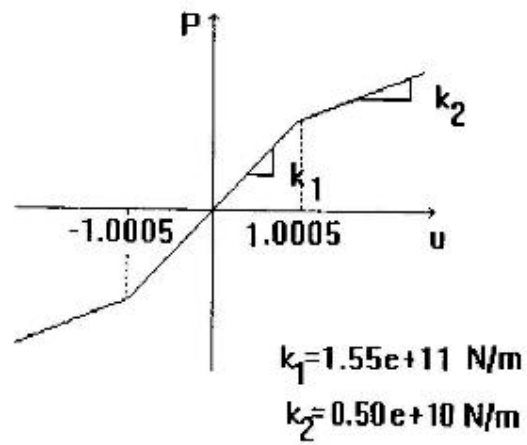


Figura 6.1.1.2 Rigidez no solo.

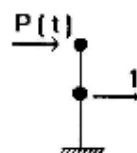
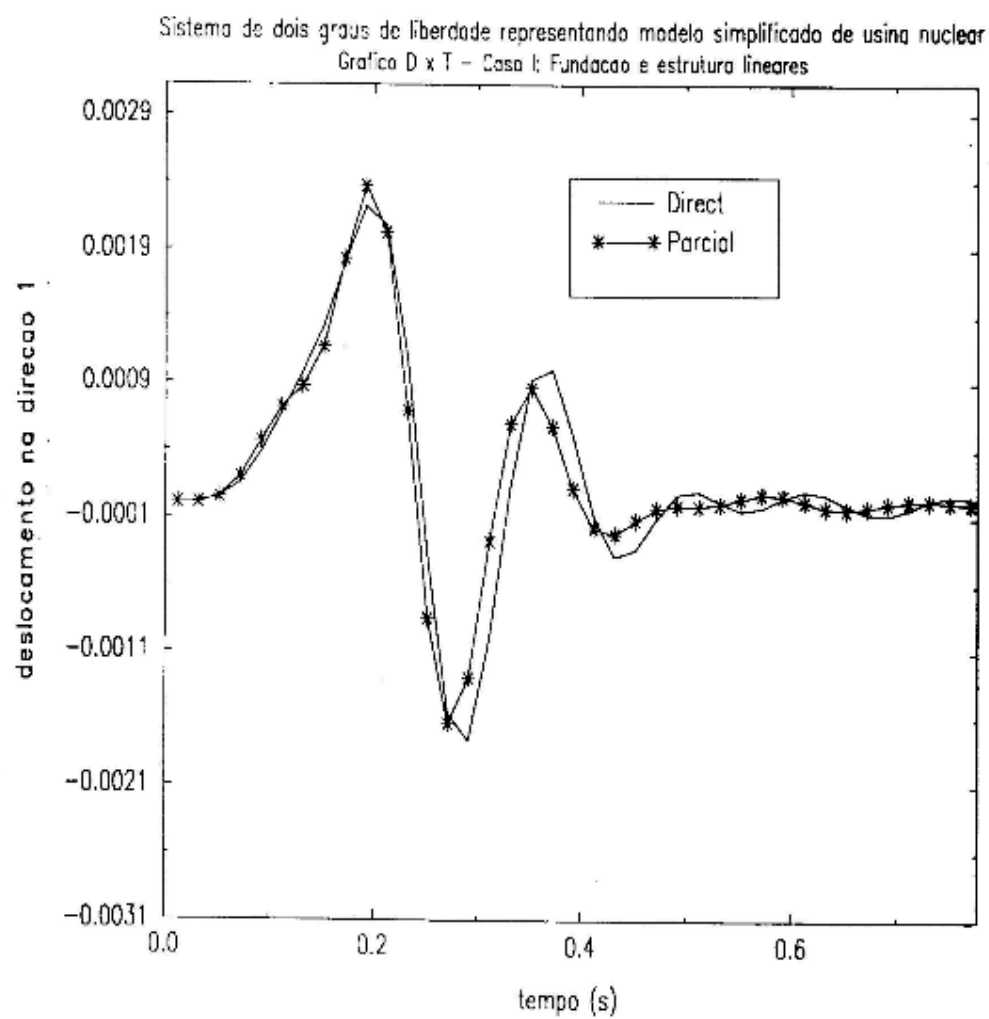


Figura 6.1.1.3.a Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

Sistema de dois graus de liberdade representando modelo simplificado de usina nuclear
 Gráfico D x T – Caso 1: Fundação e estrutura lineares

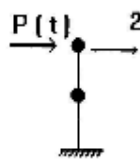
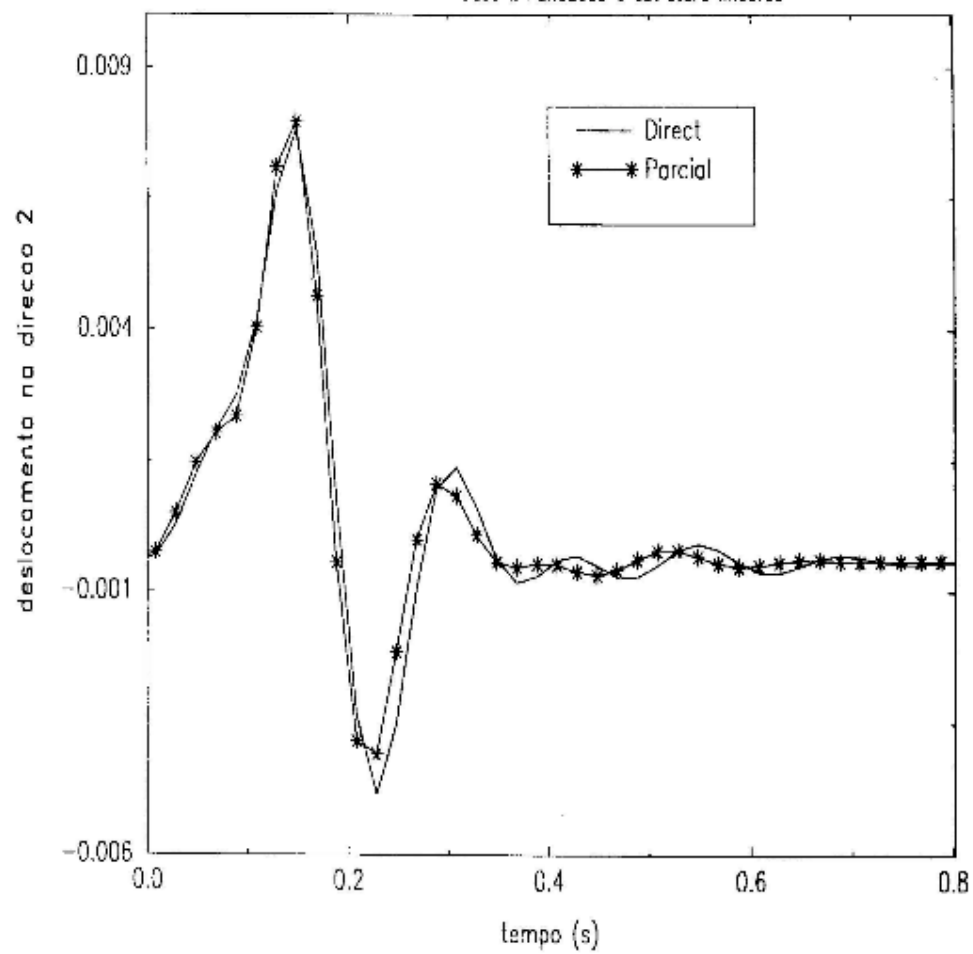


Figura 6.1.1.3-b Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

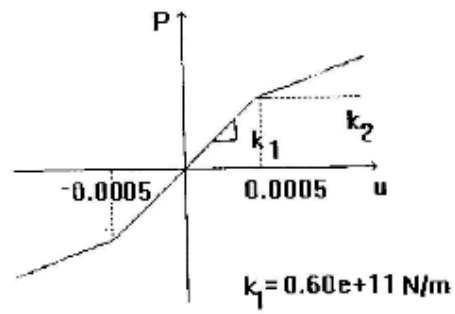


Figura 6.1.2.1 Rigidez na estrutura.

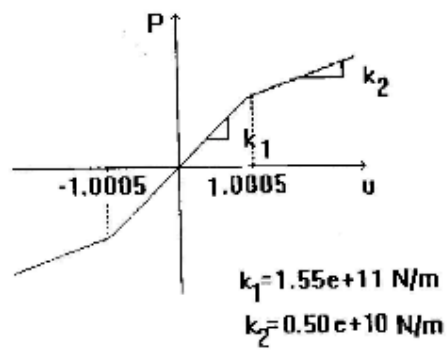


Figura 6.1.2.2 Rigidez no solo.

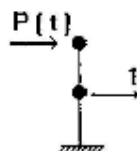
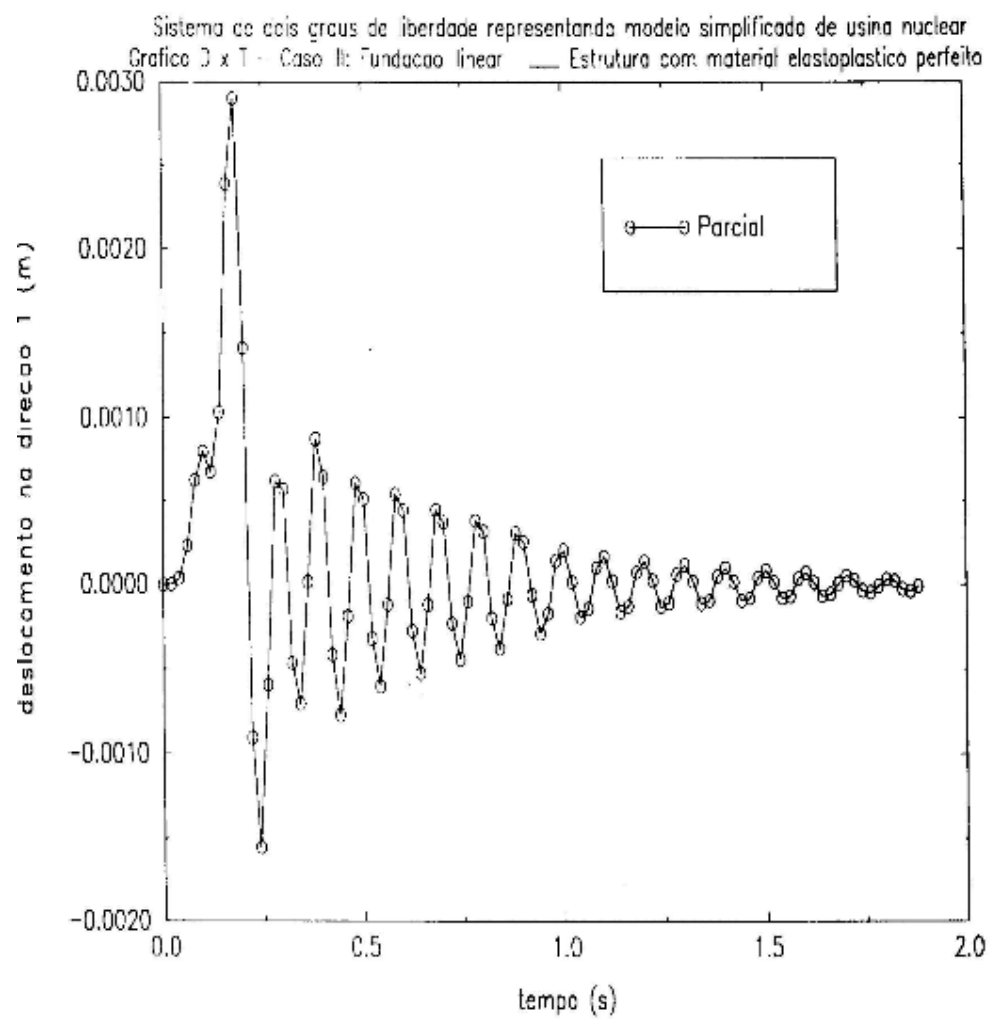


Figura 6.1.2.3-a Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

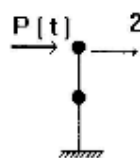
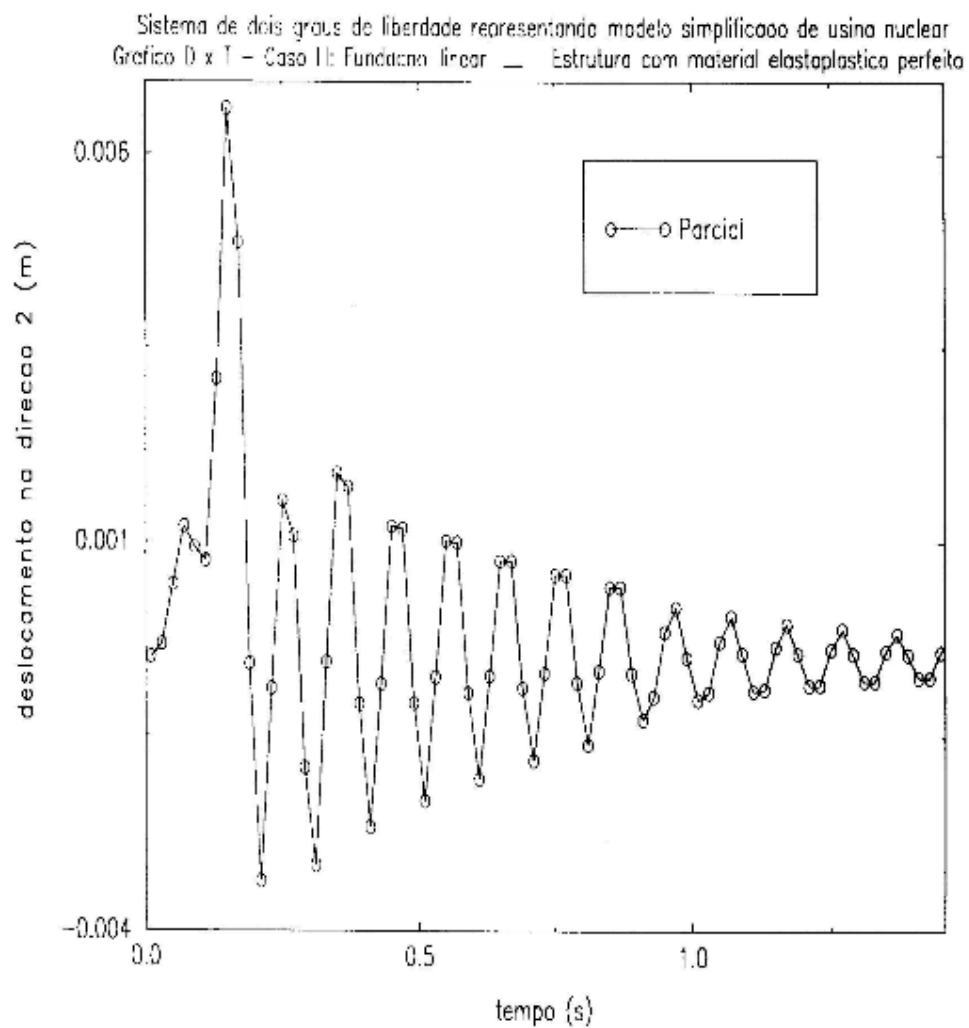


Figura 6.1.2.3-b Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

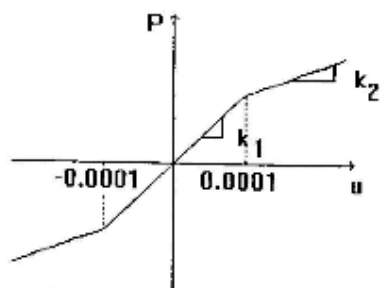


Figura 6.2.1 Rigidez de mola para as massas 1 e 2 (Exemplo 2).

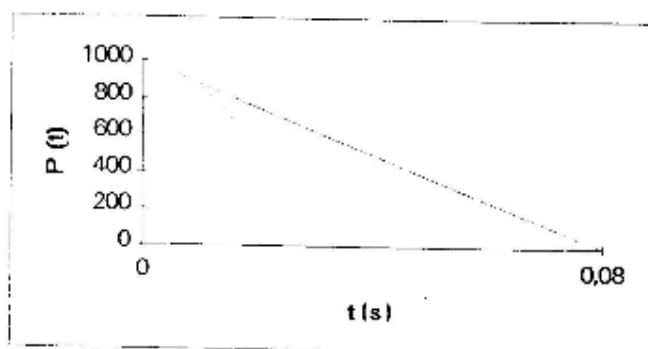


Figura 6.2.2 Carga aplicada à direção 2 (Exemplo 2).

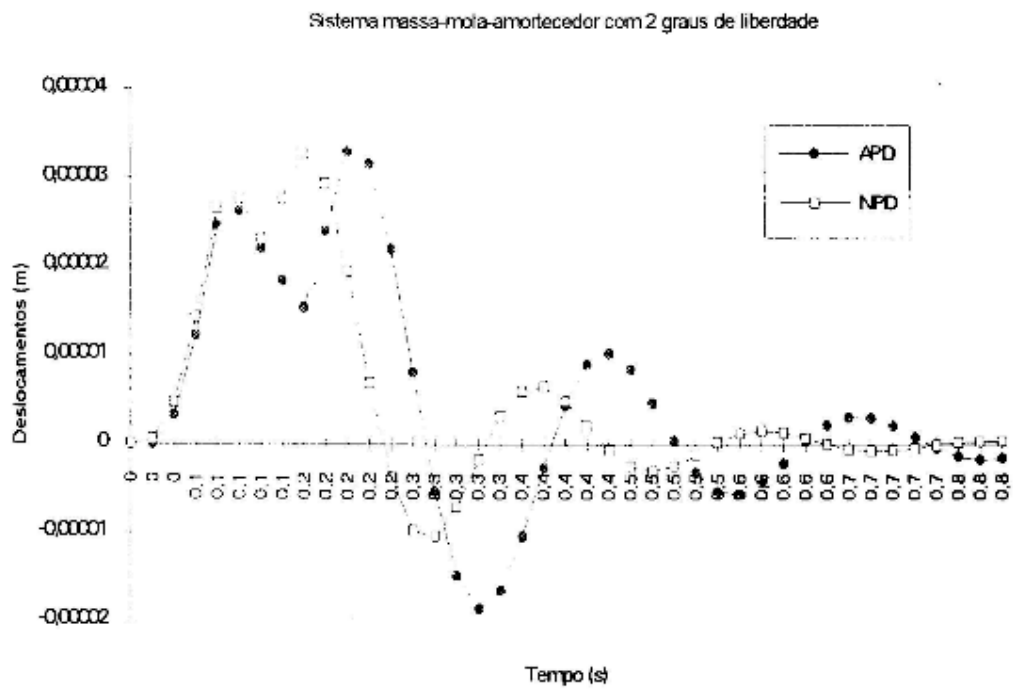


Figura 6.2.1.1-a Deslocamento na direção 1 (m) x tempo (s).

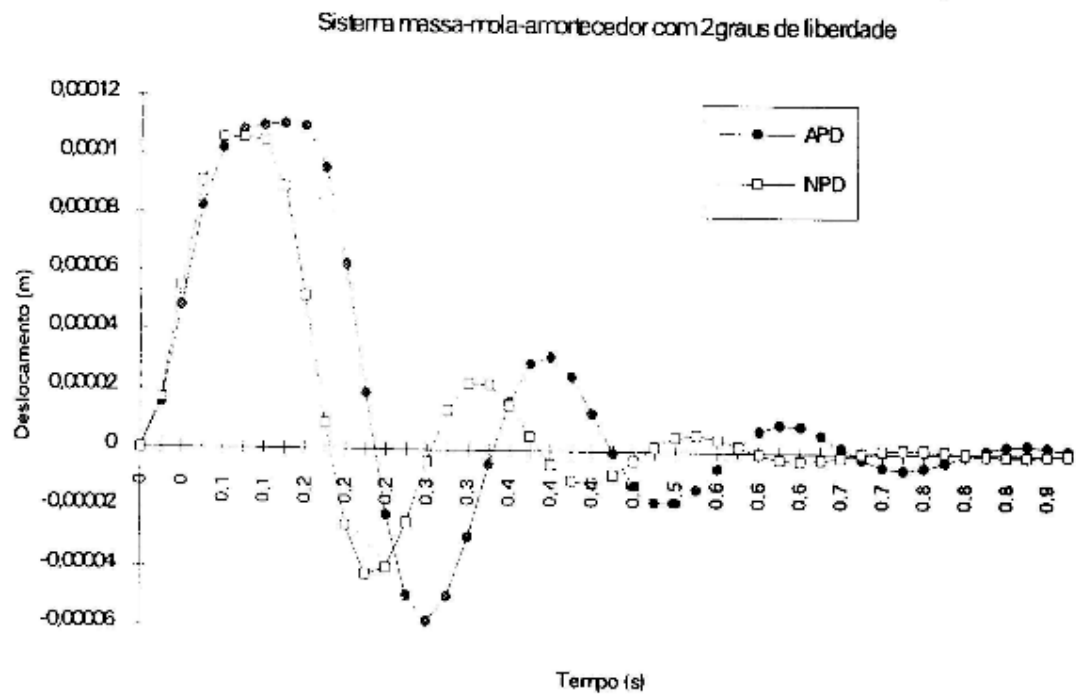


Figura 6.2.1.1-b Deslocamento na direção 2 (m) x tempo (s).

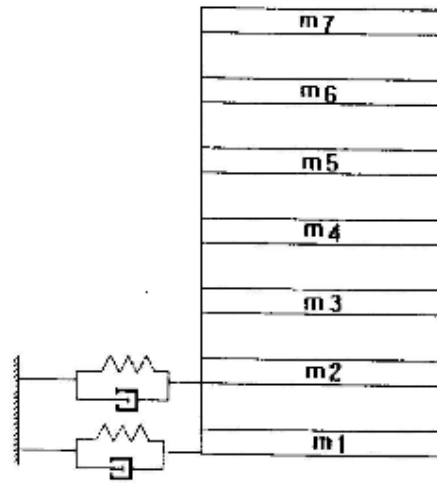


Figura 6.3.1-a Sistema solo-estrutura (Exemplo 3).

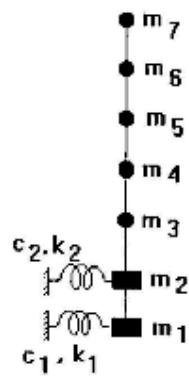


Figura 6.3.1-b Shear Building (Exemplo 3).

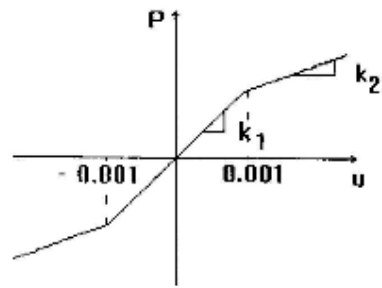


Figura 6.3.2-b Rigidez no solo (Exemplo 3).

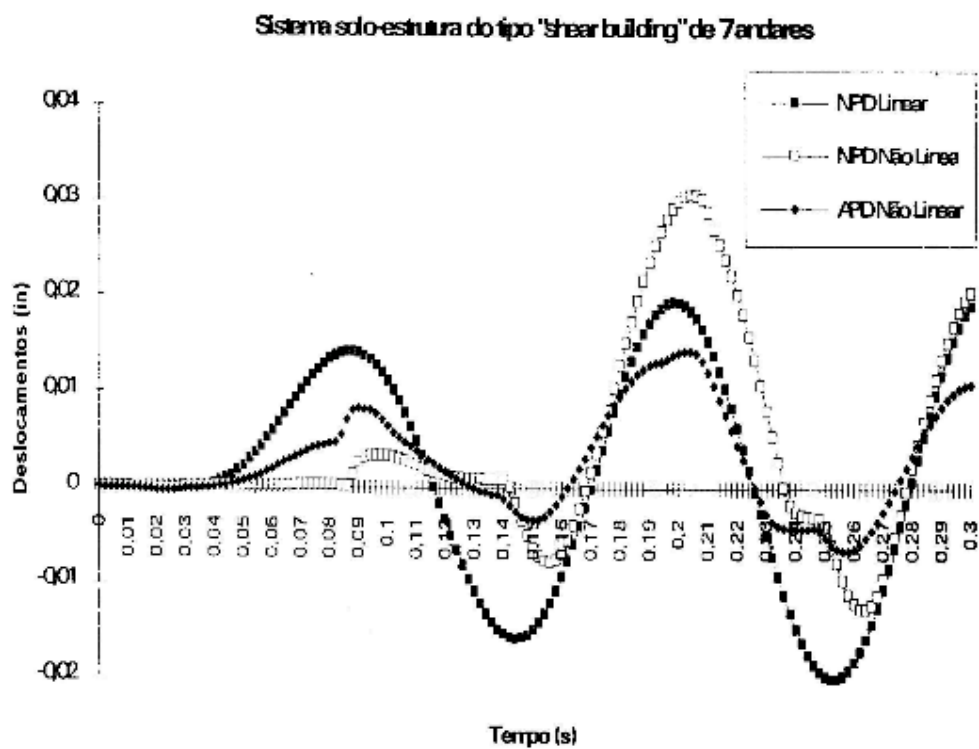


Figura 6.3.3-a Deslocamento da direção 1 (m) x tempo (s).

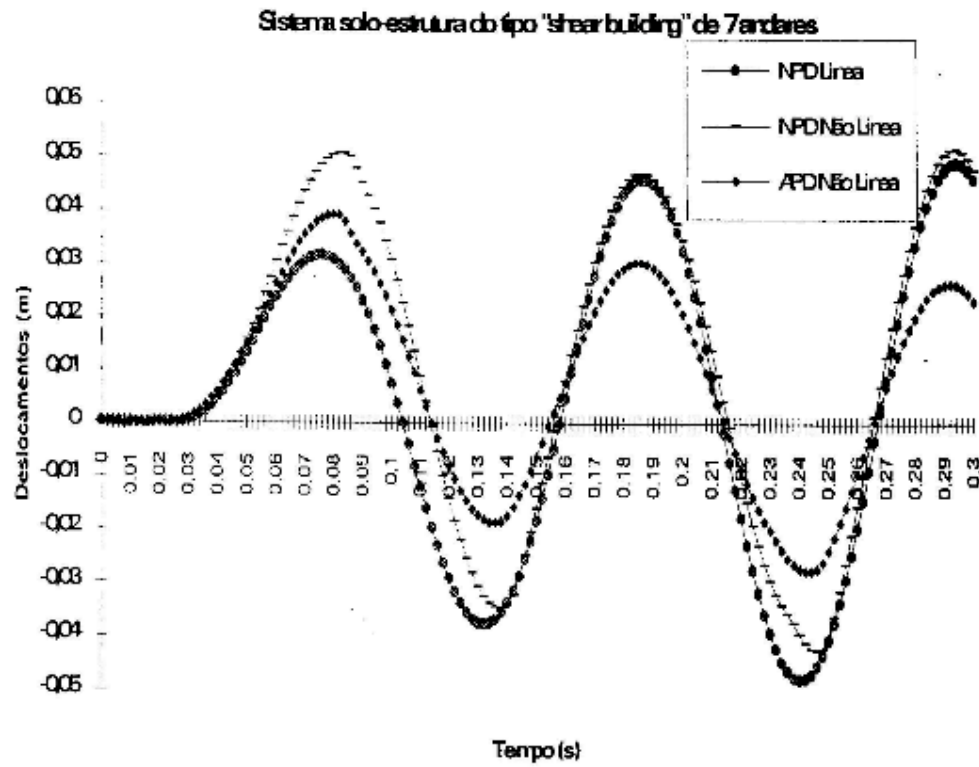


Figura 6.3.3-b Deslocamento da direção 2 (m) x tempo (s).

Sistema solo-estrutura do tipo "shear building" de 10 andares - Kawamoto

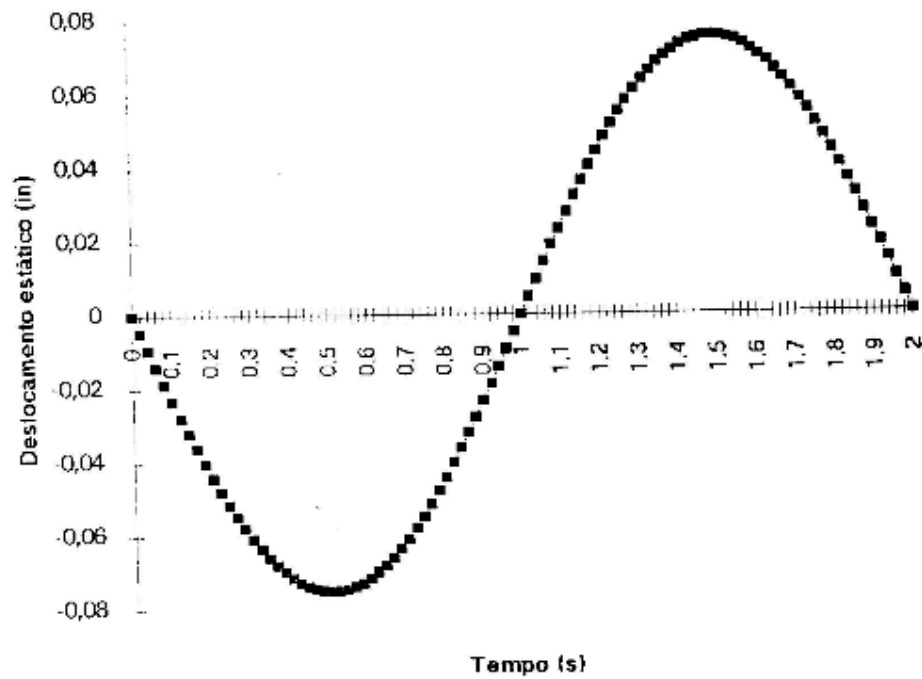


Figura 6.4.1-a Deslocamento da direção 2 (m) x tempo (s) – Resposta estática

Sistema solo-estrutura do tipo "shear building" de 10 andares - Kawamoto

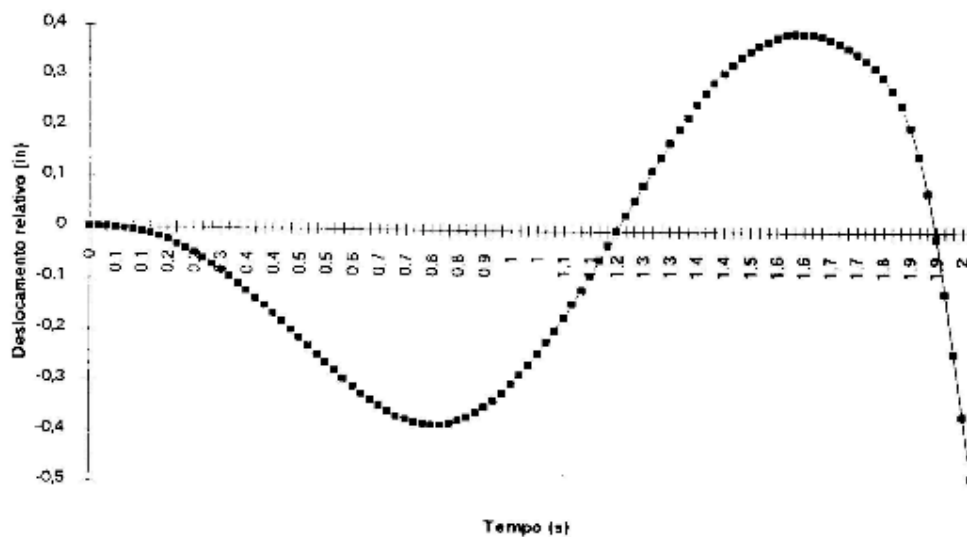


Figura 6.4.1-b Deslocamento da direção 1 (m) x tempo (s) – Resposta não-linear

Sistema solo-estrutura do tipo "shear building" de 10 andares - Kawamoto

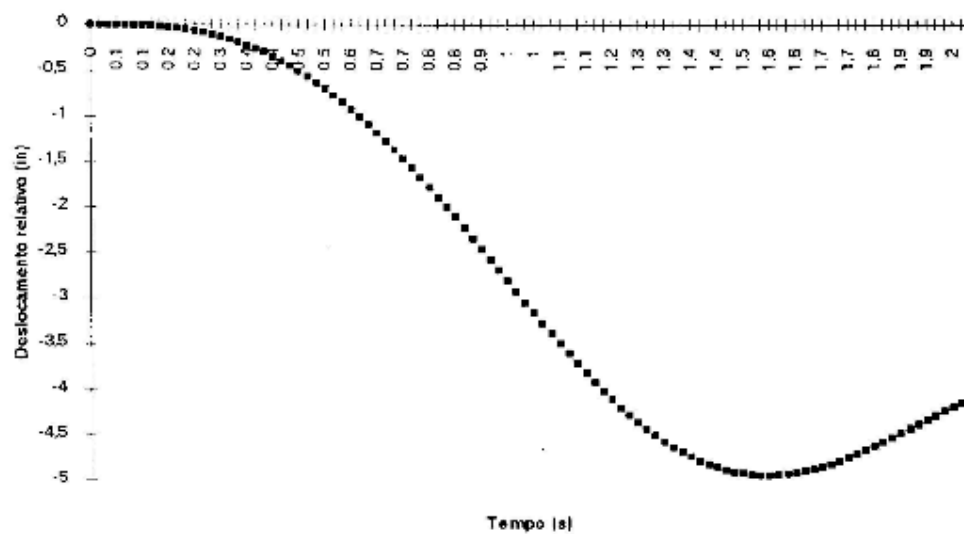


Figura 6.4.1-c Deslocamento da direção 10 (m) x tempo (s) – Resposta não-linear

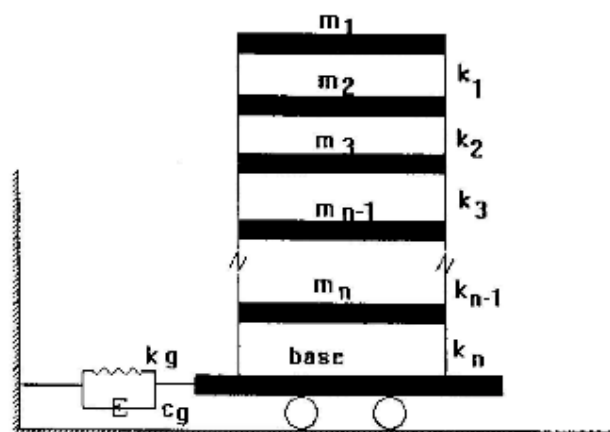


Figura 6.5.1 Edifício sujeito a movimento na base (Exemplo 4).

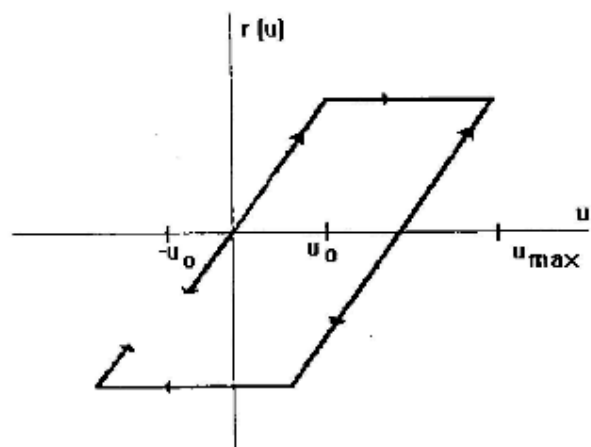


Figura 6.5.2 Deformação elastoplástica (Exemplo 4).

Sistema de estrutura do tipo 'shear building' de 20 andares

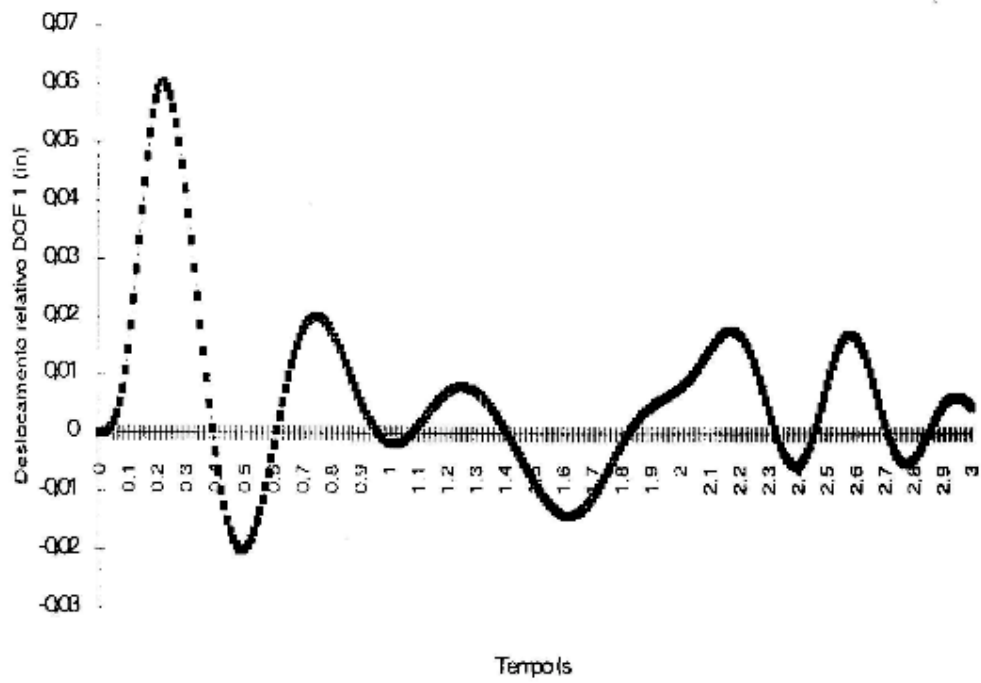


Figura 6.5.3 Deslocamento da direção 1 (in) x tempo (s)

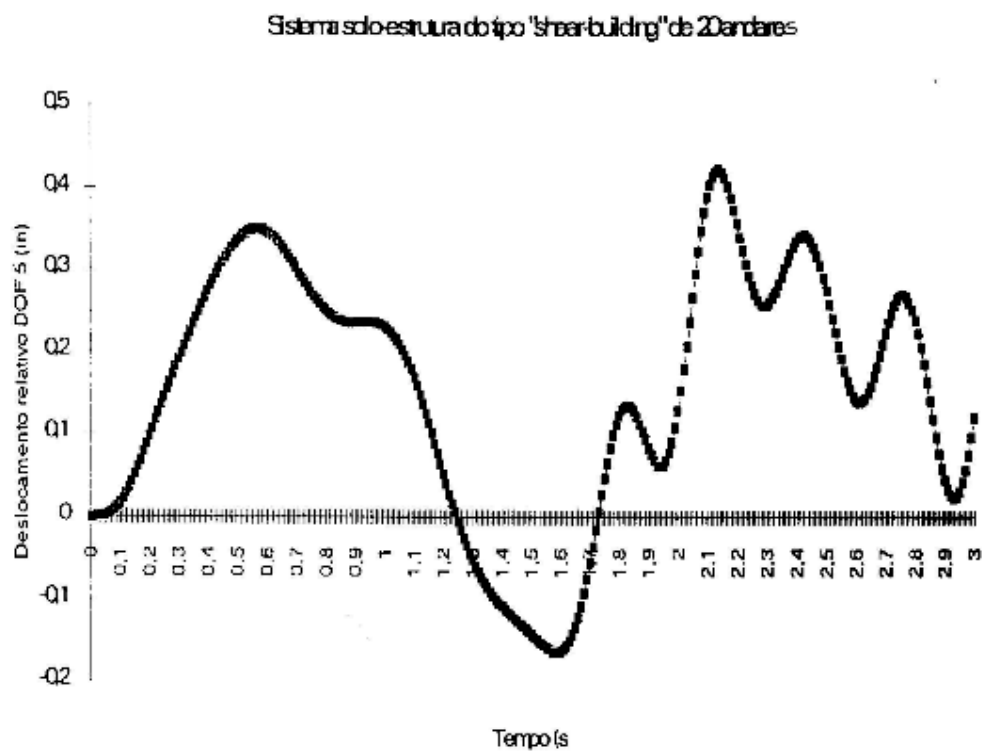


Figura 6.5.4 Deslocamento da direção 5 (in) x tempo (s)

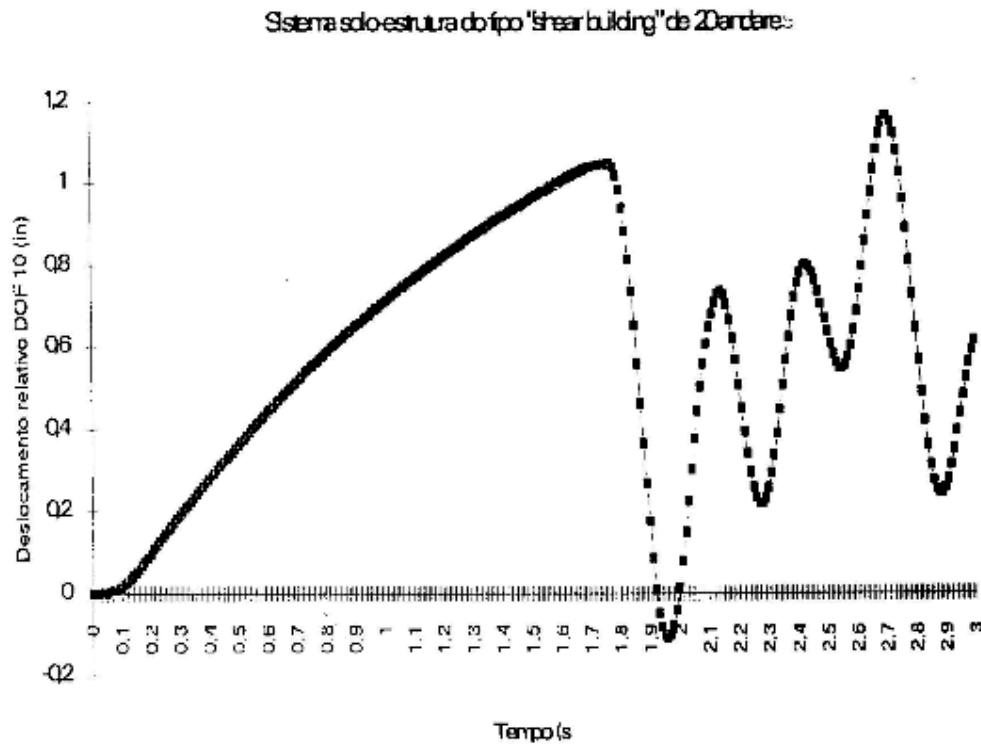


Figura 6.5.5 Deslocamento da direção 10 (in) x tempo (s)

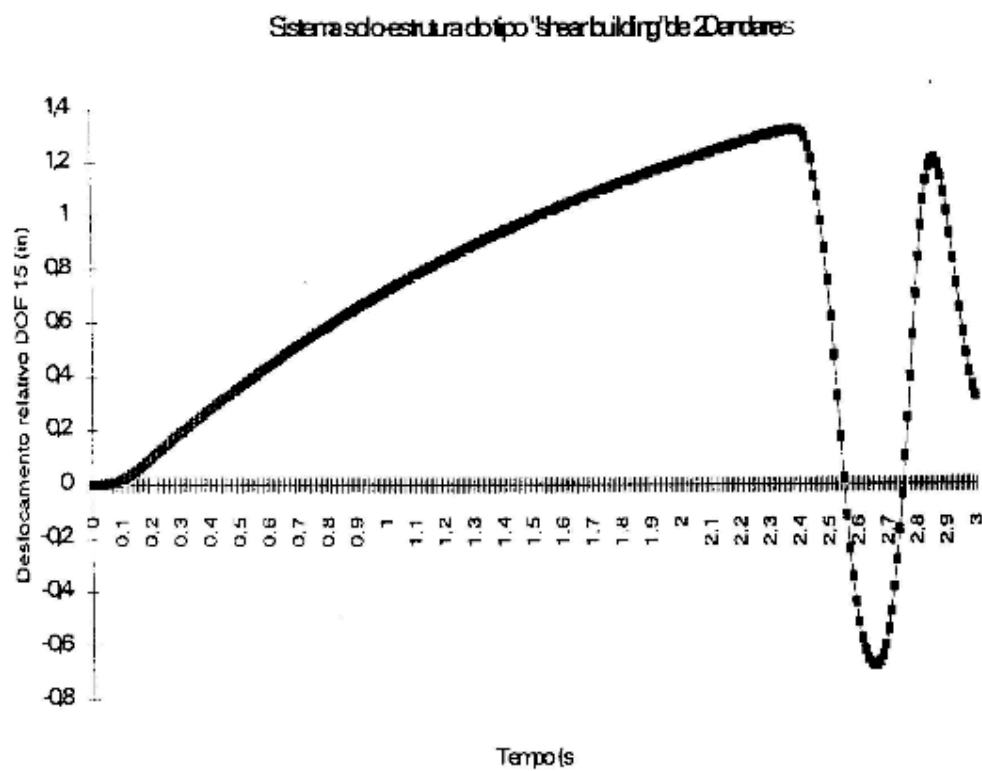


Figura 6.5.6 Deslocamento da direção 15 (in) x tempo (s)

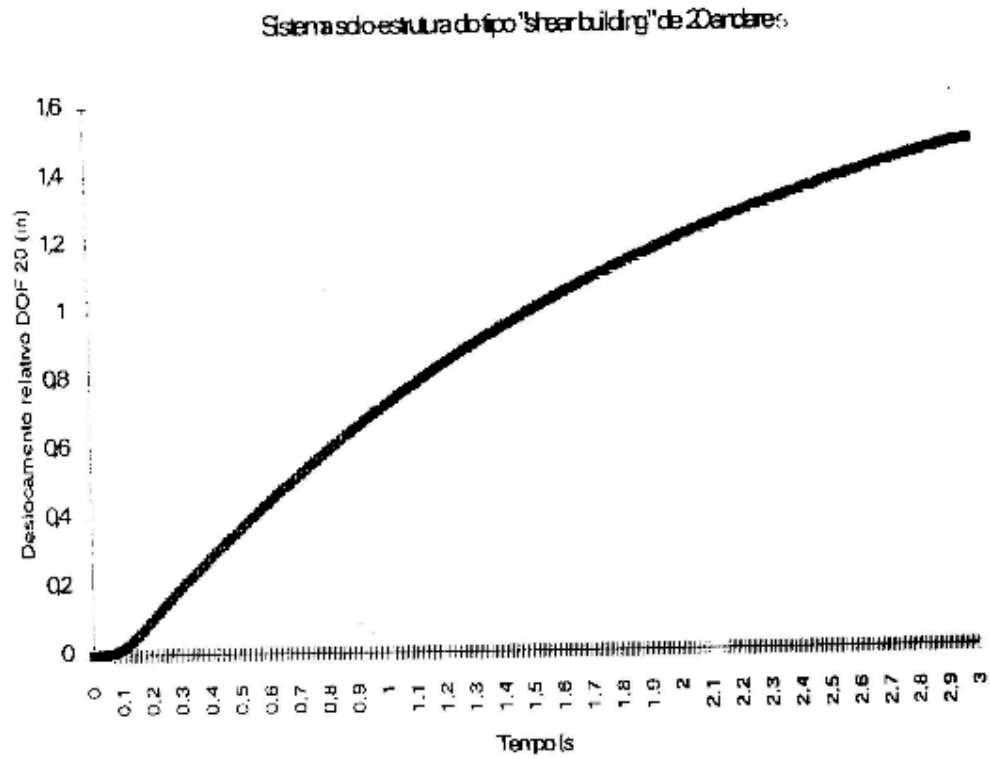


Figura 6.5.7 Deslocamento da direção 20 (in) x tempo (s)

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 Conclusões

O método proposto é adequado para a análise de sistemas dinâmicos não-lineares dotados de amortecimento não-proporcional. Os exemplos analisados mostram boa precisão das respostas obtidas pelo método proposto, nos casos em que os sistemas têm altos índices de convergência nos modos predominantes na resposta, mesmo que o amortecimento seja fortemente não-proporcional.

O método proposto foi aplicado a sistemas bilineares com “softening” e a sistemas de materiais elastoplásticos perfeitos. As respostas observadas são também precisas se comparadas a respostas obtidas por integração direta.

O método proposto é de simples implementação, não exigindo esforço computacional elevado, porque a extração modal é processada apenas uma vez. O significado físico dos modos normais de vibração pode ser utilizado na interpretação do comportamento do sistema. O truncamento modal ser empregado na formulação apresentada.

7.2 Sugestões

O método proposto deve ser aplicado a sistemas de grande porte, medindo-se sua eficiência computacional em relação a outros métodos de integração direta. Do ponto de vista analítico, sugere-se examinar a influência da linearização das pseudoforças na precisão da resposta nos casos em que o índice de convergência é baixo.

A convergência do método proposto pode ser estudada através da Teoria de Perturbações, aumentando a compreensão do método e, eventualmente, expandindo sua aplicabilidade a sistemas com não-linearidade geométrica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGNENI, A., CREMA, L. Balis, CASTELANI, A., ONORATI, F.M. Modal parameter estimation effects on damping matrix identification. Proceedings of Damping' 93, v.1, n.3, p. DBA1-15, 1993.
- BATHE, Klaus-Jürgen. Finite element procedures in engineering analysis. New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1982.
- BATHE, K. J , WILSON, E. L Numerical methods in finite element analysis. New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1976.
- BORINO, G. , MUSCOLINO, G. Mode superposition methods in dynamic analysis of classically and non-classically damped linear systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 14, p.705-717, 1986.
- BRONOWICKI, Alen J. Analysis, Optimization, fabrication and test of composite shell with embedded viscoelastic layers. Proceedings of Damping' 93, v.1, n.3, p. GCA1-20, 1993.
- CHANG, C., ELGHADAMSI, F. E. , MOHRAZ, B. Modal analysis of non-linear systems with non classical damping. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, n.89-1198-CP, 1989.
- CHEN, T. , TAYLOR, R.L. Properties and solutions of eigensystem of non-proportionally damped linear dynamic systems. In: Numerical Methods in Engineering Theory and Applications (NUMETA 87), n.t5/1, 1987.
- _____. Solution of viscouly damped linear systems using a set of load-dependent vectors. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.19, p.653-665, 1990.

- CLARET, A. M. . Um método de superposição modal e pseudoforças para análise dinâmica de sistemas com amortecimento não-proporcional. IN: Seminário de Doutorado, Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1991.
- _____. Solução de sistemas estruturais dinâmicos não-lineares com amortecimentos não-proporcionais e dependentes da frequência. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1991. (Tese de Doutorado).
- CLOUGH, R. W. , PENZIEN, J. Dynamics of structures, New York: McGraw Hill International Book Company, 1975.
- CLOUGH, R. W. , MOJTAHEDI, S. Earthquake response analysis considering non-proportional damping. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 4, p.489-496, 1976.
- COOK, Robert Davis, MALKUS, David S. , PLESHA, Michael E. Concepts and application of finite element analysis. Canadá: John Wiley & Sons, 1989.
- DARBRE, George R. , WOLF, John P. Criterion of stability and implementation issues of hybrid frequency-domain procedure for nonlinear dynamic analysis. Zurique: Electrowatt Engineering Services, 1976.
- FINTEL, Mark et al. Response of buildings to lateral forces. Journal of the American Concrete Institute, v.68, n.2, p.442(2-23), 1971.
- FOWLER, Bryce L. Interactive characterization and database storage of complex modulus data. Proceeding of Damping' 93, v.1, n.3, p. FAA1-12, 1993.
- FOWLER, Bryce L. , ROGERS, Lynn. Accurate characterization of passive damping materials with database storage and retrieval on different computer platforms. Proceeding of Damping' 93, v.1, n.3, p. DCA1-12, 1993.

- GANERIWALA, Surendra. Fourier transform mechanical analysis (FMTA) technique to determine dynamic mechanical properties of viscoelastic materials. Proceedings of Damping' 93, v.1, n.3, p. CCA1-12, 1993.
- GILHEANY, J.J. Optimum selection of dampers for freely vibrating MDOF systems. Proceedings of Damping' 93, v.1, n.3, p. FCC1-18, 1993.
- HENKEL, Edwin, MAR, Raymond. Transient solution of coupled structural components using system modal coordinates with and without coupled system damping. Proceedings of Damping' 93, v.1, n.3, p. CCB1-13, 1993.
- HURTY, W. C. , RUBINSTEIN, M. F. Dynamics of structures. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs., 1964.
- IBRAHIMBEGOVIC, A., CHEN, H. C., WILSON, E. L. , TAYLOR, R. L. Ritz method for dynamic analysis of large discrete linear systems with non-proportional damping. Berkeley: UC, 1987.
- IBRAHIMBEGOVIC, A., WILSON, E. L. Simple numerical algorithms for the superposition mode analysis of linear structural systems with non-proportional damping. Computers and Structures, v. 33, n. 2, p. 523-532, 1988.
- ITOH, Tetsuji. Damped vibration mode superposition method for dynamic response analysis. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 2, p. 47-57, 1973.
- JANGID, R.S., DATTA, T.K. Spectral analysis of systems with non-classical damping using classical mode superposition technique. EESD, v. 22, p. 723-735, 1993.
- KAWAMOTO, James D. Solution of nonlinear dynamic structural systems by a hybrid frequency-time domain. Massachusetts Institute of Technology, 1983. (Tese de Doutorado).

- LANDAU, Luiz. Comportamento dinâmico não-linear de estruturas pelo método da superposição modal. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1983. (Tese de Doutorado).
- LAIER, J.E. Notas de aula, 1994.
- LESIEUTRE, G. A. Modeling material damping using augmenting thermodynamic fields (ATF). Proceeding of Damping 93', v.1, n.3, p.GDB1-13, 1993.
- MAU, S. T. A subspace modal superposition method for non-classically damped systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 16, p. 931-942, 1988.
- MOREIRA, M. L. T. Análise Estática de Estruturas com não-linearidade física generalizada. . Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1981. (Dissertação de Mestrado).
- MORK, K. J. Response analysis of reinforced concrete structures under seismic excitation. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 23, p.33-48, 1994.
- MORRIS, Nicholas F. The use of modal superposition in nonlinear dynamics. Computers and Structures, v. 7, p. 65-72, 1977.
- NOVAK, M. , EL HIFNAWY, L. Effect of Soil-Structure Interaction on Damping of Structures. Earthquake Engineering and Structural Dybamics, v.11, p.595-621, 1983.
- PANOSSIAN, H. V. Non-obstructive particle damping technology. Proceedings of Damping '93, v.1, n.3, p. AAB1-56, 1993.
- PAZ, M. Structural dynamics theory and computation. Van Nostrand Reinhold Environmental Engineering Series, 1980.

- RICHART, F. E., WOODS, R.D., HALL, J. R. Vibrations of soil and foundations.
New Jersey: Prentice Hall Inc., 1970.
- ROEMER, Michael J. , MOOK, Joseph D. Robust realization/identification of
damped structures. Proceedings of Damping '93, v. 1, n.3, p.FCB-25,1993.
- ROESSET, J.M. et al. Modal analysis of structures with foundation interaction.
Journal of Structural Division, v. ST3, p. 339-416, 1973.
- _____. Dynamic soil-structure interaction. Journal of Structural Division. v.ST7, p.
1541-1544, 1973.
- SEIBLE, F., HEGEMIER, G. A., IGARASHI, A. , KINGSLEY, G. R. Simulated
seismic-load tests on full-scale five story masonry building. Journal of Structural
Engineering, v. 120, n.3, Mar., 1994.
- SEIBLE, F., PRIESTLEY, M. J. N., KINGSLEY, G. R., KÜRKCHÜBASCHÉ, A. G.
Seismic response of full-scale five story reinforced masonry building. Journal of
Structural Engineering, v. 120, n.3, Mar., 1994.
- SIMONIAN, Stepan S. Passive damping applications. Proceedings of Damping '93,
v.1, n.3, p. BAB1-49, 1993.
- SINGH, M. P., GHAFORY-ASTHIANY, M. Modal time history analysis of non-
classicaly damped structures for seismic motions. Earthquake Engineering and
Structural Dynamics, v. 3, p. 133-146, 1986.
- SINGH, M. P., Seismic response by SRSS for nonproportional damping. Journal of the
Engineering Mechanics, v. EM6, p.1405-1419, 1980.

- SINGH, M. P., SUAREZ, L.E. Seismic response analysis of structure-equipment systems with non-classical damping effects. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 15, p.871-88, 1987.
- SORIANO, H. L. Deslocamento relativo de andar em análise tridimensional de edifícios. Revista Brasileira de Engenharia, v.1, n.2, 1983.
- STRICKLIN, James A. , HAISLER, Walter E. Formulations and solution procedures for nonlinear structural analysis. Computers and Structures, v.2, p.125-136, 1975.
- THOMSON, W. T., CALKINS, T., CARAVANI, P. A numerical study of damping. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 3, p.91-101, 1974.
- TSAI, Wan T., LEANG, Joseph T., CHAO, Richard S. Consistent damping methods for space structural systems. Proceedings of Damping '93, v.1, n.3, p.CBA1-14, 1993.
- UDWADIA, Firdaus E., KUMAR, Ravi. Iterative methods for non-classically damped dynamic systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 23, p.137-152, 1994.
- VELETSOS, A. S., VENTURA, C. E. Modal analysis of non-classically damped linear systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 14, p.217-243, 1987.
- VENÂNCIO-FILHO, F. , CLARET, A. M. . Amortecimento não-proporcional em sistemas estruturais. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1991.
- _____. Structural systems with non-proportional damping. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, n.d.t , 1991.

- _____. Resposta dinâmica no domínio do tempo de sistemas dotados de amortecimento não-proporcional. Colloquia, UFRGS, 29 Jun.- 3 Jul., 1987.
- _____. A pseudo force method for treatment of non-proportional damping. IN: SPECIALITY CONFERENCE OF ASCE, 7, Blacksburg, Virginia, USA, 1988.
- _____. Non-linear dynamic analysis with frequency-dependent damping. IN: Damping '89 Conference, Flórida, 1989.1 (Proceedings), p. FDD.
- _____. Non-linear dynamic analysis with frequency-dependent damping. Proceedings of Damping '93, v.1, n.3, p.FDD1-11, 1993.
- YIU, Y. C. Design and analysis of viscoelastic struts for large space structures. Proceedings of Damping '93, v.1, n.3, p.GCC1-22, 1993.
- WARBURTON, G. B., SONI, S.R. Errors in response calculations for non-classically damped structures. EESD, v.5, p. 365-376, 1977.
- WOLF, John P. Nonlinear soil-structure interaction analysis based on hybrid frequency-time domain formulation. Zurique: Electrowatt Engineering Services, p.5.5/25-5.5/32, 1987.
- _____. Consistent lumped-parameter models for unbolted soil: physical representation. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.20, p.11-32, 1991.
- WOLF, John P., MEEK, Jethro W. Cone models for a soil layer on a flexible rock half-space. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.22, p.185-193, 1993.
- _____. Cone models for nearly incompressible soil. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.22, p.649-663, 1993.

_____. Why cone models can represent the elastic half-space. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.22, p.759-771, 1993.

_____. Material damping for lumped-parameter models of foundations. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.23, p.349-362, 1994.